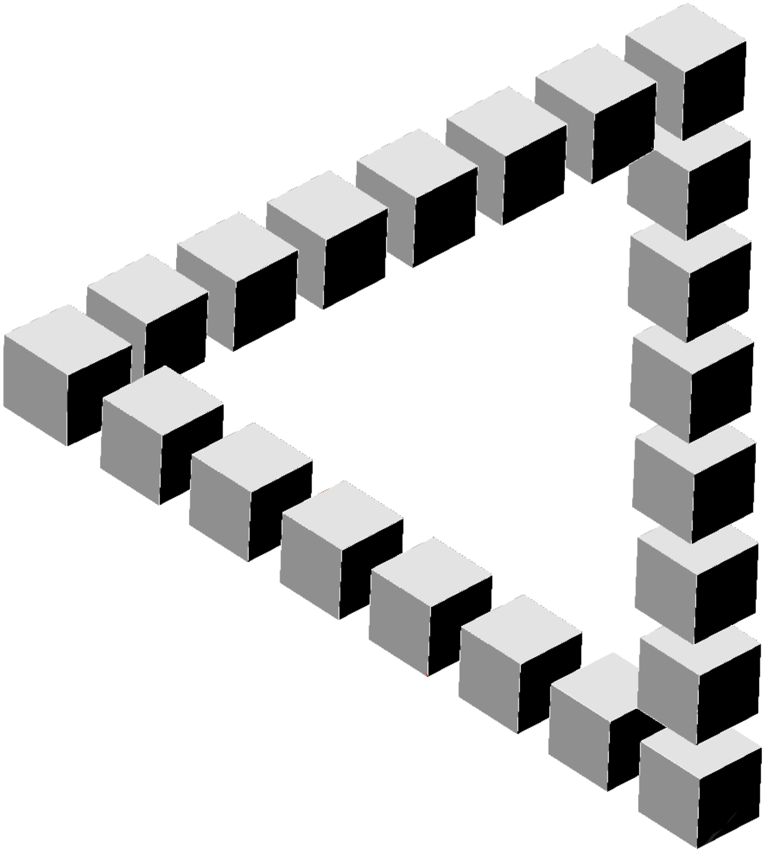
PERSPECTIVES

L'univers mathématique de M.C. Escher



Ce carnet vous guidera tout au long de l'exposition.

Vous y trouverez des activités, des questions, des anecdotes ainsi que des textes pour aller plus loin. A côté des activités et questions se trouvent des lézards indiquant le niveau de difficulté estimé.

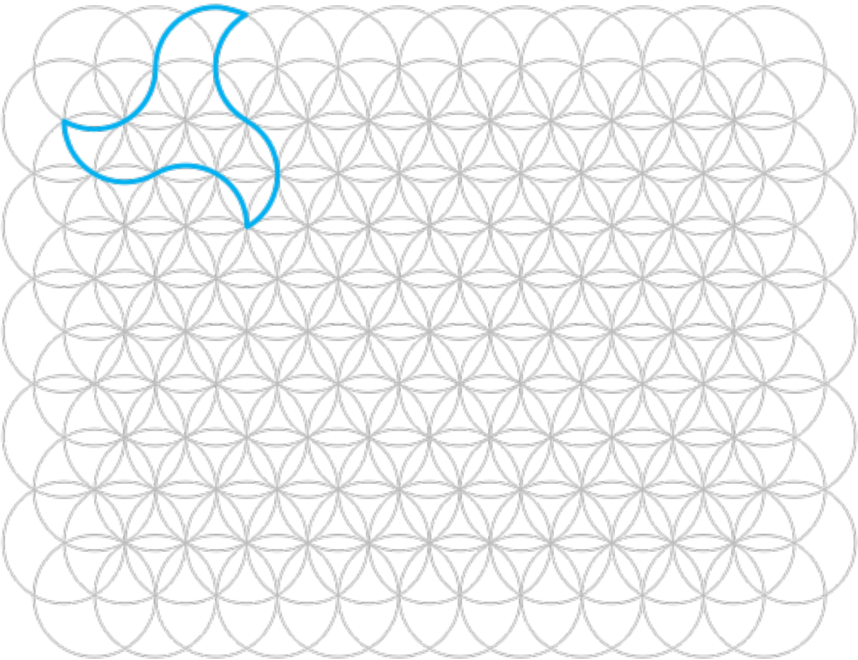
N'hésitez pas à tout essayer! Des explications et réponses aux activités se trouvent sur le site de l'exposition.

