

# Le chaos

*Le chaos, en physique, n'est pas synonyme de désordre absolu : des structures géométriques élégantes décrivent le comportement des systèmes chaotiques. Le chaos limite la prévisibilité, mais fait aussi apparaître des relations causales là où nous n'en imaginions pas.*

par James Crutchfield, Doyne Farmer, Norman Packard et Robert Shaw

**L**a puissance de la science naît de sa faculté à relier les effets et les causes. À partir des lois de la gravitation, nous sommes capables de prévoir les éclipses, par exemple, plusieurs milliers d'années avant qu'elles se produisent. Tous les phénomènes naturels ne sont pourtant pas aussi prévisibles. Ainsi les mouvements de l'atmosphère, qui obéissent aux mêmes lois physiques que les mouvements des planètes, ne sont exprimés qu'en termes probabilistes. Il y a de l'imprévisible dans le temps qu'il fera, l'écoulement de l'eau ou le lancer des dés : pour tous les phénomènes de ce type, aucune relation n'apparaît immédiatement entre une cause et un effet, et l'on dit qu'ils sont aléatoires. Ce caractère aléatoire ne décourageait pourtant pas les physiciens, et l'on croyait encore récemment qu'il suffirait d'accumuler et de traiter une quantité plus importante d'informations pour prévoir le comportement de ces systèmes.

Une découverte étonnante a remis en cause cette hypothèse : des systèmes déterministes constitués de très peu d'éléments ont aussi des comportements aléatoires. De plus, ce caractère aléatoire est fondamental, et il ne disparaît pas, même quand on améliore le système de mesure. On qualifie aujourd'hui de chaotiques ces systèmes dont l'étude est en plein essor (voir *Déterminisme et chaos*, par Vincent Croquette, *Pour la Science* n° 62).

Soulignons un point paradoxal : le chaos découvert est déterministe, car il est régi par un ensemble de règles précises qui ne font elles-mêmes intervenir aucun élément aléatoire ; en principe, le futur d'un tel système est complètement déterminé par son passé, mais, en pratique, les incertitudes sur les conditions initiales sont amplifiées, de sorte que si le court terme est prévisible, l'évolution à long terme ne l'est plus. En outre, il existe de l'ordre dans le chaos : les comportements chaotiques sont régis par des structures géométriques élégantes qui engendrent de l'aléatoire, tout comme les joueurs

quand ils battent les cartes ou les robots électro-ménagers quand ils pétrissent de la pâte.

Avec le chaos sont apparus de nouveaux concepts de modélisation scientifique. D'un côté, nous voyons que la prévisibilité de ces systèmes est fondamentalement limitée, mais, de l'autre, la reconnaissance du déterminisme propre au chaos nous ouvre de nouvelles perspectives ; de nombreux phénomènes aléatoires ont une structure et sont en réalité plus prévisibles qu'on ne le supposait : ils sont simplement chaotiques. En conséquence, on sait aujourd'hui interpréter, avec des lois simples, d'innombrables données accumulées que l'on avait perdu espoir d'analyser faute d'un fil directeur. La structure du chaos confère un ordonnancement à des phénomènes extrêmement variés : la circulation atmosphérique, l'écoulement des gouttes d'un robinet qui fuit, le fonctionnement du cœur, etc. De ce fait, une révolution bouleverse de nombreuses branches de la science.

## Le déterminisme

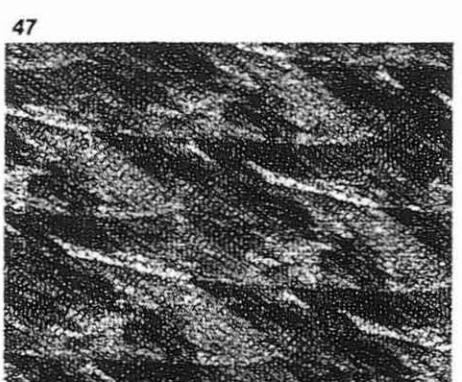
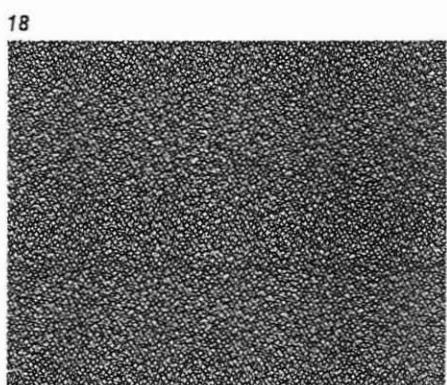
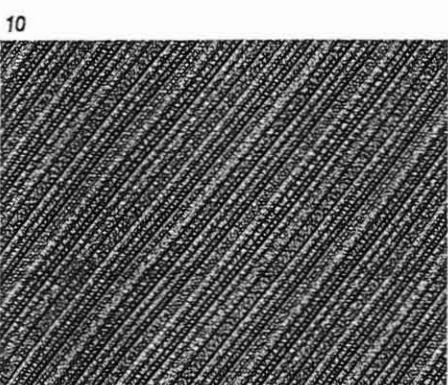
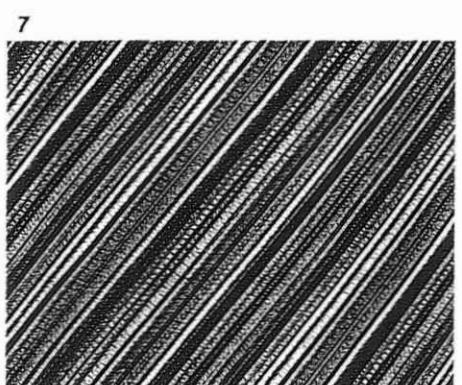
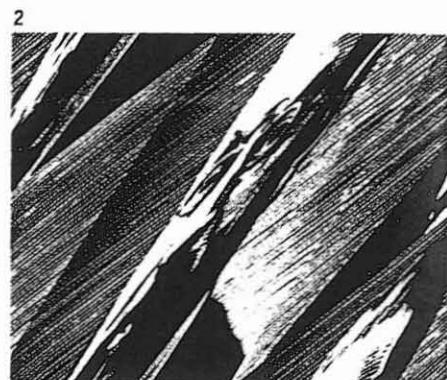
Pourquoi le comportement d'un système est-il aléatoire ? Étudions cette question sur un exemple classique de

phénomène aléatoire, le mouvement brownien, qui apparaît par exemple quand on observe au microscope un grain de poussière en suspension dans l'eau : les mouvements incessants et en toutes directions du grain de poussière sont dus à l'agitation thermique des molécules d'eau ; comme les molécules d'eau sont invisibles et en nombre considérable dans tout système macroscopique, il est absolument impossible de prévoir la trajectoire précise du grain de poussière. Le caractère quasi-aléatoire du phénomène résulte, dans cet exemple, des innombrables interactions entre tous les constituants du système.

Au contraire, le chaos, auquel cet article est consacré, apparaît même dans des systèmes constitués d'un nombre limité d'éléments, tous observables ; que de tels systèmes présentent déjà un comportement aléatoire nous amène à réviser nos idées sur l'origine du comportement aléatoire des systèmes plus complexes, comme l'atmosphère par exemple.

Pourquoi les mouvements de l'atmosphère sont-ils plus difficiles à prévoir que les éclipses de Soleil ? L'atmosphère et le Système solaire sont tous deux constitués de nombreux éléments, dont la même loi simple – la relation fonda-

**1. ON PEUT SE REPRÉSENTER LE CHAOS** comme le résultat d'opérations géométriques successives d'étirement et de repliement. On a pratiqué ce type d'opérations sur une peinture du mathématicien français Henri Poincaré, le fondateur de la théorie des systèmes dynamiques. On a d'abord numérisé l'image (*en haut à gauche*) afin de la traiter par ordinateur. Puis on a appliqué un « étirement-repliement » dont le résultat est analogue à celui que l'on aurait obtenu en plaçant l'image sur une bande de caoutchouc, en l'étirant, puis en coupant les parties de l'image qui débordent du cadre et en les réintroduisant sur le côté opposé ; le résultat de cette première opération est représenté sur l'image 1 (*le nombre présent au-dessus de chaque image indique le nombre d'opérations effectuées*). Quand on effectue cette transformation plusieurs fois, le visage se brouille (*images 2 à 4*), les couleurs se mélangent et l'image tout entière prend une teinte homogène (*images 10 et 18*). Certains points reviennent cependant, parfois, au voisinage de leur position originale, et l'on voit alors réapparaître brièvement l'image originale (*images 47 et 48, et 239 à 241*). La transformation illustrée sur cette figure présente une particularité : la fréquence du phénomène de « récurrence de Poincaré », ou réapparition de l'image initiale (phénomène baptisé ainsi en mécanique statistique) est bien supérieure à ce qu'elle est en général : dans les systèmes chaotiques, ce type de récurrence est très rare, de l'ordre d'une seule fois lors d'une évolution durant un temps égal à l'âge de l'Univers ; dès que de petites fluctuations se font sentir, le temps qui s'écoule entre deux réapparitions est habituellement si long que toute information sur l'image originale est perdue.



mentale de la dynamique – décrit le comportement individuel. Comme toutes les lois, cette loi fondamentale de la dynamique est un outil de prévision : si l'on désigne par  $F$  la force appliquée à un corps et par  $m$  la masse de ce corps, on détermine l'accélération  $a$  communiquée par la force par l'égalité  $F = ma$ .

Un peu d'algèbre et quelques considérations élémentaires de dynamique indiquent alors que, si l'on connaît (par une mesure) la position et la vitesse d'un objet à un instant donné, la loi permet de déterminer ces deux variables à n'importe quel autre instant. Cette idée joue en science un rôle fondamental

et, au XVIII<sup>e</sup> siècle, Pierre Simon de Laplace l'exprima sous sa forme la plus extrême : selon Laplace, il suffisait de connaître la position et la vitesse de toutes les particules de l'Univers, à un instant donné, pour calculer l'intégralité de son évolution ultérieure. On conçoit facilement la difficulté d'un tel programme, mais, pendant plus de 100 ans, on a tenu l'idée de Laplace pour fondée, au moins dans son principe. L'application immédiate de l'idée de Laplace au comportement humain eut des conséquences philosophiques retentissantes : le comportement humain est prédéterminé et le libre arbitre n'est qu'une illusion.

Au XX<sup>e</sup> siècle, le déterminisme laplacien s'est effondré pour deux raisons différentes, l'une microscopique et l'autre macroscopique. La première est apparue au début du siècle avec la mécanique quantique : selon le principe d'incertitude d'Heisenberg – un dogme central de la théorie quantique –, il est impossible de déterminer simultanément, avec une précision absolue, la vitesse et la position d'une particule. Cette relation fondamentale permet d'interpréter correctement certains phénomènes aléatoires comme la désintégration radioactive, car les noyaux sont si petits que, selon le principe d'Heisenberg, il est impossible de déterminer précisément leurs mouvements ; de ce fait, il est également impossible de prévoir quand ils se désintégreront.

À l'échelle macroscopique, l'origine de l'imprévisibilité est autre. Certains phénomènes à grande échelle sont prévisibles, tandis que d'autres ne le sont pas, mais cette différence n'a aucun lien avec la mécanique quantique. La trajectoire d'un ballon de football, par exemple, est prévisible, et les gardiens de but savent exactement où ils doivent chercher le ballon quand un tir est effectué d'assez loin. En revanche, la trajectoire d'un ballon de baudruche qui se dégonfle est parfaitement imprévisible : le ballon tournoie et effectue des soubresauts imprévisibles. Pourtant les deux ballons obéissent à la relation fondamentale de la dynamique. Pourquoi la trajectoire du ballon de football est-elle prévisible, tandis que celle du ballon de baudruche ne l'est pas ?

### *La transition vers la turbulence*

L'écoulement d'un fluide est, selon les conditions, prévisible ou imprévisible. Quand la vitesse du fluide est très lente, l'écoulement est « laminaire », c'est-à-dire calme, régulier, stationnaire, et l'on peut calculer le comportement du fluide à l'aide des équations de la mécanique des fluides. Dans d'autres circonstances, en revanche, l'écoulement est moins prévisible : il est irrégulier, agité et inégal ; c'est le régime turbulent. La

#### *Laplace, Essai philosophique sur les probabilités (1776)*

« L'état présent du système de la Nature est évidemment une suite de ce qu'il était au moment précédent, et, si nous concevons une intelligence qui, pour un instant donné, embrasse tous les rapports des êtres de cet Univers, elle pourra déterminer pour un temps quelconque pris dans le passé ou dans l'avenir la position respective, les mouvements, et généralement les affections de tous ces êtres.

L'Astronomie physique, celle de toutes nos connaissances qui fait le plus honneur à l'esprit humain, nous offre une idée, quoique imparfaite, de ce que serait une semblable intelligence. La simplicité de la loi qui fait mouvoir les corps célestes, les rapports de leurs masses et de leurs distances, permettent à l'Analyse de suivre, jusqu'à un certain point, leurs mouvements ; et, pour déterminer l'état du système de ces grands corps dans les siècles passés ou futurs, il suffit au géomètre que l'observation lui donne leur position et leur vitesse pour un instant quelconque : l'homme doit alors cet avantage à la puissance de l'instrument qu'il emploie, et au petit nombre de rapports qu'il embrasse dans ses calculs ; mais l'ignorance des différentes causes qui concourent à la production des événements, et leur complication, jointe à l'imperfection de l'Analyse, l'empêchent de prononcer avec la même certitude sur le plus grand nombre des phénomènes ; il y a donc pour lui des choses incertaines, il y en a de plus ou moins probables. Dans l'impossibilité de les connaître, il a cherché à s'en dédommager en déterminant leurs différents degrés de vraisemblance, en sorte que nous devons à la faiblesse de l'esprit humain une des théories les plus délicates et les plus ingénieuses des Mathématiques, savoir la science des hasards ou des probabilités. »

#### *Poincaré, Science et méthode (1903)*

« Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissons exactement les lois de la nature et la situation de l'Univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même Univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les dernières. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit. »

2. LES IDÉES sur le hasard et les probabilités ont beaucoup évolué depuis les débuts de la physique moderne. Le mathématicien Pierre Simon de Laplace (1749-1827) pensait que notre Univers était strictement déterministe, et donc complètement prévisible ; seule l'imperfection de nos méthodes expérimentales nous obligeait, pensait Laplace, à utiliser des théories probabilistes. Henri Poincaré (1854-1912), en revanche, avait une idée plus proche de celle des physiciens modernes : il reconnaissait que d'infimes incertitudes sur l'état initial des systèmes sont amplifiées au cours du temps, de sorte qu'il est impossible de prévoir l'évolution des systèmes à long terme.

sensation que procure l'entrée soudaine d'un avion dans un orage, au cours d'une traversée sans histoire, illustre bien la différence entre les régimes laminaires et les régimes turbulents. Quelle est la raison fondamentale de la différence entre ces deux régimes ?