Pour les questions, les réponses se trouvent parfois directement dans les posters. De temps en temps, il vous faudra vous creuser un peu plus les méninges!

Les Divisions régulières du plan

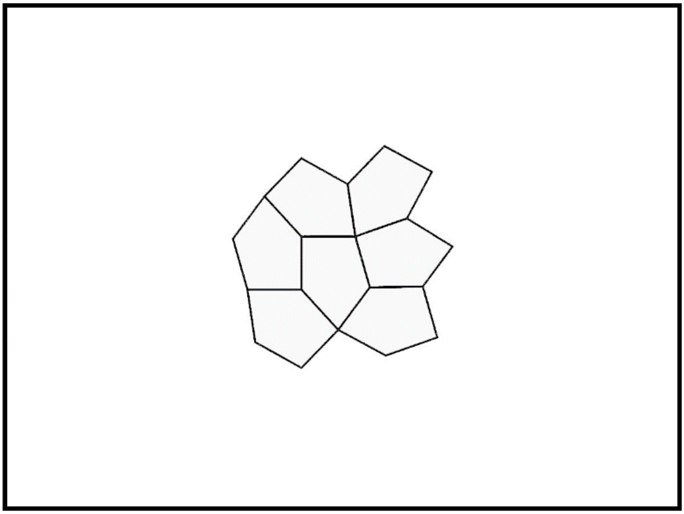
Activité: A l'image d'Escher, essayez de reproduire un des pavages de l'Alhambra en vous aidant de la grille ci-dessous.

Indice: Les traits de la grille permettent de dessiner les formes "en hélice" mais pas les étoiles et hexagones "internes".



Question 1 : Combien de têtes différentes apparaissent sur l'une des premières œuvres de pavages d'Escher, réalisée en 1922 ?

Activité: Parviendrez-vous à compléter ce pavage pentagonal?



Pour aller plus loin…
Il existe des pentagones non réguliers qui permettent de paver le plan. La recherche de tous ces pentagones a occupé la communauté mathématique pendant près de 100 ans! Commencée en 1918 avec le mathématicien allemand Karl Reinhardt, la quête se termine en 2017 lorsque l'informaticien Michaël Rao démontre que les 15 pentagones découverts jusqu'à ce jour sont les seuls permettant de recouvrir le plan sans se chevaucher.

Quatre de ces pentagones ont été trouvés dans les années 70 par Marjorie Rice, une femme au foyer américaine qui avait découvert le problème dans le magazine *Scientific American.*

Question 2: L'octogone régulier permet-il de paver le plan?

Heinrich Heesch était un mathématicien allemand qui a fait ses études à Zürich. Il a notamment travaillé sur les mathématiques de la cristallographie et a donné son nom au fameux nombre de Heesch.

Activité: Encore un pentagone! La forme ci-contre est la même que celles qui sont aimantées dans l'exposition. Placez la pièce jaune au centre et essayez de construire une couronne (ou plusieurs) tout autour. Pouvez-vous en déduire le nombre de Heesch de ce pentagone?

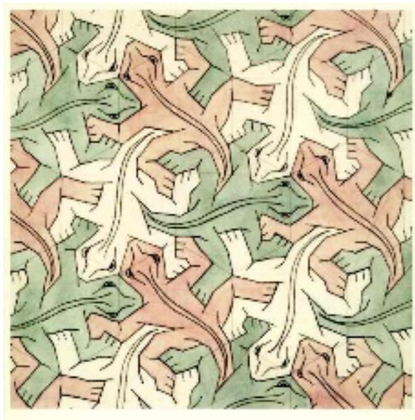
Activité: Dessinez maintenant une première, puis une deuxième couronne autour du triangle équilatéral ci-dessous. Combien y-a-t-il de triangles dans chaque couronne ? Pouvez-vous continuer ? Quel est le nombre de Heesch du triangle équilatéral ?

Le mathématicien **Casey Mann** est connu pour son travail sur le nombre de Heesch. Il a effectué son doctorat sous la direction de Chaim Goodman-Strauss, célèbre entre autres pour son travail sur les pavages apériodiques. Le monde mathématique est parfois tout petit.

Question 3: Quel est le nombre de Heesch de l'heptagone régulier?

Lézardons

Les lézards sont omniprésents dans l'œuvre de M.C.Escher. On les retrouve dans quatre de ses Divisions régulières du plan ainsi que dans d'autres dessins. Mais ses lézards ne sont pas tous parfaitement identiques et ne sont pas imbriqués de la même manière!



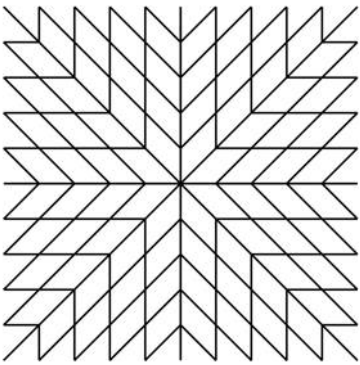
Activité: Identifiez un motif dans chacun de ces pavages. De combien de tuiles se compose chaque motif? Est-ce le motif le plus petit que vous pouvez trouver?

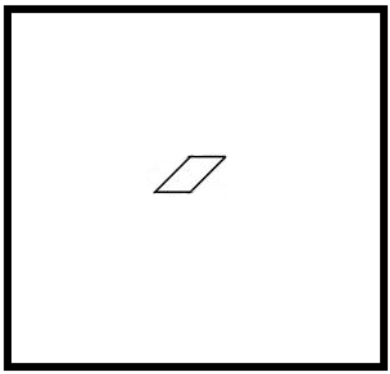
Question 4: Dans le pavage ci-contre, combien y-a-t-il de tuiles dans le plus petit motif possible?

Le problème Einstein

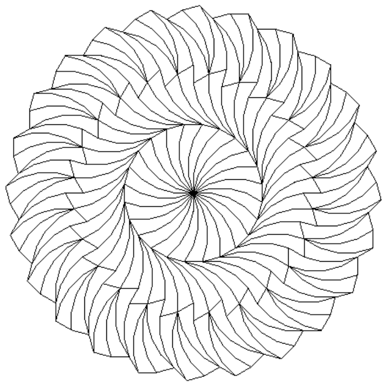
La recherche de pavages apériodiques est plutôt récente: le premier exemple date de 1966, et il utilisait 20'426 tuiles différentes! Très rapidement, on descend à 104, puis 40, puis 6 tuiles en 1971.
Roger Penrose parvient à deux tuiles en 1973, et la beauté de ses pavages popularise le problème.
Pourtant, il faudra attendre encore 30 ans et la découverte de David Smith pour que l'existence de pavages apériodiques à une seule tuile soit démontrée.

Activité: Ce pavage est non-périodique. En utilisant la même tuile, dessinez un pavage périodique.





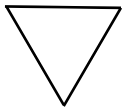
Question 5: Ce pavage est-il périodique? non-périodique? apériodique?



Comment M.C. Escher a-t-il fait?

Pas si facile de retrouver le polygone dont est parti Escher pour créer certains de ses pavages ! Avec un peu d'entraînement, on peut comprendre comment il a fait apparaître des animaux et inventer de nouvelles tuiles.

Activité: Dans ce dessin, le polygone qui a servi de base est un triangle. Essayez de les retrouver sur le dessin et d'identifier les modifications appliquées aux côtés du polygone de base pour obtenir la tuile en forme d'oiseau.

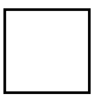


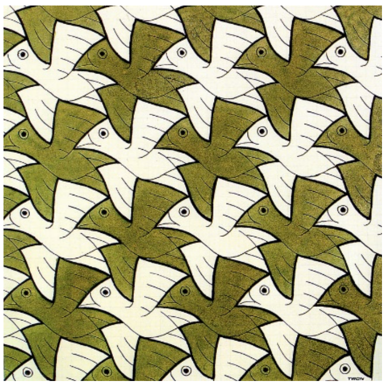
Question 6: Quelle(s) modification(s) applique-t-on aux côtés du polygone de base pour obtenir la tuile du pavage?

A) Compensation par translation?