Pour comprendre toute la portée de cette question, imaginons un instant que nous contemplions l'eau d'un torrent à partir de la rive : l'eau tourbillonne et jaillit, mais, dans le lit du torrent, les rochers sont immobiles et les affluents du torrent s'y jettent assez régulièrement. Pourquoi le mouvement de l'eau est-il aléatoire ?

Le physicien soviétique Lev Landau a donné de ce phénomène une interprétation qui prévalut pendant de nombreuses années : le mouvement des fluides turbulents serait la résultante de très nombreuses oscillations, ou « modes » indépendants ; lorsque la vitesse du fluide augmente, l'écoulement devient turbulent, car ces modes apparaîtraient successivement. Chaque mode est simple, mais leur composition produirait un mouvement complexe, et la nature imprévisible de l'écoulement aurait résulté de l'incohérence des différents modes entre eux.

On sait aujourd'hui que la théorie de Landau est inexacte, et l'on connaît des systèmes très simples où n'interviennent ni combinaisons complexes ni incertitudes, mais dont le comportement est aléatoire. Ainsi, au début du siècle, le mathématicien français Henri Poincaré remarqua que des phénomènes imprévisibles, « fortuits », disait-il, se produisent dans des systèmes où de petites différences dans les conditions initiales engendrent des résultats très différents. Cette caractéristique apparaît nettement dans l'exemple d'un caillou lâché du sommet d'une colline : il roulera selon des trajectoires très différentes selon la direction de la poussée initiale, et des trajectoires différant au départ d'un angle infime peuvent entraîner, au bas de la colline, des positions finales distantes de plusieurs dizaines de kilomètres. Cet exemple ne décrit qu'imparfaitement le phénomène auquel Poincaré faisait référence, car le caillou n'est sensible aux très petites causes qu'au sommet de la colline ; en revanche, les systèmes chaotiques réagissent aux perturbations minimales en tout point de leur mouvement.

L'exemple suivant illustre à quel point certains systèmes physiques sont sensibles aux influences extérieures. Imaginons un billard américain « idéal » (avec 21 billes) où les billes rouleraient sans frottement et où aucune énergie ne serait dissipée lors des chocs. Avec une seule bille, le joueur peut provoquer de nombreuses collisions, mais quel en sera l'effet ? Pendant combien de temps les billes effectueront-elles des mouvements correspondant à ce que le joueur prévoyait ? Bien peu :

il suffit de négliger, dans les calculs, des effets aussi minimes que l'attraction gravitationnelle exercée par un électron situé à l'extrême limite de notre galaxie pour que la durée de prévision soit limitée à une minute !

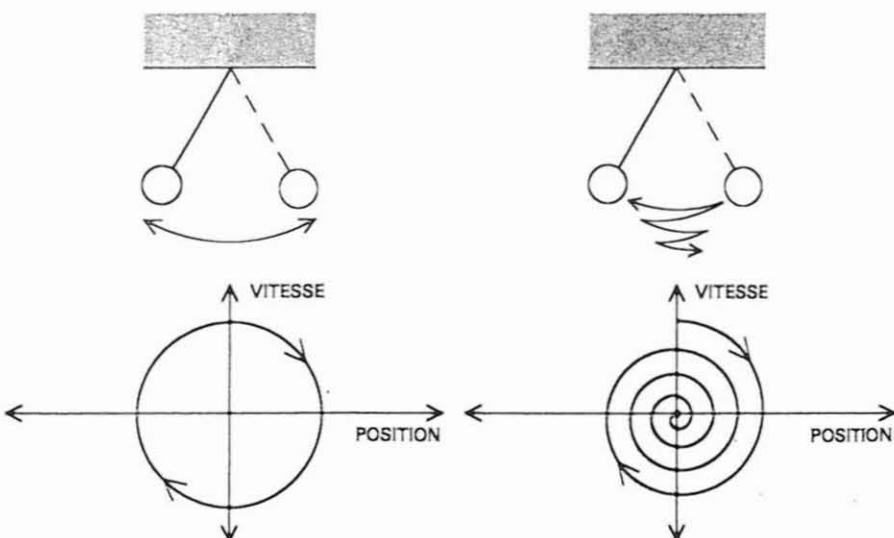
Dans un système comme le billard, la croissance très rapide des incertitudes tient au fait que les boules de billard ont une surface courbe et que chaque collision amplifie l'effet d'irrégularités minimales des surfaces qui entrent en collision. La croissance de ces incertitudes est exponentielle en fonction du nombre de collisions, c'est-à-dire que les incertitudes croissent de la même façon que le nombre de bactéries placées dans un milieu illimité renfermant des réserves de nourriture inépuisables. C'est ainsi l'une des caractéristiques fondamentales du chaos que tout effet, aussi petit soit-il, a rapidement des conséquences macroscopiques.

Ce processus d'amplification exponentielle des erreurs, caractéristique de la dynamique des systèmes chaotiques, est le second coup porté à l'affirmation de Laplace ; le coup est fatal, car, un, la mécanique quantique stipule que toute mesure est entachée d'erreurs et, deux, la dynamique du chaos enseigne que ces erreurs croîtront si rapidement que toute prévision est impossible. Si le chaos n'avait pas existé, on aurait pu espérer que les erreurs resteraient limitées ou ne croîtraient que lentement, de sorte que l'on aurait pu faire des prévisions à moyen, voire à long terme. Or le chaos existe et toute prévision à court terme est vouée à l'échec.

## Les systèmes dynamiques

Le chaos est apparu lors de l'étude de ce que l'on appelle les systèmes dynamiques. Un système dynamique comporte deux aspects : son état (les informations qui le caractérisent) et sa dynamique (la loi qui caractérise l'évolution de l'état du système en fonction du temps). On peut représenter l'état d'un système par un point dans un espace que l'on appelle l'espace des phases, un espace abstrait dont les coordonnées sont les composantes de l'état. La nature des coordonnées de l'espace des phases varie selon le contexte : pour un système mécanique, par exemple, ces coordonnées pourront être la position et la vitesse de certains éléments ; pour un système écologique, on pourrait choisir les populations de différentes espèces.

Le pendule simple (*voir la figure 3*) est un bon exemple de système dynamique dont l'état, à un instant donné, est complètement déterminé dès que l'on connaît deux paramètres seulement : la position et la vitesse. Pour ce système, l'espace des phases est un plan où l'état du système est représenté par un point : l'abscisse est la position du pendule et l'ordonnée, sa vitesse. L'état du système évolue conformément à la relation fondamentale de la dynamique, dont l'expression mathématique est une équation différentielle, et le mouvement de va-et-vient du pendule est décrit, dans l'espace des phases, par le déplacement du point sur une courbe appelée trajectoire. Dans le cas idéal d'un



3. L'ESPACE DES PHASES sert à représenter l'évolution des systèmes dynamiques : les axes de coordonnées de cet espace correspondent aux différents degrés de liberté caractérisant les mouvements du système. Ainsi le mouvement d'un pendule (*en haut*) est complètement défini par sa position et sa vitesse initiale, et l'on représente l'état du pendule par un point d'un plan ; les coordonnées de ce point sont la vitesse et la position du pendule (*en bas*). Le mouvement de va-et-vient du pendule correspond, dans l'espace des phases, au déplacement du point représentatif de l'état, qui décrit une trajectoire dans cet espace. Pour un pendule idéal ne perdant aucune énergie sous forme de frottements, la trajectoire est une courbe fermée (*en bas à gauche*) ; pour un pendule réel, où les frottements diminuent l'amplitude des oscillations, la trajectoire est une spirale dont le point central représente la position finale du pendule (*en bas à droite*).

pendule qui oscille sans frottements, la trajectoire du pendule dans l'espace des phases est une courbe fermée, mais pour un pendule réel dont le mouvement s'amortit progressivement, la trajectoire est une spirale dont le centre représente l'état du système au moment où le pendule s'immobilise.

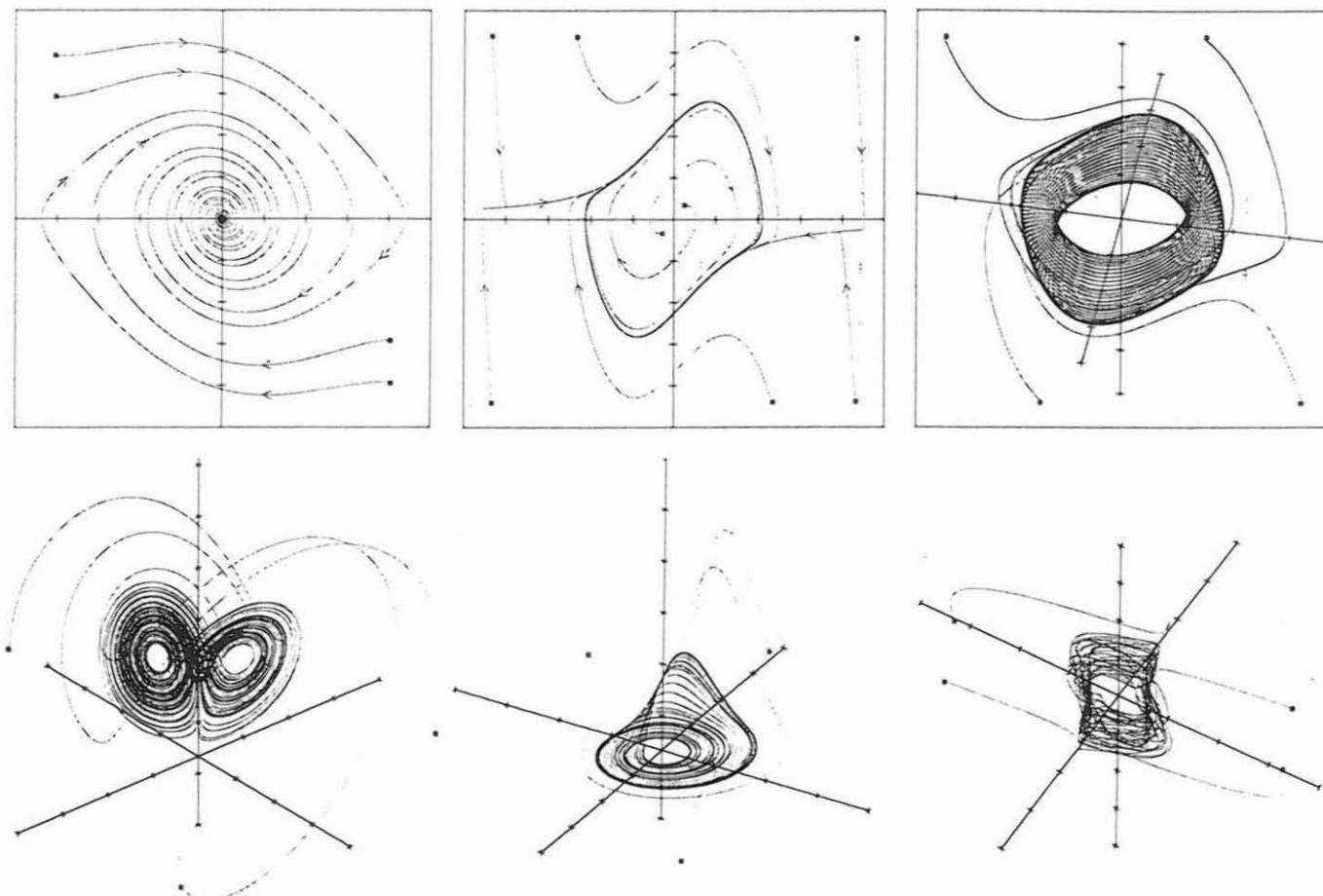
L'évolution temporelle d'un système dynamique peut être décrite par une courbe continue ou discrète, selon la nature du système. Pour le pendule, par exemple, la trajectoire est continue : le pendule passe en effet d'une position à la suivante en continu. D'autres systèmes, en revanche, évoluent de façon discontinue au cours du temps, et l'on doit notamment utiliser une représentation discrète pour décrire l'écoulement goutte à goutte de l'eau d'un robinet qui fuit ou le nombre d'insectes qui naissent

chaque année dans une région donnée.

Comment déterminer l'évolution d'un système à partir d'un état initial donné ? On peut utiliser les équations du mouvement et calculer les points successifs représentant l'état du système sur la trajectoire dans l'espace des phases ; la quantité de calculs nécessaires est alors directement proportionnelle à la durée pendant laquelle on désire suivre l'évolution du système. Certains systèmes simples, comme le pendule sans frottement, se prêtent cependant à un autre type de description, bien plus rapide : les équations du mouvement de tels systèmes ont une solution analytique, c'est-à-dire que l'on peut exprimer directement, par une formule, l'état du système à n'importe quel instant en fonction de l'état initial et du temps auquel on veut déterminer

l'état. Avec une telle solution, le calcul nécessaire pour déterminer l'état à n'importe quel instant est toujours le même et c'est ainsi, par exemple, que l'on prévoit les éclipses : il suffit de connaître les équations du mouvement des planètes et de leurs satellites pour déterminer les positions de ces objets à un instant particulier.

C'est parce que l'on avait trouvé des solutions analytiques aux problèmes de physique classique que l'on espérait qu'il en existerait pour tous les systèmes mécaniques. On sait aujourd'hui que cet espoir est vain : il n'existe pas de solution analytique aux équations du mouvement des systèmes dynamiques chaotiques et, pour ces systèmes, il n'est pas possible de faire l'économie du calcul « itératif », c'est-à-dire pas à pas.