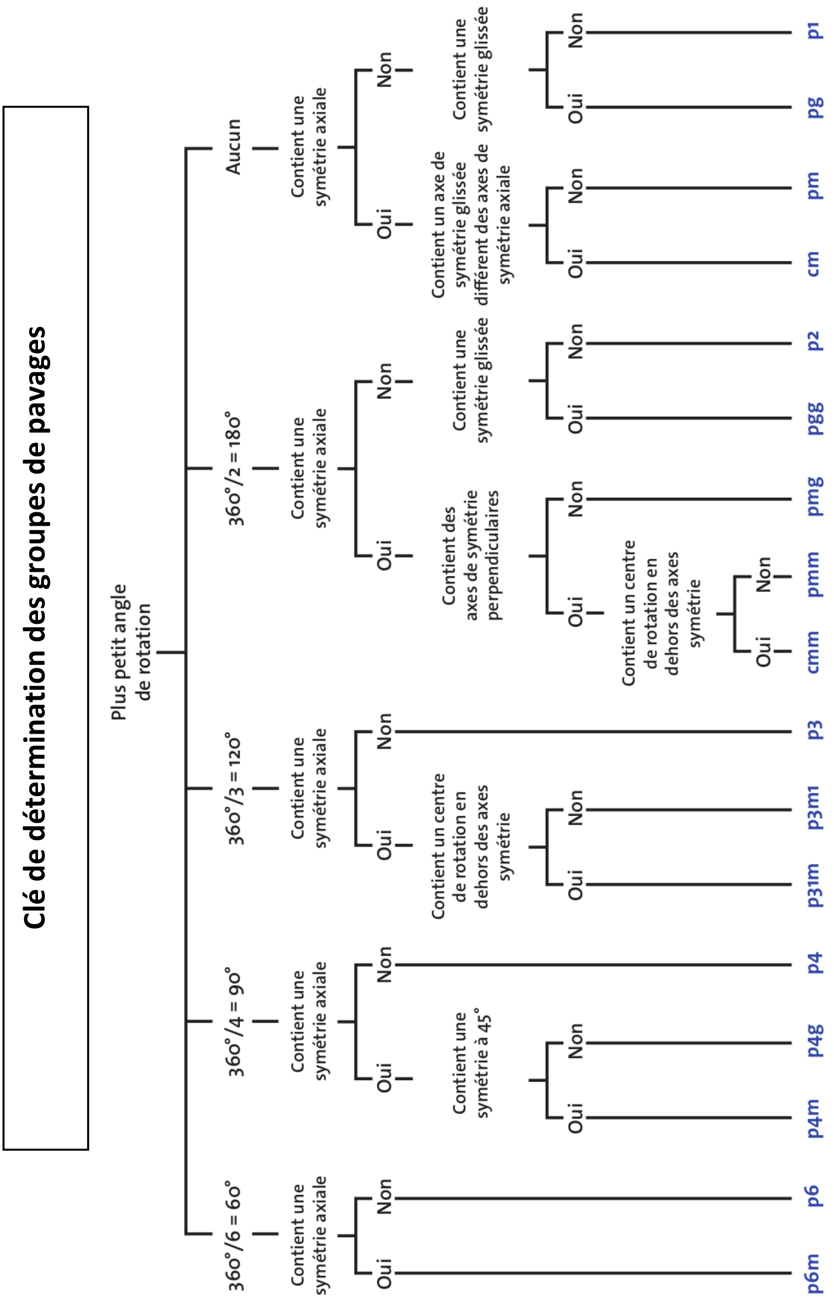
B) Par symétrie glissée?

C) Par pivot?



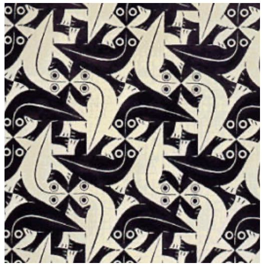


Memory Cet arbre décisionnel permet d'identifier à quel groupe un pavage appartient.



Classer les pavages

Il existe plusieurs clés et arbres de ce type qui servent d'aide pour déterminer le groupe d'un pavage. L'idée est de regarder les différentes transformations subies par la tuile: rotation, symétrie axiale, symétrie glissée.



Exemples: Ici à droite, on remarque que le plus petit angle de rotation entre un lézard blanc et un noir vaut 90°. Il n'y a pas de symétrie axiale. Il s'agit donc du type ***p4***.