**4. LES ATTRACTEURS** sont des formes géométriques qui caractérisent l'évolution à long terme des systèmes, dans l'espace des phases : ils correspondent schématiquement à la trajectoire que décrit le système quand il est stabilisé ou à une trajectoire limite vers laquelle la trajectoire tend. Sur cette figure, l'état initial des systèmes est représenté en rouge ; leur trajectoire, en vert, tend vers l'attracteur, représenté en bleu. L'attracteur le plus simple est le point fixe (en haut à gauche) : il correspond, par exemple, à l'évolution des pendules réels, soumis à des forces de frottement. La position d'équilibre de ce type de pendule est toujours la même : elle est indépendante de sa position et de sa vitesse initiales (voir la partie droite de la figure 3). Le cycle limite (au milieu et en haut de la figure), l'attracteur le plus simple après le point fixe, est une boucle fermée dans l'espace des phases ; il intervient dans la description des systèmes caractérisés par un

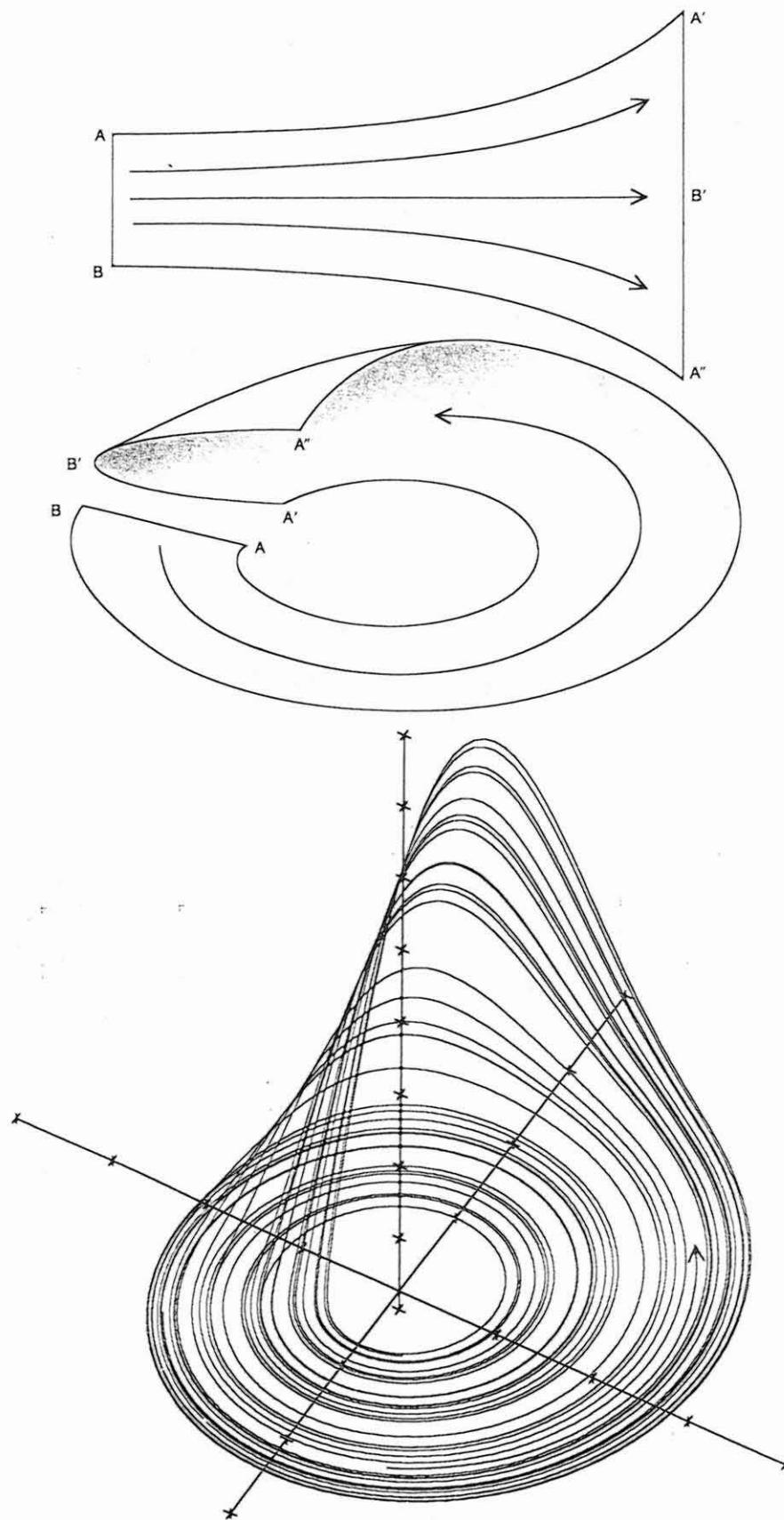
mouvement oscillatoire périodique, comme les horloges à balancier ou le cœur. Les systèmes quasi-périodiques, où le mouvement résulte de la composition de deux oscillations indépendantes, sont représentés par des attracteurs toriques (en haut à droite). Les trois attracteurs précédents correspondent aux systèmes parfaitement prévisibles : on peut en calculer l'état aussi précisément qu'on le désire. Les attracteurs étranges, en revanche, sont des objets géométriques bien plus complexes, associés à des systèmes dont l'évolution est imprévisible. Trois exemples d'attracteurs étranges apparaissent dans la partie inférieure de la figure ; ils ont été respectivement découverts par Edward Lorenz, Otto Rössler et l'un des auteurs de l'article (R. Shaw). Ces représentations correspondent à des systèmes d'équations différentielles simples pour lesquels l'espace des phases est à trois dimensions.

## Les attracteurs

L'espace des phases est un outil très efficace pour prévoir le comportement des systèmes chaotiques, car cette représentation fait apparaître le comportement des systèmes sous une forme géométrique. En ce qui concerne, par exemple, un pendule qui oscille en perdant de l'énergie, le mouvement est représenté, dans l'espace des phases, par une spirale. Quelle que soit l'énergie initialement communiquée au pendule, celui-ci finira toujours par s'arrêter, et l'on appelle « point fixe » le point final de la trajectoire dans l'espace des phases ; comme, en outre, toutes les spirales décrivant les mouvements du pendule convergent vers ce point, on dit que ce point fixe est un attracteur. Le pendule est représentatif de tout une classe de systèmes ; tous les systèmes qui évoluent vers une position d'équilibre stationnaire peuvent être représentés par un point fixe dans l'espace des phases. Plus généralement, pour tous les systèmes réels où interviennent des frottements ou des phénomènes de viscosité, la trajectoire dans l'espace des phases tend vers une petite région de dimension inférieure à celle de l'espace des phases complet, un point dans un plan par exemple ; cette région de l'espace des phases est un attracteur. Autrement dit, un attracteur est ce vers quoi tend l'état d'un système.

Certains systèmes ne s'immobilisent jamais, et leur évolution est cyclique et périodique. Par exemple, le pendule d'une horloge dont les poids seraient régulièrement remontés effectue indéfiniment le même mouvement de va-et-vient ; dans l'espace des phases, la trajectoire de tels systèmes est un cycle, c'est-à-dire une courbe fermée que le point caractérisant l'état du système décrit de façon périodique. Ainsi, pourvu que l'énergie initialement communiquée à un balancier d'horloge soit suffisante, le balancier effectue toujours, à la longue, le même mouvement ; autrement dit, dans l'espace des phases, un ensemble de trajectoires qui ne débutent pas au centre de coordonnées (le point fixe) tendent vers le même cycle ; ce dernier est un type d'attracteur particulier, appelé cycle limite. Le fonctionnement du cœur humain tend également vers un cycle limite.

Certains systèmes ont plusieurs attracteurs différents et les trajectoires sont attirées par l'un ou l'autre de ces attracteurs selon les conditions initiales ; on appelle alors bassin d'attraction d'un attracteur l'ensemble des points de l'espace des phases qui donnent une trajectoire évoluant vers l'attracteur considéré. L'espace des phases de l'horloge à balancier comporte ainsi deux bassins d'attraction : si l'on n'imprime qu'une petite poussée au balancier, il revient rapidement au repos, mais si on le pousse assez fort, c'est-à-



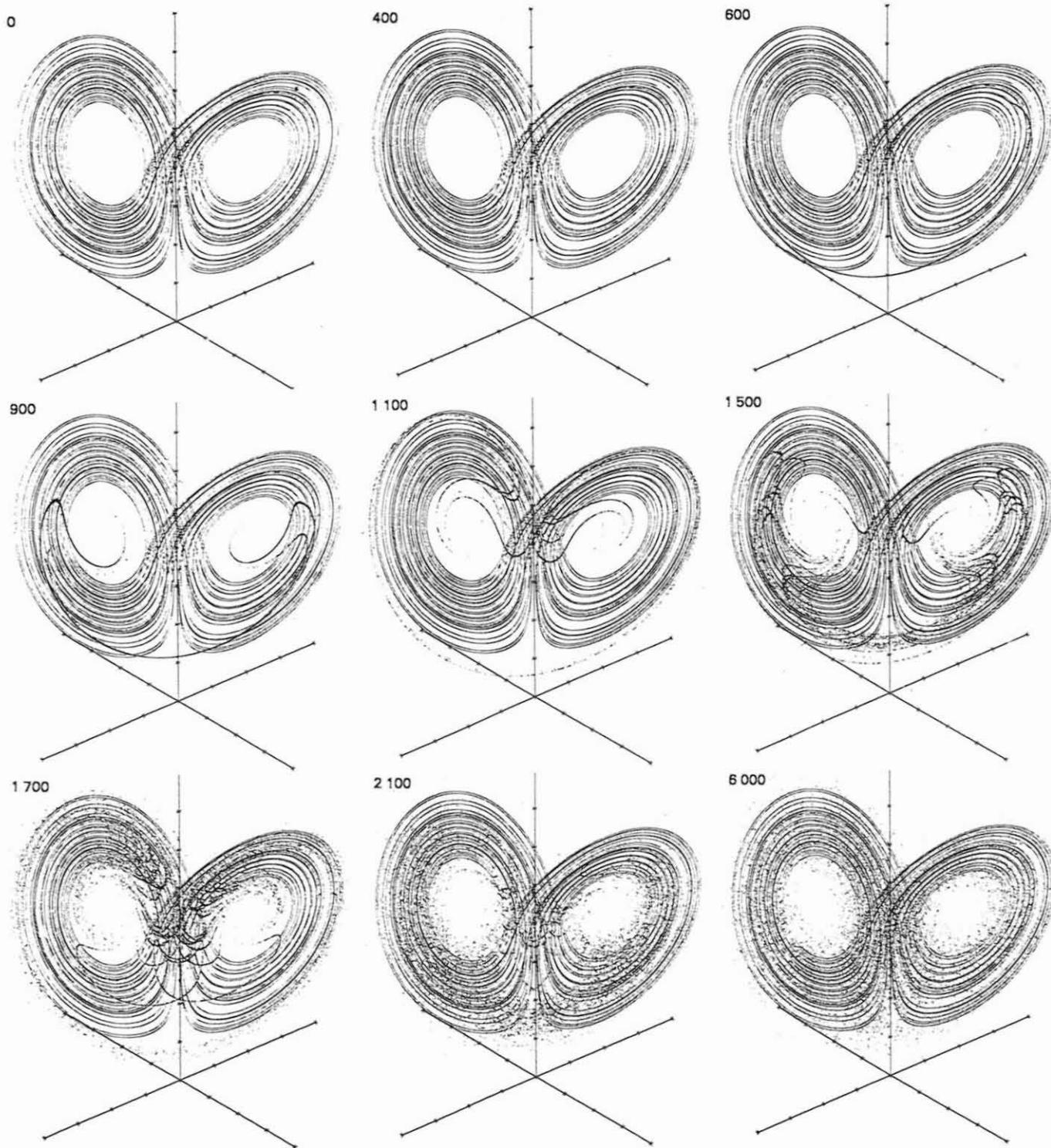
**5. LES ATTRACTEURS ÉTRANGES** sont bien plus complexes que les attracteurs prévisibles comme les points fixes, les cycles limites ou les tores. À grande échelle, un attracteur étrange n'est pas une surface lisse, mais une surface repliée plusieurs fois sur elle-même. Cette figure illustre les différentes étapes de la construction de l'attracteur étrange le plus simple : l'attracteur de Rössler (*en bas*). Dans un premier temps, les trajectoires voisines divergent de façon exponentielle, ce qui correspond à un étirement latéral (*en haut*) ; ici cette opération double presque la distance entre les trajectoires. Dans un second temps, l'objet est « replié » sur lui-même, de sorte qu'il reste limité à long terme (*au milieu*) ; ici la surface se replie sur elle-même de telle sorte que les deux extrémités coïncident. L'attracteur de Rössler représente l'évolution de systèmes très variés.

dire si on l'écarte assez de sa position d'équilibre, l'horloge se met en marche et le balancier adopte le mouvement régulier de va-et-vient.

Après le point fixe et le cycle limite,

l'attracteur le plus simple est le tore, c'est-à-dire une surface en forme de chambre à air. Ce type d'attracteur représente les mouvements résultant de deux oscillations indépendantes, que

l'on appelle parfois des mouvements quasi-périodiques (on réalise, par exemple, des systèmes présentant ce type de comportement avec des oscillateurs électriques). Quand un système possède



**6. LA DIVERGENCE** au cours du temps de trajectoires initialement voisines est à l'origine de l'imprévisibilité caractéristique des systèmes chaotiques. S'il était possible d'effectuer une mesure parfaitement précise de l'état initial d'un système, la représentation de cet état, dans l'espace des phases, serait un point, mais, en pratique, les déterminations expérimentales sont toujours entachées d'une certaine incertitude, et l'état des systèmes doit être représenté par un nuage de points d'autant plus étendu que la mesure est imprécise. Cette divergence apparaît nettement sur l'attracteur de Lorenz (figure repérée par le chiffre 0, en haut à gauche) : un nuage constitué de 1000 points représenté en rouge est si petit qu'il semble

presque ponctuel. Lorsque le système évolue et que le point représentatif de l'état du système se déplace conformément aux équations du mouvement, le nuage s'étire en un long filament très fin (figure en haut à droite) qui se replie plusieurs fois sur lui-même. Les points sont alors dispersés dans tout l'attracteur, de sorte qu'il est impossible de prévoir l'évolution du système : l'état final peut se trouver n'importe où sur l'attracteur (en bas à droite). Sur un attracteur prévisible, en revanche, tous les points du nuage restent proches les uns des autres jusqu'à l'état final. Les valeurs indiquées sur cette figure ont pour unité le deux-centième de seconde.

un attracteur torique, les trajectoires, dans l'espace des phases, s'enroulent en spirale autour du tore, et le rapport des fréquences d'oscillation détermine l'écartement des spires autour du tore. Dans les systèmes où le mouvement résulte de la combinaison de plus de deux oscillations, les attracteurs sont parfois des tores de dimension supérieure, dans des espaces de phase de dimension également supérieure.