Ici à gauche, le lézard tourne toujours de 180°. Il n'y a pas de symétrie axiale, mais il y a une symétrie glissée pour passer du lézard noir au lézard blanc. Il s'agit donc du type ***pgg***.

Les écureuils ici à droite ont la tête vers le haut ou vers le bas, on a donc une rotation de 180°. Il n'y a ni symétrie axiale ni symétrie glissée, il s'agit donc du type **p2**.

Activité: Observez bien les 24 images présentes dans le jeu de Memory. Quatre d'entre elles ne sont pas de M.C. Escher mais de l'artiste Joana Mailler. Saurez-vous les repérer et déterminer leur groupe de pavage ?

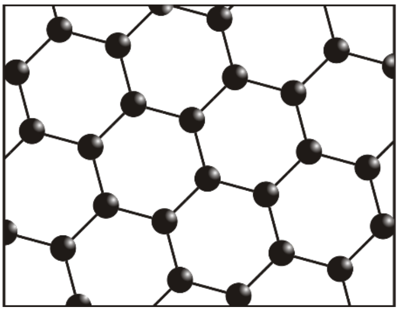
Question 7: Dans ce jeu de Memory, quelles classes de pavage sont représentées deux fois?

Cristallographie

La classification des pavages et des cristaux

p2, pm, pgg… La notation des groupes de papier peint utilisée en cristallographie (ici dans sa version simplifiée) paraît bien énigmatique. On peut toutefois donner quelques pistes de compréhension. Le premier chiffre indique l'ordre de rotation le plus élevé (1 s'il n'y a pas de rotation, 2 si la tuile effectue un demi-tour, etc). Les lettres désignent quant à elles les symétries. La symétrie axiale est représentée par un *m* pour miroir et la symétrie glissée par un ***g.***

Activité: Ceci est la représentation graphique du graphène. Identifiez les axes de symétries et les centres de rotation de ce pavage hexagonal.



Question 8: Quelle molécule possède des couches ayant la même structure que l’œuvre de M.C. Escher ”Fish, Duck, Turtle” ?

Géométries

Un **syllogisme** est un mode de raisonnement logique qui consiste en deux phrases supposées vraies dont on déduit une troisième. Lorsque la méthode de déduction est fausse, on obtient ce qu'on appelle un **paralogisme**.

Activité: Parmi les raisonnements suivants, lesquels sont des paralogismes? Attention, un syllogisme porte sur la forme et non le sens.

Les mathématicien·ne·s aiment les œuvres d'Escher
J'aime les œuvres d'Escher
Donc je suis mathématicien·ne.

Tous les polygones sont réguliers.
« Le chapeau » est un polygone.
Donc « Le chapeau » est régulier.

Les mathématicien·ne·s aiment les œuvres d'Escher.
Je ne suis pas mathématicien·ne.
Donc je n'aime pas les œuvres d'Escher.

Tous les rectangles pavent le plan.
Tous les carrés sont des rectangles.
Donc tous les carrés pavent le plan.

Question 9: Sachant que:

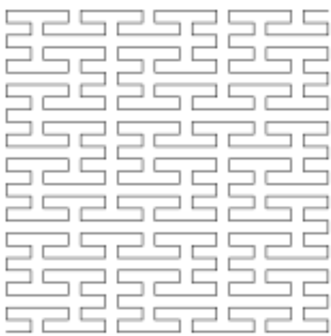
P1) Si Heidi et Lara vont à Lausanne, Emilia ira aussi.
P2) Si Lara va à Lausanne, Heidi aussi.
P3) Lara ou Emilia, l'une des deux au moins, ira à Lausanne.

Emilia ira-t-elle à Lausanne ?

Pour aller plus loin…

Le mathématicien italien Giuseppe Peano propose à la fin du XIXème siècle une définition axiomatique des nombres naturels (0,1,2,...), dont les cinq axiomes sont les suivants:

1. L'élément appelé zéro et noté 0 est un entier naturel.
2. Tout entier naturel a un unique successeur qui est un entier naturel.
3. Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur.
4. Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux.
5. Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est l'ensemble des nombres naturels.



Peano est aussi connu pour la courbe ci-dessus, appelée courbe de Peano. C'est un exemple de fractale.