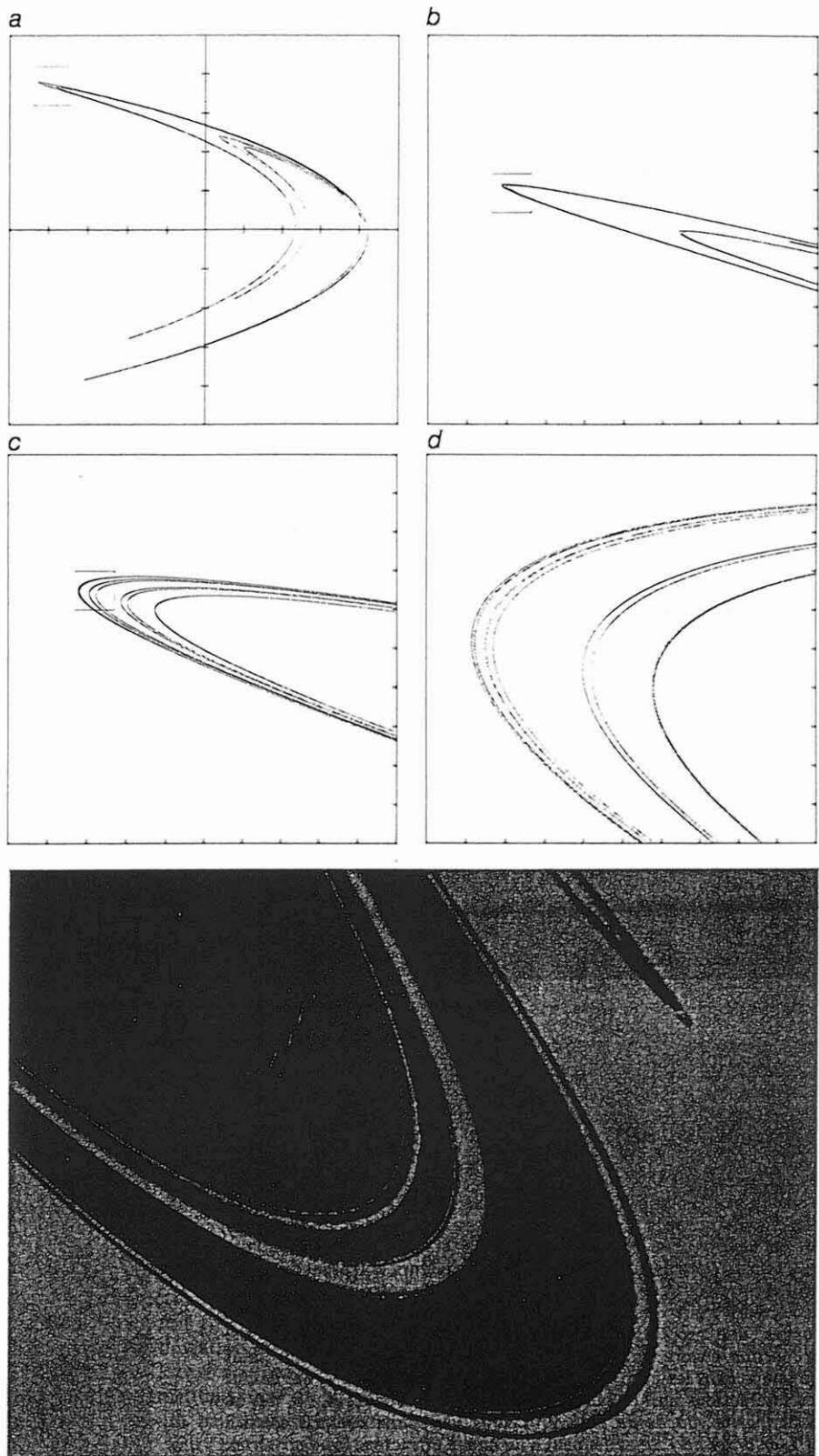
Les mouvements quasi-périodiques, bien que fort complexes, sont prévisibles : bien qu'une trajectoire puisse ne jamais se recouper — si les fréquences des deux oscillations n'ont pas de diviseur commun — le mouvement est régulier ; de plus, les trajectoires qui commencent en des points proches l'un de l'autre, sur le tore, restent indéfiniment voisines. On sait prévoir l'évolution à long terme de ces systèmes.

### Attracteurs et chaos

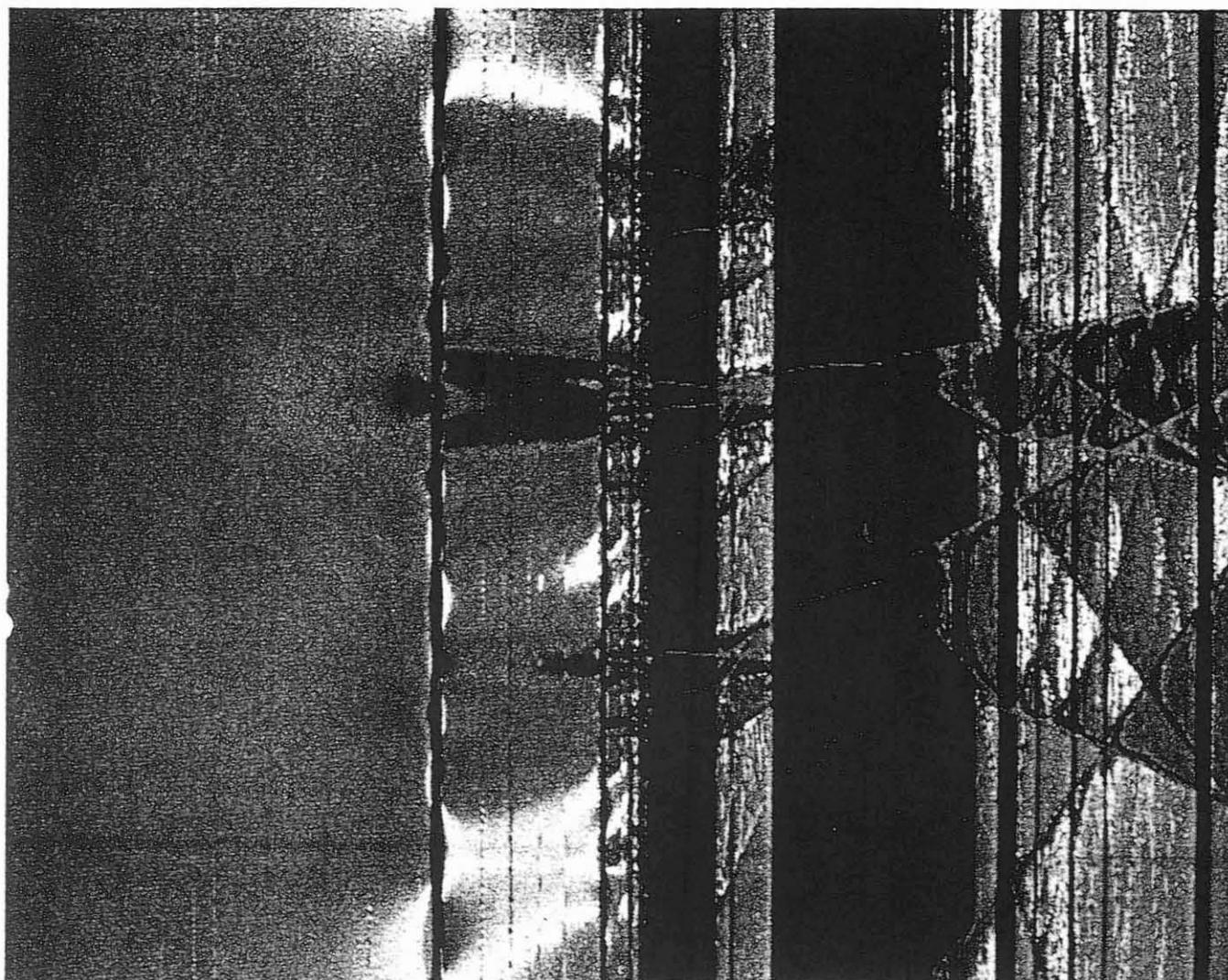
Encore récemment, les seuls attracteurs connus étaient les points fixes, les cycles limite et les tores, mais, en 1963, Edward Lorenz, de l'Institut de technologie du Massachusetts, découvrit un exemple concret d'un système à peu de dimensions présentant un comportement complexe. Cherchant à comprendre pourquoi il est si difficile de faire des prévisions météorologiques fiables, E. Lorenz avait entrepris l'analyse des équations du mouvement d'un fluide (en première approximation, l'atmosphère est un fluide) et, en simplifiant ces équations, il avait obtenu un système à trois degrés de liberté seulement. Malgré cette simplicité, le comportement du système était apparemment aléatoire et aucun des trois attracteurs connus à l'époque ne permettait de le décrire. E. Lorenz avait ainsi découvert le premier attracteur chaotique — on dit aussi attracteur étrange — auquel on a donné son nom.

En simulant l'évolution du système par ordinateur, E. Lorenz détermina l'origine du comportement aléatoire : des perturbations microscopiques étaient amplifiées et produisaient rapidement des changements macroscopiques ; deux trajectoires issues de points voisins divergeaient de façon exponentielle et ne restaient proches l'une de l'autre que pendant très peu de temps. Cette caractéristique était nouvelle, car, autour des attracteurs non chaotiques, les trajectoires voisines restent, au contraire, proches l'une de l'autre, les erreurs de faible importance restent limitées et le comportement des systèmes est prévisible.

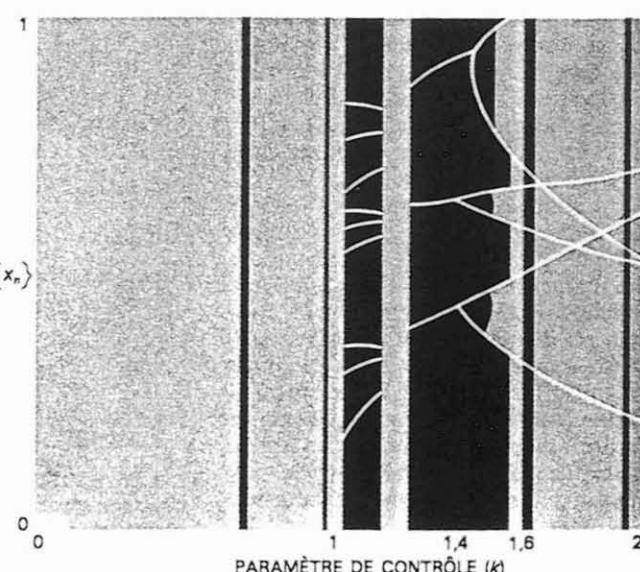
Une opération simple de repliement et d'étirement, dans l'espace de phases, permet de comprendre le principe du comportement chaotique. La divergence exponentielle des trajectoires est un phénomène local : comme les attrac-



**7. LES ATTRACTEURS ÉTRANGES** sont des fractals, c'est-à-dire des objets dont la structure apparaît d'autant plus détaillée, mais « identique », que le grossissement est plus important. Le chaos engendre naturellement des fractals, car les trajectoires initialement voisines divergent, mais se replient et se rapprochent ensuite (les caractéristiques du mouvement telles que la vitesse et la position ne peuvent prendre, en effet, que des valeurs finies). La répétition des opérations d'étirement et de repliement fait apparaître des plis à l'intérieur des plis, etc. L'attracteur étrange représenté sur cette figure a été conçu par Michel Hénon ; ce dernier a conçu un modèle, c'est-à-dire un système d'équations itératives très simple d'étirements et de repliements du plan, qui amène chaque point à une nouvelle position. Tous les points de l'attracteur (a) sont obtenus à partir d'un seul point initial auquel on a appliqué le modèle de Hénon de très nombreuses fois. Le petit carré rouge est grossi dix fois sur la figure b et la répétition de ce processus (c et d) permet de révéler la structure microscopique de l'attracteur. Un « bassin d'attraction » de l'attracteur de Hénon est représenté dans la partie inférieure de la figure.



**8. LA TRANSITION VERS LE CHAOS** est schématisée sur ce « diagramme de bifurcation » : on a porté (en ordonnée) les attracteurs d'un système en fonction d'un paramètre de contrôle  $k$  (en abscisse). Le système dynamique utilisé pour réaliser cette image est ce que l'on appelle une transformation du cercle, définie par l'équation itérative  $x_{n+1}$  égal à  $\omega + x_n + k/2\pi \sin(2\pi x_n)$ . Ce modèle permet d'étudier la transition vers le chaos d'un système caractérisé par deux fréquences dont le rapport est égal à  $\omega$ . Lorsque ce rapport est un nombre irrationnel, on obtient un diagramme du même type que celui représenté ici. Les différentes couleurs correspondent aux probabilités de répartition des points  $x_n$  entre les différents attracteurs : une forte proportion de points tombe dans les régions rouges, une proportion inférieure dans les régions vertes et une proportion encore inférieure dans les régions bleues ; aucun point ne tombe dans les parties noires. Lorsque le paramètre  $k$ , qui définit les interactions non linéaires entre les deux fréquences, est nul ou petit (*partie gauche de la figure*), tous les points compris entre 0 et 1 (en ordonnée) appartiennent à un même attracteur (*couleur verte*). Pour les valeurs de  $k$  supérieures, cette propriété n'existe plus et des points sont atteints beaucoup plus souvent que les autres (*en rouge*) ; l'attracteur est alternativement étrange et non chaotique, quand  $k$  augmente. Le diagramme montre qu'il existe deux scénarios menant au chaos (*bandes verticales noires*) : lorsque le paramètre  $k$  croît de 0 à 2 (voir le schéma de droite) : une voie quasi-périodique entre les valeurs 0 et 1 du paramètre (*la région verte de la figure supérieure*) et une voie de dédoublement de période entre les valeurs 1, 4 et 2. La voie quasi-périodique est mathématiquement équivalente à la trajectoire traversant un attracteur torique. Dans la voie de dédoublement de fréquence, associée à un cycle limite, les branches sont appariées et en nombre égal à une puissance de deux ; le dédoublement survient ici à partir de trois branches initiales. Les points successifs se placent alternativement sur les paires de branches (pour la valeur du paramètre  $k$  égale à 1,4, par exemple, les points



ne prennent que trois valeurs ; aux grandes valeurs de  $k$ , cette « orbite de période trois » se dédouble et les points se répartissent selon six valeurs, puis, après un nouveau dédoublement, les points se répartissent selon 12 valeurs, etc.). Après de nombreux dédoublements, la structure est si ramifiée qu'une bande continue apparaît : c'est le chaos.

teurs ont des dimensions finies, il est impossible que deux trajectoires divergent indéfiniment de façon exponentielle ; par conséquent, l'attracteur doit se replier sur lui-même et des trajectoires divergentes finissent toujours par se rapprocher à un moment ou à un autre. Les trajectoires qui se dirigent vers un attracteur chaotique subissent ainsi une sorte de mélange, fort semblable à celui d'un jeu de cartes que l'on bat, et ce mélange est à l'origine du caractère aléatoire des trajectoires : le processus de repliement et d'étirement se répète à l'infini et fait apparaître un nombre infini de plis imbriqués les uns dans les autres. En d'autres termes, un attracteur étrange est un fractal, c'est-à-dire un objet dont la complexité apparaît à mesure qu'on l'observe avec un grossissement croissant (*voir la figure 7*).

Le chaos mélange les trajectoires dans l'espace des phases exactement comme un boulanger pétrit sa pâte, et l'on peut se représenter le sort réservé à des trajectoires voisines, dans un attracteur étrange, en imaginant ce qui arrive à une goutte de colorant placée dans une boule de pâte que l'on pétrit : quand on aplatis la pâte pour la première fois, la goutte de colorant s'allonge ; puis, quand on replie la pâte sur elle-même, deux zones colorées se replient l'une sur l'autre. On imagine aisément le résultat final obtenu quand on répète de nombreuses fois les opérations d'étirement et de repliement : un feuilletté où alternent les couches colorées et les couches non colorées. On calcule, par exemple, qu'il suffit de répéter les deux opérations une vingtaine de fois pour que la goutte initiale s'allonge d'un facteur égal à un million et que son épaisseur soit réduite aux dimensions moléculaires ; à ce stade, on peut dire que le colorant est intimement mêlé à la pâte. Le chaos agit de façon analogue avec les trajectoires, en « pétrissant » l'espace des phases. Inspiré par cette idée de mélange, Otto Rössler, de l'Université de Tübingen, a découvert l'exemple le plus simple d'attracteur étrange décrivant l'écoulement d'un fluide (*voir la figure 5*).

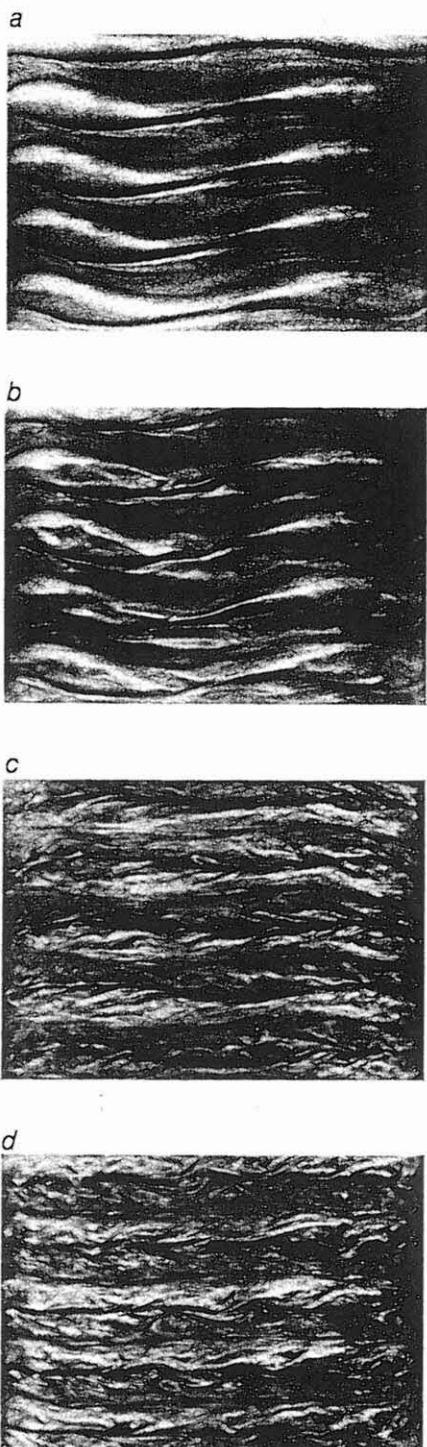
Quand on étudie un système physique, on ne peut déterminer son état avec une précision absolue, car les instruments de mesure sont toujours imparfaits. De ce fait, l'état du système ne peut être représenté par un seul point de l'espace des phases, et l'on peut seulement supposer qu'il est compris dans une petite région ; certes les dimensions minimales théoriques de cette région sont fixées par les principes d'incertitude de la théorie quantique, mais, dans la réalité, l'imprécision des mesures est supérieure à l'incertitude d'origine quantique et les dimensions de la région sont supérieures au minimum quantique. Imaginons que cette petite région soit la goutte de colorant introduite dans la pâte...

## Du microscopique au macroscopique

Quand un observateur effectue une mesure et localise l'état d'un système dans une petite région de l'espace des phases, il dispose d'une certaine quantité d'informations sur le système ; naturellement la connaissance de l'état du système est d'autant meilleure que la mesure est précise et que la région localisée dans l'espace des phases est petite. Or comme la proximité de deux points voisins est préservée lors de l'évolution d'un système non chaotique, l'information inhérente à une mesure expérimentale est préservée au cours du temps, dans ce type de système. C'est en ce sens que certains systèmes sont prévisibles : les mesures initiales effectuées sur ces systèmes renferment des informations que l'on peut utiliser pour prévoir leur évolution ou, autrement dit, les systèmes dynamiques prévisibles sont peu sensibles aux erreurs de mesure des conditions initiales.

Les opérations d'étirement et de repliement des attracteurs étranges suppriment les informations initiales et les remplacent par d'autres informations : l'opération d'étirement augmente les incertitudes à petite échelle et l'opération de repliement, en rapprochant des trajectoires initialement très éloignées l'une de l'autre, supprime toutes les informations à grande échelle. Au total, les attracteurs étranges sont comme des pompes qui « gonfleraient » les fluctuations microscopiques pour en faire des variations macroscopiques. Pourquoi n'existe-t-il pas de solution analytique aux équations des systèmes chaotiques ? Pourquoi ne peut-on utiliser de racourci afin de prévoir l'évolution de ces systèmes ? Parce qu'il suffit d'un très court laps de temps pour que l'erreur expérimentale sur la mesure initiale se répercute à tout l'attracteur ; il est impossible de prévoir quoi que ce soit, car il n'existe absolument aucun lien de cause à effet entre le passé et le futur.

Localement les attracteurs étranges jouent le rôle d'amplificateurs de bruit : une petite fluctuation résultant par exemple d'un bruit thermique entraîne rapidement une déviation importante de la trajectoire. Il existe cependant une différence fondamentale entre un attracteur étrange et un banal amplificateur de bruit : du fait de la répétition ininterrompue des opérations d'étirement et de repliement, ce sont des fluctuations d'importance minime qui dominent finalement le système tout entier, et l'évolution qualitative du système sera indépendante de l'importance du bruit. Voilà pourquoi on ne peut « calmer » directement un système chaotique en abaissant sa température, par exemple : les systèmes chaotiques engendrent leur propre bruit. Le comportement aléatoire a des causes plus profondes que la simple amplifica-



**9. CERTAINES EXPÉRIENCES** indiquent que les mouvements aléatoires, dans un écoulement hydrodynamique, peuvent être décrits par un attracteur étrange. On voit sur ces photographies les phases successives de l'instabilité de Couette. Sur cette figure, les structures sont celles de l'eau qui remplit l'espace situé entre les deux cylindres coaxiaux d'une cellule de Couette. On étudie la vitesse de l'eau en fonction de la vitesse de rotation imposée au cylindre intérieur ; à faible vitesse de rotation, l'écoulement, visualisé par des écailles de poissons en suspension dans l'eau, forme des rouleaux (a). Un accroissement de la vitesse de rotation du cylindre provoque l'apparition d'un écoulement aux caractéristiques complexes (b) ; lorsque la vitesse du cylindre continue d'augmenter, cet écoulement devient ensuite irrégulier (c), puis chaotique (d).

tion des erreurs et l'imprévisibilité : il résulte de la complexité des trajectoires engendrées par les étirements et les replis successifs.

Remarquons que les deux types de comportement, chaotique ou non chaotique, existent même dans les systèmes non dissipatifs où l'énergie est conservée. Dans ce cas, les trajectoires ne convergent pas vers des attracteurs, mais sont confinées sur des surfaces d'égale énergie. Toutefois la plupart des systèmes réels sont dissipatifs et l'on peut raisonnablement en déduire que les attracteurs joueront un rôle fondamental en physique.

### *Transition vers la turbulence et attracteurs*

La découverte des attracteurs étranges de basse dimensionnalité ouvre certainement de nouvelles perspectives en théorie des systèmes dynamiques, mais ces attracteurs permettent-ils vraiment de rendre compte du caractère aléatoire des phénomènes physiques ? C'est par une voie indirecte que l'on a supposé la présence du premier attracteur étrange en physique : en 1974, Jerry Gollub, du Collège Haverford, et Harry Swinney, de l'Université d'Austin, étudièrent le comportement d'un fluide dans ce que l'on appelle une cellule de Couette, et ils découvrirent que les mouvements aléatoires du fluide correspondaient à une trajectoire sur un attracteur étrange dans l'espace des phases ; leur observation était cependant indirecte, car ils étudiaient surtout les propriétés statistiques de l'attracteur plutôt que l'attracteur lui-même.

Une cellule de Couette est un dispositif constitué de deux cylindres concentriques ; l'espace entre les deux cylindres est rempli d'un fluide ; le cylindre intérieur est mobile autour de son axe et on peut lui conférer une vitesse de rotation constante. Expérimentalement on constate que le comportement hydrodynamique du fluide et l'évolution de ce comportement au cours du temps sont d'autant plus complexes que la vitesse de rotation du cylindre est élevée (*voir la figure 8*). Au cours de leurs expériences, J. Gollub et H. Swinney avaient surtout mesuré la vitesse du liquide en un endroit donné en fonction de la vitesse de rotation du cylindre : aux faibles vitesses de rotation, la vitesse du fluide était constante ; quand ils augmentaient la vitesse de rotation, la vitesse du fluide variait de façon périodique, et, aux vitesses de rotation très élevées, la vitesse du fluide variait de façon non périodique.

J. Gollub et H. Swinney avaient conçu leur système afin d'étudier la transition entre le moment où les variations de la vitesse du fluide sont encore périodiques et le moment où elles deviennent non périodiques, et cette

expérience devait initialement dépasser deux théories décrivant le comportement du fluide en fonction de la vitesse de rotation. Selon le modèle de Landau, l'augmentation de la vitesse de rotation du fluide devait s'accompagner de l'intervention d'un nombre croissant d'oscillations indépendantes, et l'attracteur associé devait être un tore de haute dimensionnalité. Cependant David Ruelle, de l'Institut des hautes études scientifiques, à Gif-sur-Yvette, et Floris Takens, de l'Université de Groningen, avaient contesté ce modèle et calculé que les attracteurs toriques associés au modèle de Landau avaient peu de chance d'être présents ; ils avaient, au contraire, prévu l'existence d'attracteurs étranges, comme celui qu'avait originellement proposé E. Lorenz.

J. Gollub et H. Swinney découvrirent que la vitesse du fluide était constante aux faibles vitesses de rotation : l'attracteur représentatif était un point fixe. Quand ils augmentaient la vitesse de rotation, le fluide se mettait à osciller à une fréquence bien définie, correspondant à un attracteur cyclique (et à une trajectoire périodique dans l'espace des phases), et quand la vitesse de rotation augmentait encore, deux fréquences d'oscillation indépendantes apparaissaient au sein du liquide, ce qui correspondait à leur représentation dans un attracteur torique bidimensionnel. Et aux vitesses de rotation encore supérieures ? Selon le modèle de Landau, de nouvelles oscillations auraient dû s'introduire progressivement... mais les chercheurs observèrent un phénomène complètement différent : une gamme continue de fréquences d'oscillation apparut soudainement à une vitesse critique de rotation. Cette observation était en accord avec le modèle d'écoulement « non périodique et déterministe » de D. Ruelle et F. Takens, et il semblait bien établi que la transition vers la turbulence hydrodynamique était associée à des attracteurs étranges.

### *Le robinet qui goutte*

L'expérience de J. Gollub et H. Swinney montrait que des attracteurs étranges décrivaient l'écoulement turbulent des fluides, mais elle n'était pas absolument concluante. Comment démontrer explicitement l'existence d'un attracteur étrange simple ? C'est une affaire délicate, car on n'enregistre généralement jamais tous les aspects d'un système au cours d'une expérience. J. Gollub et H. Swinney, par exemple, ne pouvaient enregistrer simultanément le mouvement du fluide dans tout le volume compris entre les deux cylindres ; ils ne déterminaient la vitesse du liquide qu'en un seul point. Comment « reconstituer » l'attracteur à partir d'un nombre limité de données expérimentales ? Quand l'attracteur est trop

complexe, par exemple, on perd trop d'information et la tâche est impossible, mais dans certains cas on peut reconstituer la dynamique du système à partir d'un nombre limité de données.

Nous avons imaginé une méthode, formalisée par F. Takens, qui permet de reconstituer un espace des phases et de découvrir des attracteurs étranges. L'idée de base est que l'évolution d'une composante d'un système dépend de ses interactions éventuelles avec les autres composantes du système ; de ce fait, l'histoire d'une composante unique contient implicitement des informations sur les composantes auxquelles on s'intéresse et, pour reconstituer un espace des phases « équivalent », il suffit d'étudier une seule composante du système dont les variations incluent l'action des autres composantes. Dans cette optique, on considère les valeurs mesurées à des intervalles de temps donnés, une seconde, deux secondes, etc. comme des dimensions nouvelles, et un point représentatif, dans l'espace des phases, à l'instant  $t$ , a alors pour composantes  $m_0, m_1, m_2, \dots$ , les différents nombres correspondant aux mesures effectuées respectivement aux instants  $t_0, t_1, t_2, \dots$

En considérant les résultats des mesures antérieures comme les valeurs de nouvelles coordonnées, on définit un point dans un espace des phases à plusieurs dimensions. On obtient alors une famille de points, dans cet espace, en répétant le procédé à partir d'un certain nombre d'instants différents et l'on vérifie (à l'aide d'une autre technique) si la famille de points que l'on a obtenue appartient à un attracteur étrange. Cette représentation est arbitraire à plus d'un titre, mais elle présente l'avantage de respecter les propriétés essentielles d'un attracteur, qui ne dépendent pas de la manière dont on effectue la reconstitution.

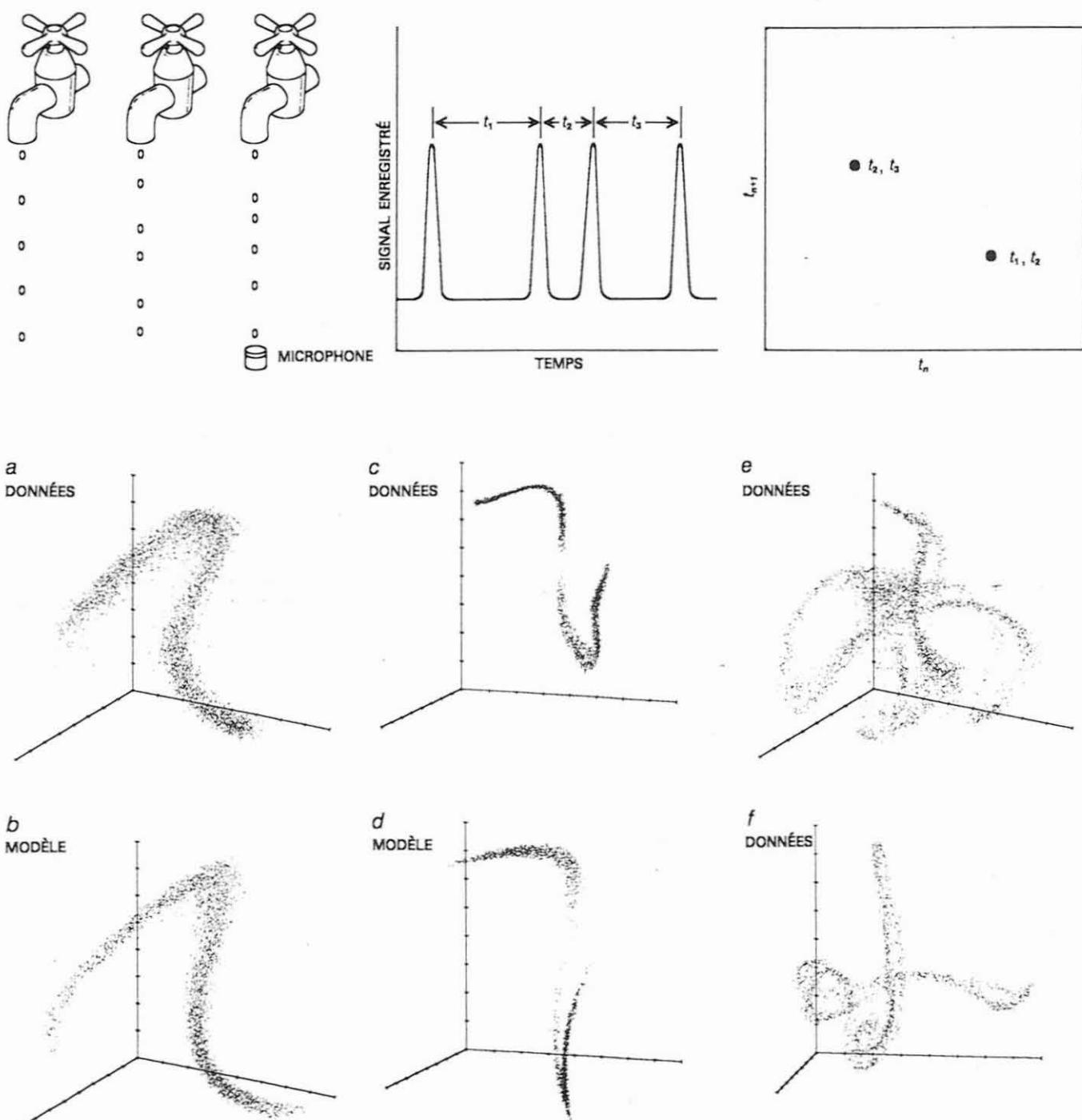
La description précédente est un peu abstraite, et nous l'illustrerons par un exemple, hélas, familier. Quiconque a subi le supplice du robinet qui fuit a sans doute remarqué que les gouttes d'eau tombent à intervalles égaux. Avez-vous cependant écouté un robinet qui laisse filtrer l'eau très lentement, goutte à goutte ? Faites l'expérience et vous découvrirez qu'il existe un débit critique, où les gouttes sont toujours distinctes, mais ne tombent plus régulièrement : leur rythme est d'une infinité variété, comme si ce rythme était joué par un percussionniste de génie (les robinets qui ne sont pas munis d'une petite grille donnent les meilleurs résultats). Le changement de rythme des gouttes qui, de régulier devient apparemment aléatoire, ressemble à la transition entre le régime laminaire et le régime turbulent de l'écoulement d'un fluide. Un attracteur étrange est-il associé à la chute aléatoire des gouttes ?