Un peu de géométrie sphérique

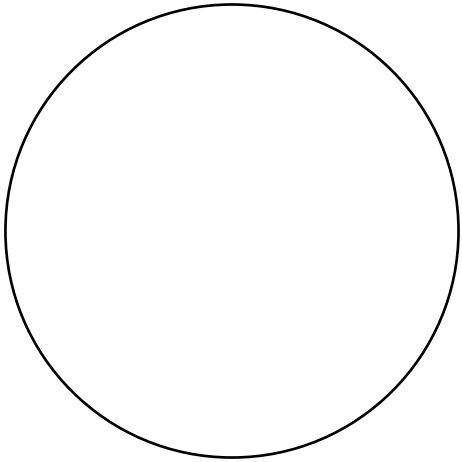
La vie quotidienne vous expose plus fréquemment que vous ne le pensez aux géométries non euclidiennes. Regardons par exemple d'un peu plus près un ballon de football pour faire de la géométrie sphérique.

Activité: Quels sont les différents polygones qu'on trouve sur le ballon de foot? Combien y en a-t-il de chaque sorte?
Pourrait-on construire un ballon de foot avec une seule sorte de polygone?
Est-il possible de reproduire le pavage du ballon de foot en géométrie euclidienne?
Vous pouvez essayer avec les pièces aimantées.

Question 10: Comment s'appelle le créateur de l'œuvre hyperbolique en crochet photographiée dans cette exposition?

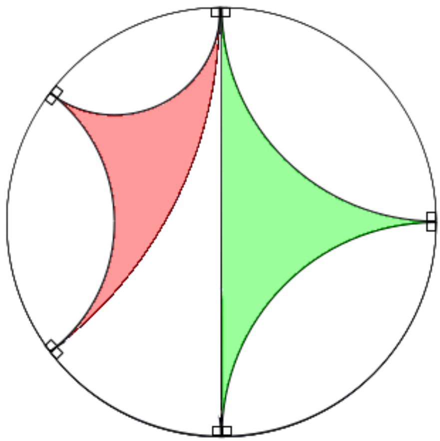
Si vous voulez vous mettre au crochet hyperbolique, lisez donc cet article !

Activité: Sur la tablette présente dans la salle, créez un pavage hyperbolique de pentagones (p=5) où quatre pentagones se rencontrent à chaque sommet (q=4). Reproduisez-le ensuite dans le disque de Poincaré ci-contre.



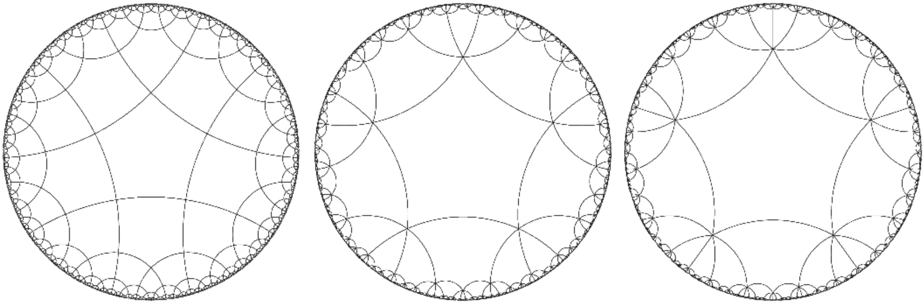
En géométrie hyperbolique, un **triangle idéal** est un triangle dont les trois sommets sont sur le bord du disque de Poincaré.

Question 11: Que vaut la somme des angles d'un triangle idéal ?

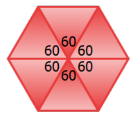


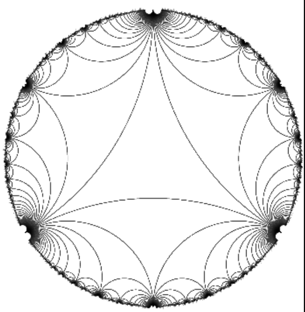
Les déplacements dans des géométries non-euclidiennes sont étranges. Cela inspire des personnes dans tous les domaines, jusqu'à celui des jeux vidéo. Découvrez la version hyperbolique du jeu "Rogue" et trouvez les Orbes de Yendor!