L'un d'entre nous (R. Shaw) a étudié

ce phénomène, à l'Université de Santa-Cruz, avec Peter Scott, Stephen Pope et Philip Martein. Initialement ils faisaient tomber les gouttes d'eau sur un microphone relié à un enregistreur et ils enregistraient la variation de tension électrique créée par la chute des gouttes ; ce dispositif un peu modifié donna les résultats présentés sur la

figure 9. En portant sur un graphique l'intervalle de temps séparant deux gouttes en fonction de l'intervalle de temps précédent, on obtient une coupe transversale de l'attracteur associé au système. En régime périodique, par exemple, la position du ménisque d'où se détachent les gouttes effectue un mouvement de va-et-vient très régulier

que l'on pourrait représenter par un cycle limite, dans l'espace des phases. Cependant il est impossible de déduire ce mouvement des données obtenues par l'enregistrement, celui-ci ne fournissant que les intervalles de temps séparant les gouttes. L'analyse que l'on effectue ainsi est analogue à l'analyse en lumière stroboscopique : si l'on ajuste correcte-



**10. LES ROBINETS QUI FUIENT** sont des systèmes dont le comportement peut être chaotique. On reconstruit l'attracteur associé en portant sur un graphique les durées séparant des gouttes successives. Cette méthode de reconstruction est illustrée à deux dimensions, dans la partie supérieure de la figure. Les attracteurs ainsi reconstruits, à trois dimensions cette fois, (*a* et *c*) à partir d'un robinet fuyard, sont comparables à certains attracteurs que l'on obtient en utilisant une variante du modèle de Hénon (*b* et *d*). Les représentations *e* et *f* sont obtenues à partir d'expériences où le débit de l'eau était supérieur et correspondent vraisemblable-

ment à des coupes d'attracteurs étranges. Pour tracer chacun de ces graphiques, on a utilisé la méthode de représentation suivante :  $t_n$ , l'abscisse, est l'intervalle de temps entre la goutte qui tombe au temps  $n$  et celle qui est tombée au temps  $n - 1$ ;  $t_{n+1}$ , l'ordonnée, correspond à l'intervalle de temps entre la chute de la goutte tombant au temps  $n + 1$  et la chute de la goutte tombant au temps  $n$ ; sur le troisième axe, on indique le temps  $t_{n+2}$ . Chaque point est ainsi défini par trois nombres. Sur chaque figure, on a porté 4094 points. En outre, on a simulé l'action du bruit sur les figures *b* et *d*.

## UN "EXPERT-WEKA" EN PERMANENCE A VOTRE SERVICE



**TOUTES LES UTILISATIONS PROFESSIONNELLES DE L'IBM-PC et de ses compatibles**

**NOUVEAU - 15%**

Connaissez-vous vraiment toutes les possibilités de votre IBM-PC ou compatible ? Savez-vous quels services il peut vous rendre ?

Cet ouvrage réunit, pour vous :

- des tableaux pour apprécier les performances réelles des différents matériels et périphériques, pour mieux acquérir ou développer votre système.
- des applications privilégiées de l'ordinateur personnel : traitement de texte, gestion des données, comptabilité, achat, vente, personnel, finances, stocks...
- des applications spécifiques : gestion de production, devis, échéanciers, CAO, DAO...
- des descriptions de logiciels essentiels.

1 volume à feuillets mobiles (450 pages) format 20 x 23 cm, 895 F TTC (au lieu de ~~995~~)  
Offre valable jusqu'au 31.3.87

### EXTRAITS DU SOMMAIRE

- Bureauique • Applications générales • Gestion commerciale • Développement : CAO, DAO...
- Approvisionnement, achat et gestion des stocks
- Production et fabrication • Gestion du personnel
- Gestion comptable et financière - Immobilisations
- Applications personnelles • Logiciels standards
- Équipements et systèmes • Bases de données
- Glossaire • Adresses utiles

### Une actualisation permanente

Pour vous garantir une information fiable, cet ouvrage est automatiquement actualisé 3 à 4 fois par an par des compléments et mises à jours de 180 pages environ facturés au prix de 2,50 F la page. Vous pouvez interrompre ce service à tout moment.

### Une consultation pratique et fonctionnelle

Les feuillets mobiles sont adaptés à la consultation individuelle. Plusieurs services peuvent ainsi consulter le même ouvrage. Il leur suffit de prendre les feuillets dont ils ont besoin. De plus, la photocopie est facilitée.

### La Garantie WEKA : "Satisfait ou Remboursé"

Si cet ouvrage ne répondait pas à votre attente, vous n'auriez qu'à le renvoyer sous 15 jours pour être immédiatement remboursé.

Il en est de même pour les compléments et mises à jour ; vous pouvez les retourner dans les 15 jours après réception, sans rien nous devoir, ou résilier votre service à tout moment, sur simple demande.

### BON DE COMMANDE

A retourner accompagné de votre règlement aux :

Éditions WEKA, 12 Cour St-Eloi - 75012 Paris

OUI, envoyez-moi l'ouvrage "Toutes les utilisations professionnelles de l'IBM-PC" 1 volume à feuillets mobiles (450 pages) format 20 x 23 cm, au prix de 895 Francs TTC (au lieu de ~~995~~). J'accepte de recevoir automatiquement les compléments et mises à jour de 180 pages environ au prix de 2,50 F la page. Je conserve la possibilité d'arrêter ce service à tout moment.

NOM \_\_\_\_\_ PRÉNOM \_\_\_\_\_  
FONCTION \_\_\_\_\_ ENTREPRISE \_\_\_\_\_  
N° & RUE \_\_\_\_\_  
CODE POSTAL \_\_\_\_\_ Téléphone \_\_\_\_\_  
VILLE \_\_\_\_\_  
Date \_\_\_\_\_ Signature \_\_\_\_\_

PLS 70557

ment la fréquence, un objet qui tourne paraît fixe, et l'image d'un point qui décrit un cercle est un point immobile.

L'expérience du robinet qui fuit est très intéressante, car on a ainsi démontré que des attracteurs étranges correspondent à l'écoulement des gouttes en régime non périodique. Était-ce prévisible ? Pas tout à fait, car le caractère aléatoire de l'écoulement aurait pu résulter de facteurs extérieurs, comme de petites vibrations ou des courants d'air ; il n'aurait alors existé aucune relation entre les intervalles de temps successifs, et la représentation graphique des intervalles de temps entre les gouttes successives ne serait qu'une tache informe. L'apparition d'une structure caractéristique sur le graphique des intervalles de temps est une preuve du caractère déterministe de l'écoulement des gouttes ; plus précisément, on retrouve sur la représentation graphique de plusieurs ensembles de données la structure en fer à cheval caractéristique du processus d'étirement et de repliement précédemment décrite. Cette forme caractéristique est en quelque sorte un instantané du processus de repliement et correspond à une coupe transversale partielle de l'attracteur de Rössler, représenté sur la figure 5. D'autres séries de données, plus complexes, correspondent peut-être à des coupes transversales d'attracteurs de plus grande dimension, mais on ne connaît pas encore les caractéristiques géométriques des attracteurs à plus de trois dimensions.

mesures d'entropie et de dimension ont montré que le mouvement irrégulier de l'eau, à la transition entre le régime laminaire et le régime turbulent dans la cellule de Couette, correspondait effectivement à des attracteurs étranges. Plus la vitesse de rotation du cylindre augmentait, plus l'entropie et la dimension de l'attracteur du système augmentait également. Depuis quelques années, on découvre que le comportement aléatoire de nombreux systèmes familiers est associé à des attracteurs étranges simples ; citons, par exemple, les mouvements de convection d'un liquide chauffé dans une petite enceinte, les variations de concentration en réactifs dans les réactions oscillantes, les battements du cœur et de nombreux systèmes électriques ou mécaniques.

De surcroît, on s'est aperçu que divers phénomènes, dont on avait construit des modèles informatiques, possèdent un caractère aléatoire très simple du même type : l'activité électrique d'une cellule nerveuse, les oscillations des étoiles, les épidémies. Aujourd'hui on cherche même le chaos dans les ondes émises par le cerveau, en économie, etc.

La théorie du chaos n'est pas une panacée, et certains systèmes pour lesquels le nombre de degrés de liberté est important présentent des mouvements complexes réellement aléatoires. D'autre part, le fait de savoir qu'un système donné est chaotique n'est pas nécessairement d'une valeur informative considérable : les gaz, par exemple, avec leurs molécules en collisions incessantes, présentent un comportement chaotique, mais leur évolution est imprévisible en raison du très grand nombre de molécules présentes dans tout système macroscopique. La seule description possible est de type statistique, et les propriétés que l'on dégage par cette méthode ne font pas intervenir l'attracteur associé.

Il existe enfin un certain nombre de systèmes où l'on ignore le rôle du chaos. Qu'en est-il, par exemple, des mouvements à grande échelle comme le déplacement des dunes dans le désert du Sahara, ou comme le mouvement des fluides en régime complètement turbulent ? Peut-on utiliser un attracteur unique dans un seul espace des phases pour étudier ces systèmes complexes ? On espère que l'expérience acquise par l'étude des systèmes représentés par les attracteurs les plus simples permettra d'étudier des problèmes plus complexes ; la solution de ces problèmes passera peut-être par la conception d'édifices complexes de structures déterministes mobiles, semblables aux attracteurs étranges.

L'existence du chaos remet en cause la méthode scientifique, car on teste généralement les théories en les utilisant pour faire des prévisions, puis en

confrontant ces dernières aux observations expérimentales ; or, dans le cas des phénomènes chaotiques, l'évolution à long terme est imprévisible. C'est un point dont il faut désormais tenir compte avant de se prononcer sur la validité d'une nouvelle théorie. En raison du chaos, la vérification d'une théorie devient une entreprise délicate, fondée sur l'étude de propriétés géométriques et statistiques, bien plus que sur des prévisions détaillées.

### Le chaos et la science

L'existence du chaos remet également en cause le vieux concept réductionniste qui consiste à analyser le comportement d'un système en fonction de celui des éléments qui le constituent. Cette méthode s'est imposée, en science, parce que de nombreux systèmes se comportent effectivement comme la somme de leurs constituants, mais la découverte du chaos fait comprendre qu'il existe des systèmes dont le comportement complexe résulte d'interactions non linéaires simples entre un nombre très faible de constituants.

Le rôle épistémologique du chaos est aujourd'hui critique pour de nom-

breuses disciplines scientifiques, de la physique microscopique à la modélisation du fonctionnement macroscopique d'organismes vivants. Les extraordinaires progrès récents de la science nous permettent d'acquérir une connaissance détaillée de la structure de systèmes très variés, mais pour intégrer toutes les connaissances obtenues, il nous manque un cadre conceptuel décrivant le comportement qualitatif des systèmes. Ainsi Sidney Brenner, de l'Université de Cambridge, a réalisé une carte complète du système nerveux d'un nématoïde (les nématoïdes sont des vers cylindriques au corps allongé et non segmenté), mais il est impossible d'en tirer aucune conclusion sur le comportement de cet organisme. Pour la même raison, il est illusoire de croire qu'une description détaillée des différentes forces fondamentales permettra de comprendre toute la physique. L'interaction de composants, à une échelle donnée, se traduit parfois, à l'échelle supérieure, par un comportement global complexe qu'il est impossible de prévoir à partir de la connaissance des composants individuels.

Nous sommes tentés de ne voir que les conséquences indésirables du chaos et, notamment, les limites qu'il impose

à la prévisibilité, mais la Nature utilise peut-être le chaos de façon constructive : grâce au chaos, qui amplifie des fluctuations d'importance minime, les systèmes naturels peuvent se renouveler. Pourquoi une proie n'utiliserait-elle pas une stratégie de fuite chaotique pour échapper à un prédateur ? L'effet de surprise est parfois décisif. D'autre part, la variabilité génétique est l'une des conditions nécessaires à l'évolution des organismes vivants, et le chaos, qui est un outil de structuration des changements aléatoires, met peut-être la variabilité sous le contrôle de l'Évolution.

Enfin le progrès intellectuel lui-même résulte de l'introduction de nouvelles idées, d'une part, et d'une réinterprétation des anciens concepts, d'autre part. La créativité est peut-être le résultat d'un processus chaotique amplifiant de toutes petites fluctuations inconscientes et les assemblant ensuite sous une forme macroscopique cohérente que nous appelons « pensée ». Dans certains cas, ces pensées sont des décisions, ou bien ce que nous percevons comme l'exercice de notre libre arbitre. De ce point de vue, le chaos serait alors un mécanisme nous permettant d'exercer notre libre arbitre dans un monde régi par des lois déterministes. ■

## COMMENTAIRE

Au début du siècle, le mathématicien français Poincaré fut le premier à comprendre qu'un système mécanique simple et déterministe pouvait avoir des solutions extrêmement complexes, que l'on reconnaît maintenant comme chaotiques. Toutefois ce concept a mis à peu près un demi-siècle pour être admis par la communauté scientifique internationale. Les chercheurs français ont joué un rôle important dans la divulgation et la mise en œuvre des idées de Poincaré.

Tout d'abord il a fallu comprendre que des équations différentielles très simples, mais non linéaires pouvaient avoir des solutions chaotiques. Parallèlement au système de Lorenz, le modèle de Hénon a constitué une illustration remarquable de l'existence des solutions chaotiques et de leur représentation dans l'espace des phases, « l'attracteur étrange ».

Rapidement les chercheurs ont compris que l'on pouvait trouver des solutions chaotiques dans toute une série de domaines comme la mécanique, la cinétique chimique ou l'écologie. En particulier, J.-C. Roux et C. Vidal ont été parmi les premiers à reconstruire un attracteur étrange à partir des données obtenues sur des oscillations

d'un composé chimique dans l'expérience de Belousov-Zabodinski (voir *Comment naît la turbulence*, par C. Vidal et J. Roux, *Pour la Science* n° 39).

Le chaos déterministe fut aussi rapidement pressenti comme un modèle dans la transition vers la turbulence. D. Ruelle et F. Takens ont montré les raisons pour lesquelles le modèle de Landau, examiné dans l'article, était inapplicable et ils ont suggéré de reconstruire un attracteur étrange dans des expériences d'hydrodynamique. Avant de caractériser un attracteur étrange, deux équipes françaises ont mis en évidence deux routes vers le chaos : à l'École normale supérieure, A. Libchaber et J. Maurer observaient la cascade de dédoublements de période (au cours d'expériences de convection dans l'hélium liquide), tandis que T. Bergé et M. Dubois, au Commissariat à l'énergie atomique, observaient le phénomène dit « d'intermittence ». Ce dernier scénario n'est pas examiné dans l'article, il fut prédit par les chercheurs français Y. Pomeaux et P. Manneville ; il consiste en un dérèglement intermittent d'un oscillateur, qui présente ainsi une oscillation régulière entrecoupée de bouffées chaotiques ; la durée relative

des bouffées chaotiques augmentant au fur et à mesure que le système devient plus chaotique.

Plus récemment, B. Malraison et P. Atten, P. Bergé et M. Dubois ont déterminé la dimension de l'attracteur étrange survenant dans des expériences de convection de Rayleigh-Bénard. Cette dimension est de 2,8 ; ce petit nombre infirme bien le modèle de Landau et soutient les thèses de D. Ruelle et F. Takens.

Néanmoins il faut distinguer « transition vers la turbulence » et « turbulence développée ». En effet, si on peut décrire l'expérience du robinet qui fuit par un attracteur étrange, il semble que si l'on ouvre en grand le robinet, la turbulence du jet est nettement plus complexe et la caractérisation d'un attracteur est sinon impossible, du moins sans objet dans ce cas. Le chaos déterministe est incontestablement une étape décisive dans le problème de la transition vers la turbulence et, bien qu'il ne permette pas de comprendre encore celui de la turbulence développée, il ouvre une nouvelle voie d'approche dans ce domaine.

Vincent CROQUETTE  
CNRS-CEA

## La bille qui rebondit : une expérience simple pour aborder la physique du chaos

par Pierre BOISSEL

Enseignant à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

Laboratoire de Photophysique Moléculaire

Bâtiment 213, Université Paris Sud-Orsay, 91405 Orsay Cedex

---

### RÉSUMÉ

L'étude d'un dispositif mécanique très simple, une bille rebondissant sur un plateau vibrant, permet d'illustrer de façon pédagogique et progressive les principaux concepts utilisés dans la physique des systèmes chaotiques. Cette expérience peut en outre fournir un thème de travail motivant pour des projets de travaux pratiques ou de calcul numérique sur ordinateur.

### 1. INTRODUCTION

La science du chaos est une des avancées importante de la physique actuelle. Jusqu'à ces dernières années, l'attitude habituelle du physicien obtenant un comportement erratique au cours d'une expérience était de jeter les résultats au panier en soupçonnant l'intervention d'une quelconque perturbation extérieure. Ce n'est que récemment que l'on s'est rendu compte, d'une part que des comportements chaotiques pouvaient apparaître de façon intrinsèque, même dans des systèmes comportant un petit nombre de degrés de liberté, d'autre part que l'étude de ces comportements sur des cas simples permettait de dégager des concepts utiles pour la compréhension de systèmes plus complexes.

Dans le cadre d'une série de projets de Travaux Pratiques de Licence de Physique à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), nous avions choisi d'étudier l'apparition du chaos dans un système mécanique : une bille rebondissant sur un plateau oscillant. Ce thème, prévu au départ essentiellement pour pratiquer l'acquisition et le traitement de données expérimentales sur microordinateur, s'est révélé en fait beaucoup plus riche. En effet, ce système permet d'aborder de

façon pratique les idées essentielles de la physique du chaos. De plus, en raison de particularités mathématiques sur lesquelles nous reviendrons, l'approche expérimentale peut être menée en parallèle avec une simulation purement numérique qui la complète et la prolonge.

Cet exposé ne vise pas à refaire une étude générale de la physique du chaos. Son but est plutôt d'illustrer les concepts importants (soulignés typographiquement dans le texte) par des exemples concrets pris sur l'expérience, renvoyant le lecteur aux ouvrages généraux (références [1-3] par exemple) pour une étude plus approfondie. Le détail de l'expérience et la méthode de simulation sur ordinateur sont présentés en section 2. La section 3 décrit ensuite la transition vers le chaos et le régime chaotique lui-même, en mettant l'accent sur les points qui ont un caractère d'universalité. La stabilité des différents régimes est discutée dans la section 4, d'un point de vue intuitif, puis dans une comparaison quantitative avec l'expérience. Enfin, la section 5 aborde la notion de bistabilité, une autre caractéristique fréquemment rencontrée dans les systèmes non-linéaires.

## 2. PRÉSENTATION DE L'EXPÉRIENCE

### 2.1. Dispositif expérimental

La description de l'expérience peut tenir en une phrase: il s'agit d'étudier les rebondissements d'une bille sur un plateau horizontal animé d'un mouvement alternatif dans la direction verticale. Cependant, quelques astuces techniques sont nécessaires pour que le système réel corresponde effectivement à ce modèle simple.

#### 2.1.1. Partie mécanique (Figure 1)

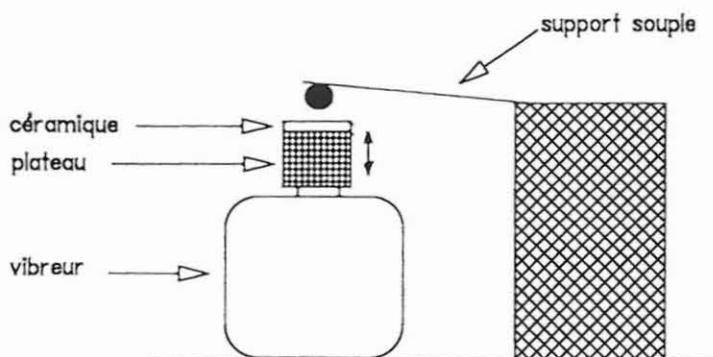


Figure 1 : Dispositif expérimental, partie mécanique.

Pour que les chocs de la bille ne perturbent pas le mouvement sinusoïdal vertical du plateau, la différence des masses doit être importante. La bille d'acier ayant une masse de l'ordre du gramme, le plateau est constitué d'un bloc de laiton d'une centaine de grammes. Il est mis en mouvement par un vibreur électromagnétique (type V 1u1 de Linear Dynamic Systems) alimenté par un générateur basse fréquence.

La détection du choc est effectué au moyen d'un disque en céramique piézoélectrique (P 1-60 de Quartz et Silice) collé sur le bloc de laiton. Le choc de la bille sur cette céramique produit une impulsion électrique permettant de déterminer l'instant et l'intensité de l'impact.

La dissipation d'énergie, indispensable pour observer correctement la transition vers le chaos, est fournie par un simple morceau d'adhésif (adhésif plastique du type isolant électrique) collé sur la céramique pour amortir le rebond de la bille.

Le point le plus délicat est la fixation de la bille. Le support souple, en papier ou en plastique, n'est pas seulement destiné à éviter de retrouver la bille sous la table. Il permet d'obtenir des conditions strictement reproductibles d'un choc à l'autre, en particulier d'avoir toujours le même point d'impact sur la céramique. En revanche, il ne doit pas intervenir dans le mouvement, ni par un effet de ressort, ni par d'éventuelles fréquences propres de vibration.

Enfin, le support de l'expérience elle-même ne doit pas être quelconque. Une table ordinaire a généralement des fréquences de résonance au voisinage de la fréquence d'excitation du vibreur ( $\sim 30$  Hz) qui peuvent perturber notablement les résultats. Une paillasse de Travaux Pratiques convient très bien. A défaut, un découplage des vibrations peut être obtenu avec un bloc de béton posé sur un feutre amortisseur.

### 2.1.2. Acquisition de données

Une fois la partie mécanique mise au point, une première approche de l'expérience consiste simplement à observer, à l'œil et à l'oreille, le mouvement de la bille pour différentes amplitudes de vibration du plateau. La deuxième étape, plus quantitative, est l'observation simultanée sur l'oscilloscope de l'impulsion correspondant à l'impact de la bille et de la tension d'alimentation du vibreur.

Cependant, l'exploitation des résultats expérimentaux peut être faite de façon plus approfondie en couplant l'expérience à un microordinateur par l'intermédiaire d'une carte d'interface multifonctions. N'importe quel type de carte, disposant de deux entrées avec convertisseur analogique-numérique, d'une entrée numérique et d'une horloge chronomètre peut convenir. Nous avons utilisé une carte PCL 712 (Advantech) ou PC-MES2.

Avant d'être exploités, les signaux électriques provenant de l'expérience doivent être mis en forme dans une interface électronique externe. Cette électronique, largement inspirée de la référence 4b, a été mise au point au cours des projets. Le schéma de principe est présenté sur la figure 2.

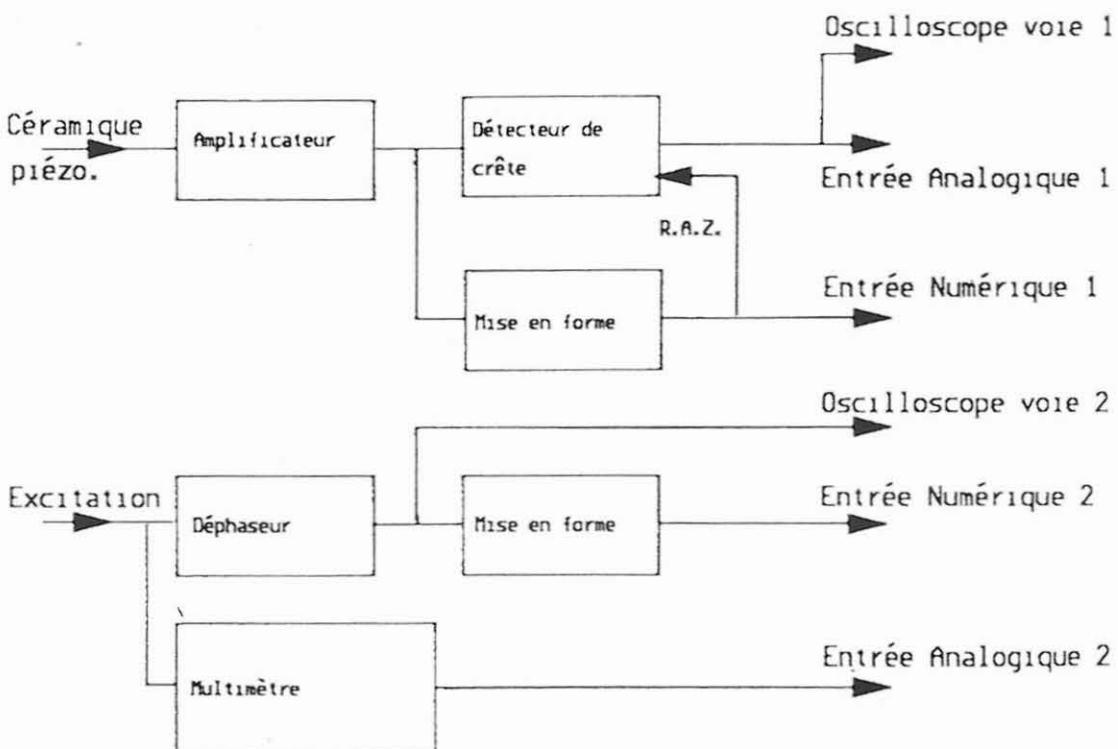


Figure 2 : Représentation schématique de l'électronique.

L'impulsion aux bornes de la céramique piézoélectrique passe tout d'abord dans un premier amplificateur permettant un découplage et une adaptation de niveau. La sortie de cet amplificateur est dirigée d'une part sur un étage détecteur de crête qui permet de garder en mémoire

la valeur maximum, d'autre part sur un circuit de mise en forme fournissant un signal rectangulaire entre 0 et 5 V, de largeur fixe. Le flanc de montée de ce signal sert à déterminer l'instant de l'impact par l'intermédiaire de l'entrée numérique de la carte d'interface. Le flanc de descente déclenche la remise à zéro du détecteur de crête après un délai suffisant pour que la conversion analogique numérique soit effectuée.

Parallèlement, une fraction de la tension d'alimentation du vibreur, après passage dans un circuit déphasageur, est transformée en signal carré (0 V-5 V) et envoyée sur un autre bit de l'entrée numérique pour être utilisée comme référence de temps. Le circuit d'entrée est destiné à compenser l'écart de phase entre la tension électrique et le mouvement. La détection des événements est effectuée par l'intermédiaire des bits de l'entrée numérique plutôt que par l'entrée analogique car l'interrogation d'un port d'entrée-sortie est beaucoup plus rapide que la conversion d'une tension analogique qui peut prendre plusieurs dizaines de microsecondes..

Enfin, l'amplitude de la tension d'alimentation est mesurée par un multimètre (Keithley 177) dont la sortie analogique est envoyée sur la deuxième entrée analogique de la carte d'interface.

## 2.2. Simulation numérique

Un système simple expérimentalement ne l'est pas forcément du point de vue du calcul. La plupart des systèmes mécaniques analogues sur lesquels on peut étudier le chaos (boussole, pendules couplés...) nécessitent l'intégration dans le temps d'équations différentielles non linéaires, ce qui ne peut se faire que numériquement, par des méthodes plus ou moins complexes, avec des problèmes de propagation d'erreurs dès que l'on veut un temps un peu long. Le point important est qu'ici, la seule équation différentielle intervenant est celle de la chute libre. La non-linéarité du problème réside uniquement dans l'intersection d'une parabole et d'une sinusoïde. Cette intersection étant le seul calcul numérique à effectuer, la simulation du mouvement peut être effectuée sans difficulté sur un microordinateur avec une très bonne précision et une grande rapidité.