En géométrie hyperbolique on peut faire un pavage avec **n'importe quel polygone régulier**! De plus, le nombre de polygones qui se rencontrent à chaque sommet peut varier. Ci-dessous, des pavages hyperboliques pentagonaux avec 4, 6 et 7 pentagones à chaque sommet.



Comment est-ce possible ? Prenons l'exemple du triangle équilatéral. En géométrie euclidienne, la **somme des angles d'un triangle** vaut 180° et l'angle d'un triangle équilatéral vaut donc 180°/3 = 60°. Pour savoir combien de triangles on peut mettre par sommet, on divise 360° par 60°: on obtient 6.



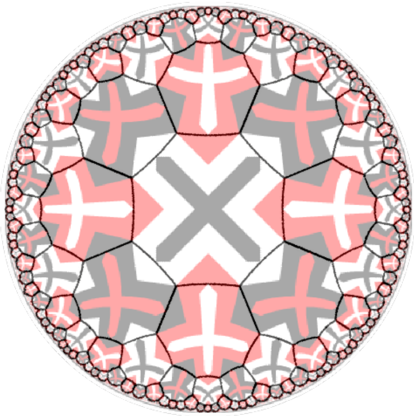


En géométrie hyperbolique, la **somme des angles d'un triangle** n'est pas égale à 180°, mais inférieure à 180°. Donc l'angle d'un triangle équilatéral est inférieur à 60°, et peut prendre toutes les valeurs entre 0° et 60°. On peut donc mettre plus que six triangles par sommet! En fait, le nombre de triangles par sommet doit être strictement supérieur à 360/60. On peut avoir 7, 8, 9, et même une infinité de triangles par sommet comme on peut le voir sur l'image ci-contre.

Règle générale Pour savoir si on peut mettre **q** polygones à **p** côtés à chaque sommet, il faut que l'inégalité **(p-2)(q-2) >4** soit vérifiée.

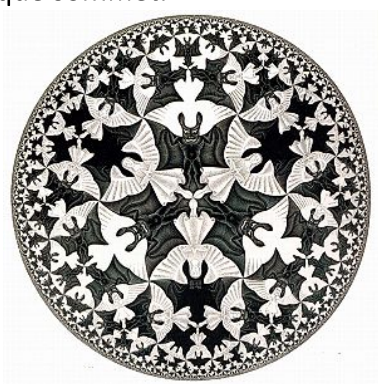
Escher et les pavages hyperboliques

Escher s'est basé sur différents pavages hyperboliques pour créer sa série des *Circle Limit.*



Circle Limit II et Circle Limit III sont basés sur des pavages octogonaux.

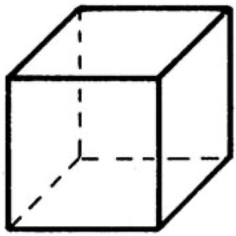
Activité: Identifiez le pavage hyperbolique qui a servi de base à ce dessin de M.C. Escher, c'est-à-dire trouvez le nombre de côtés du polygone de base et le nombre de polygones qui se rencontrent à chaque sommet.



Question 12: Combien de triangles noirs apparaissent dans le pavage hyperbolique de Wang, représentant le même pavage que celui de Coxeter?

Points de fuite et perspectives

Lorsqu'on nous demande de dessiner un cube, il ressemble généralement à ça:

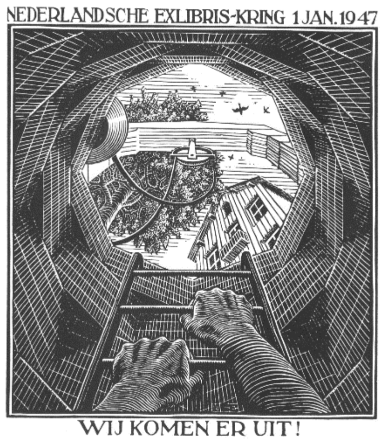


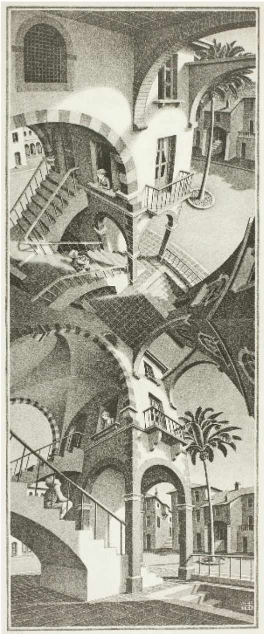
On utilise ce qui s'appelle la **perspective cavalière.** Dans ce dessin, les segments qui étaient parallèles dans le cube le sont toujours, et il n'y a aucun point de fuite.

Cependant, les représentations réalistes utilisent généralement une perspective avec un ou plusieurs points de fuite.

Activité: Dessinez la représentation d'un cube avec un seul point de fuite.

Question 13: Combien de points de fuites sont présents sur cette carte de M.C. Escher?





Dans *Up and Down*, que vous retrouvez dans la salle, Escher utilise deux perspectives cylindriques, ayant chacune un point de fuite, pour représenter deux fois la même scène : vue d'en haut et vue d'en bas. Pour dérouter complètement l'observateur, les deux points de fuites se confondent au centre de l'œuvre. Ainsi, le carrelage central est à la fois le plafond et le sol.

Activité: Qu'est-ce qui rend si perturbante cette œuvre *Still life and street* de M.C. Escher ?

Lien pour pouvoir zoomer sur les détails de cette œuvre.

Question 14: Combien de perspectives cylindriques sont utilisées par Escher dans son œuvre *Maison aux escaliers* ?

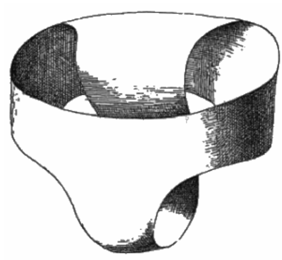
Objets surprenants et impossibles

Cette œuvre de M.C. Escher montre des fourmis en train de se déplacer le long d'un objet mathématique appelé **ruban de Moebius**, du nom du mathématicien qui l'a décrit pour la première fois au début du XIXème siècle. C'est aussi le pseudonyme d'un auteur français de BD, Jean Giraud. Pourquoi tant de fascination pour un bête anneau?
Si vous observez le chemin des fourmis, vous découvrirez que ce ruban n'a qu'une seule face!

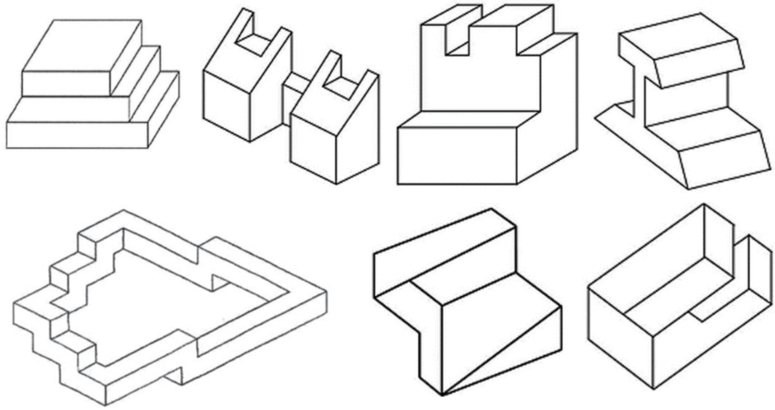
Activité Déchirez la bande papier ci-contre et créez votre ruban de Moebius ! Pour cela, faites faire un demi-tour à l'une des extrémités de la bande papier avant de joindre les deux bouts avec un morceau de scotch. Coloriez-le et vérifiez qu'il n'a bien qu'une seule face.

Vous pouvez ensuite vous amuser à couper votre ruban de Moebius le long de la ligne indiquée en pointillés. Quel objet obtenez-vous?

Question 15: Combien de faces possède l'objet ci-dessous, surnommé « Slip de Moebius »?



Activité Parmi les dessins suivants, lesquels représentent des objets impossibles?



Question 16: Quel est le nom complet de la personne ayant créé l'objet impossible qui a ensuite inspiré à Escher l'œuvre *Montée et Descente*?

Pour aller plus loin… Rendez-vous sur le site "Impossible World" en scannant le code QR ci-contre et admirez des œuvres d'art contemporaines.

Question bonus: Un des disques hyperboliques suspendu au plafond est construit à partir d’une photo des deux commissaires de l’exposition, Elise et Sandie. Quel est le polygone utilisé dans ce pavage et combien de polygones se rencontrent à chaque sommet?