La structure du calcul est relativement simple. Après le choc numéro  $n$ , la bille, arrivée avec une vitesse finale  $v_{fn}$ , repart à l'instant  $t_n$ , avec une vitesse initiale  $v_{in}$ , d'une altitude  $z_n$  qui est celle du plateau à cet instant. Elle poursuit alors sa trajectoire suivant les équations de

la chute libre, jusqu'à ce qu'elle rencontre à nouveau le plateau. L'amortissement est pris en compte par le coefficient de restitution  $\mu$  donnant le rapport entre les vitesses relatives avant et après le choc :

$$v_{in} - V(t_n) = -\mu \cdot [v_{fn} - V(t_n)] \quad \{1\}$$

$V(t_n)$  étant la vitesse du plateau à l'instant du choc  $t_n$ .

Cependant la bille ne rebondit pas toujours sur le plateau. Elle peut, par moments, atterrir dessus, rester collée un certain temps, et repartir seulement lorsque le plateau redescend assez vite pour que son accélération dépasse l'accélération de la pesanteur. Il est donc nécessaire, du point de vue de la programmation, de distinguer les périodes où la bille est en vol libre de celles où elle est collée sur le plateau, de traiter les événements de rebond et de décollage et enfin, à l'atterrissement, de fixer un seuil de vitesse en dessous duquel la bille ne rebondit plus pour éviter une série "infinie" de rebonds de hauteur décroissante.

Pour des valeurs fixées de l'amplitude du mouvement du plateau  $A_0$  et du coefficient de restitution  $\mu$  le calcul permet donc de suivre le mouvement de la bille au cours du temps à partir de conditions initiales  $v_{i1}, \tau_1$  arbitraires. On peut alors, soit laisser passer quelques rebonds pour éliminer les transitoires et étudier les trajectoires dans les différents régimes permanents (section 4), soit au contraire s'intéresser aux régimes transitoires eux-mêmes (section 5).

La simulation proprement dite est faite en extrayant du calcul les données correspondant au choc, pour différentes valeurs de l'amplitude d'excitation. La variation de cette amplitude peut être programmée (rampes, valeurs discrètes...); mais la comparaison avec l'expérience est encore plus parlante en utilisant un potentiomètre relié à l'entrée destinée aux manettes de jeu. La rotation du bouton de ce potentiomètre devient alors l'équivalent exact de la rotation du bouton de niveau du générateur B. F. .

### 2.3. Analyse des données expérimentales

Sans entrer dans le détail de leur signification pour l'instant, un simple coup d'œil aux figures 3, 5d et 6 montre un bon accord qualitatif entre les résultats expérimentaux et le calcul. Pour aller au-delà, il faut analyser la signification exacte des signaux issus de l'expérience.

Le mouvement du plateau est repéré au moyen de la tension électrique d'alimentation du vibreur. On admet que l'amplitude de ce mouvement, notée  $A_0$  et exprimée en mm dans le calcul, est proportionnelle à la tension efficace lue par le multimètre.

Le déphasage  $\tau_n$  est l'intervalle de temps entre l'instant du choc  $t_n$  et l'instant  $T_{n-1}$  où le plateau passe à son point haut après le choc  $n-1$ .  $\tau_n$  peut donc être supérieur à la période  $T$ . Expérimentalement, le déphasage entre l'excitation électrique et le mouvement n'est pas mesuré directement, l'origine de  $\tau$  est donc arbitraire, par contre la mesure du temps étant rapportée à une période, la calibration de l'axe est exacte.

L'intensité du choc se traduit expérimentalement par une impulsion de tension dont l'intégrale dans le temps est proportionnelle à la quantité de mouvement fournie à la céramique, donc à la variation de la quantité de mouvement de la bille  $M(v_{in} - v_{fn})$ . La forme temporelle de l'impulsion étant fixe, la valeur crête est une mesure de cette intégrale. La quantité équivalente au niveau du calcul est donc la différence algébrique des vitesses  $v_{in} - v_{fn}$  avec là aussi un coefficient de proportionnalité qui ne sera pas explicité.

En dehors de ces coefficients multiplicatifs et de la valeur du déphasage, le seul paramètre ajustable dans le calcul est le coefficient de restitution  $\mu$ . Une détermination expérimentale directe de ce paramètre est possible avec le même appareillage. En effet, lorsque la bille est lâchée d'une certaine hauteur au dessus du plateau immobile, la suite des intervalles de temps entre les chocs successifs décroît exponentiellement selon la loi :

$$t_{n+1} - t_n = (t_1 - t_0) \cdot \mu^n$$

Cette mesure conduit à des valeurs de  $\mu$  de l'ordre de 0.5 dépendant du type d'adhésif utilisé et du nombre d'épaisseurs. On note au passage que, contrairement à l'intuition, le coefficient de restitution augmente avec le nombre d'épaisseurs.

La fréquence utilisée tout au long de l'étude est de 30 Hz. Les variations de fréquence et d'amplitude de l'excitation se combinant au sein du paramètre sans dimensions  $A_0\omega^2/g$ , une modification de la fréquence introduit simplement une homothétie sur les valeurs de  $A_0$ , ce qui a été vérifié expérimentalement.

#### 2.4. Versions simplifiées de l'expérience

Les deux points onéreux du montage, en dehors de l'ordinateur, sont le vibreur ( $\approx 4\ 000$  F) et la carte d'interface ( $\approx 3\ 000$  F). Sur le premier point, dans une version simplifiée de l'expérience, il doit être possible d'utiliser une masse moins importante, qui pourrait alors être mise en mouvement par un simple haut-parleur. L'accord quantitatif avec le modèle serait sans doute moins bon mais le comportement qualitatif doit être très semblable. Par ailleurs, la détection du choc peut être faite au moyen des pastilles de céramiques piézoélectriques utilisées pour la sonnerie dans toutes les montres à quartz.

En ce qui concerne la carte d'interface, une grande partie des résultats peuvent être obtenus sans couplage à l'ordinateur. En effet, les mesures de temps peuvent être faites point par point sur l'écran de l'oscilloscope. Le début du diagramme de bifurcations (partie 3.1) peut être obtenu de cette façon.

En se limitant toujours aux mesures de temps, l'interface parallèle dont disposent tous les micro-ordinateurs (communication avec l'imprimante) permet de disposer d'une ligne d'entrée numérique (indication de fin de papier). Moyennant une mise en forme du signal de la céramique, il est possible de mesurer avec cette entrée unique l'écart entre chocs successifs. On peut alors obtenir une représentation de l'attracteur en portant l'écart  $t_{n+1} - t_n$  en fonction de  $t_n - t_{n-1}$  (voir références [1-3]).

### 3. LE CHAOS

Lorsqu'on pense au système dans l'abstrait, on imagine en général que la bille va rebondir régulièrement une fois par période lorsque le plateau remonte, comme une balle que l'on fait rebondir sur une raquette. Ce régime de fonctionnement est effectivement obtenu dans certaines conditions, mais si l'amplitude du mouvement du plateau ( $A_0$ ) est trop grande, le mouvement de la bille peut devenir complètement désordonné.

#### 3.1. Transition vers le chaos, la cascade de bifurcations

Pour étudier la façon dont le système va passer du régime de fonctionnement simple au régime chaotique, nous allons suivre l'évolution de l'une des grandeurs caractérisant le choc, l'instant du choc (la phase),  $\tau_n$  avec l'amplitude d'excitation  $A_0$ . Si la fréquence est

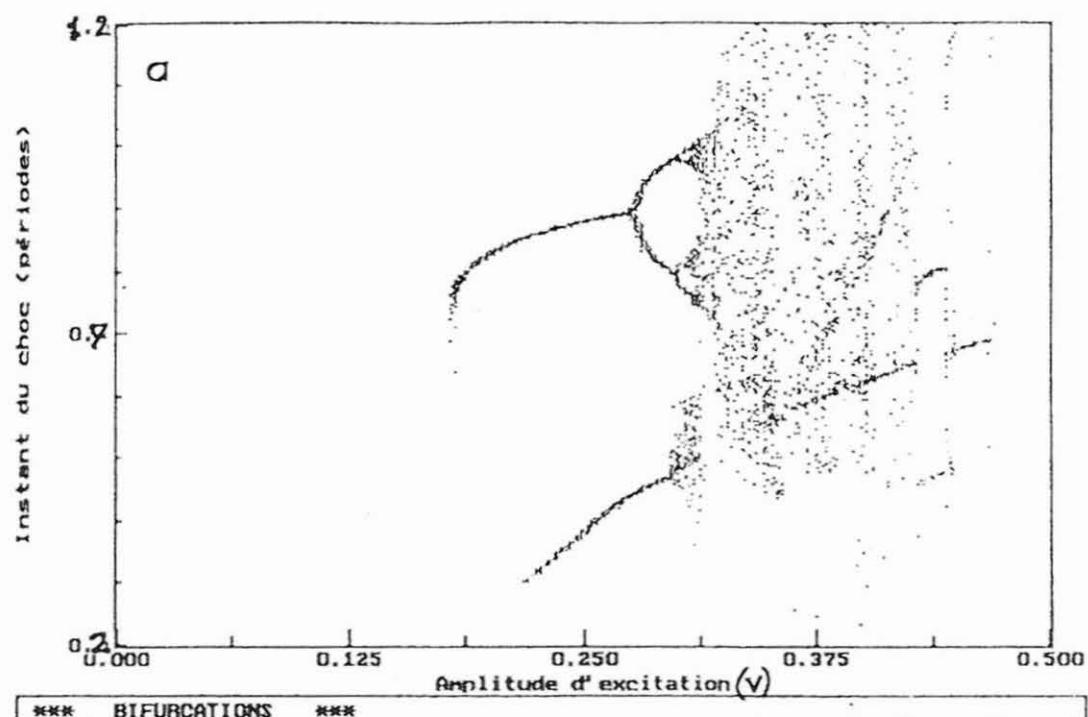
maintenue constante, cette amplitude, réglable par la tension envoyée sur le vibreur, est le seul paramètre qui détermine le régime de fonctionnement, c'est ce qu'on appelle le paramètre de contrôle.

La figure 3 présente les résultats de cette étude. résultats expérimentaux (3a) et résultats du calcul (3b). Nous ne nous intéresserons pas, pour l'instant à la partie inférieure de ces figures ( $\tau/T < 0.6$ ) qui sera étudiée dans la section 5. En ce qui concerne la branche supérieure, la partie gauche, pour des valeurs expérimentales de  $A_0$  comprises entre 0.18 et 0.27 V (0.27 et 0.40 mm par le calcul), correspond au régime du rebond simple : pour une valeur donnée de  $A_0$ , le choc a lieu toujours au même instant  $\tau_n$ . Les trajectoires de la bille et du plateau, calculées pour une valeur de  $A_0$  de 0.38 mm, sont représentées sur la figure 4a. Le mouvement de la bille est périodique, avec la même période que l'excitation. Au dessous d'une amplitude critique  $A_c$  (0.18 V ou 0.27 mm), le mouvement du plateau n'est plus suffisant pour entretenir les rebonds et la bille retombe..

Plus intéressante est la limite de ce régime dans l'autre sens : au delà de 0.27 V (0.40 mm), deux instants d'impacts différents apparaissent. L'analyse des trajectoires calculées pour  $A_0 = 0.42$  mm (figure 4b) montre que la bille rebondit alternativement, une fois plus haut, une fois plus bas et qu'elle arrive tantôt près du sommet de la sinusoïde, tantôt plus en avance. Le mouvement de la bille reste périodique, mais il faut attendre deux périodes de l'excitation pour retrouver la même trajectoire : c'est le *doublement de période*. Expérimentalement, en dehors de la représentation un peu abstraite de la figure 3, ce changement de régime est observé de façon plus directe : à l'oreille, on constate une modification du rythme des chocs ; sur l'écran de l'oscilloscope, les instants de l'impact sont alternativement décalés par rapport à la sinusoïde de la tension d'alimentation.

Cette transition est réversible : en diminuant l'amplitude, on retrouve le régime périodique simple. Si les variations sont très lentes, le seuil d'apparition et de disparition du doublement de période est tout à fait reproductible. Pour des variations plus rapides, on peut observer un régime transitoire. Ce point sera approfondi dans la section 4.

Lorsque l'amplitude continue à augmenter, un nouveau seuil apparaît, au-delà duquel on obtient quatre points d'impact. Sur la figure 4c, la trajectoire correspondante ( $A_0 = 0.444$  mm) ressemble à la précédente, avec de grands sauts et de petits sauts, mais, en regardant



a - Expérimental.

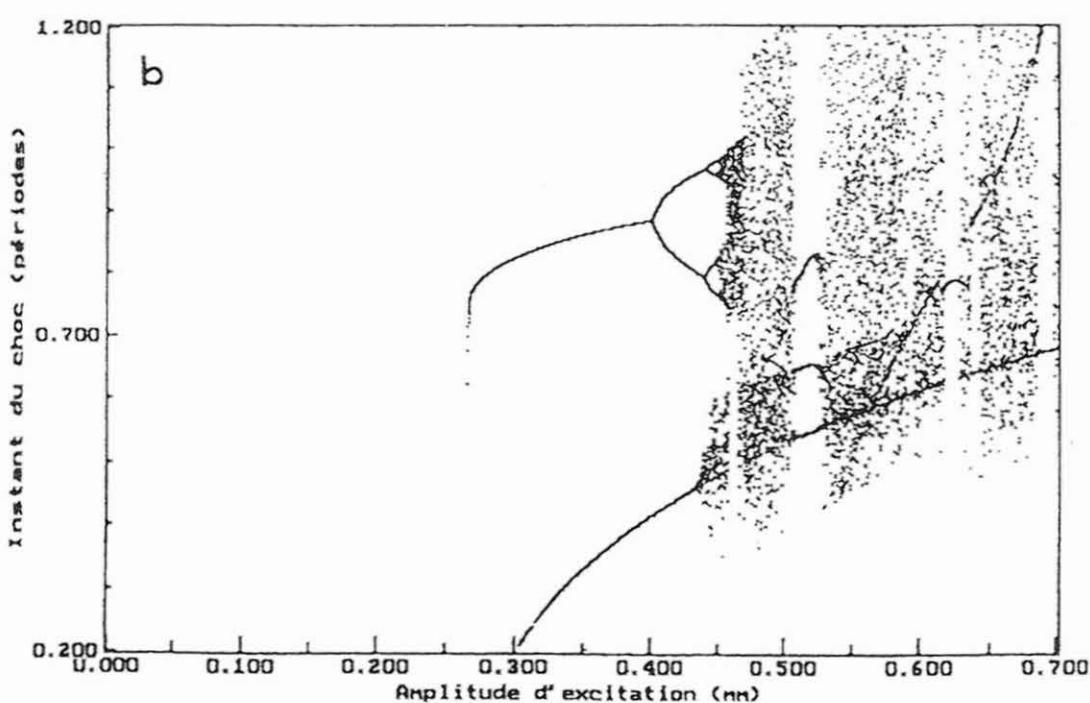
b - Simulation numérique ( $\mu = 0.53$ ).

Figure 3 : Diagramme de bifurcation.

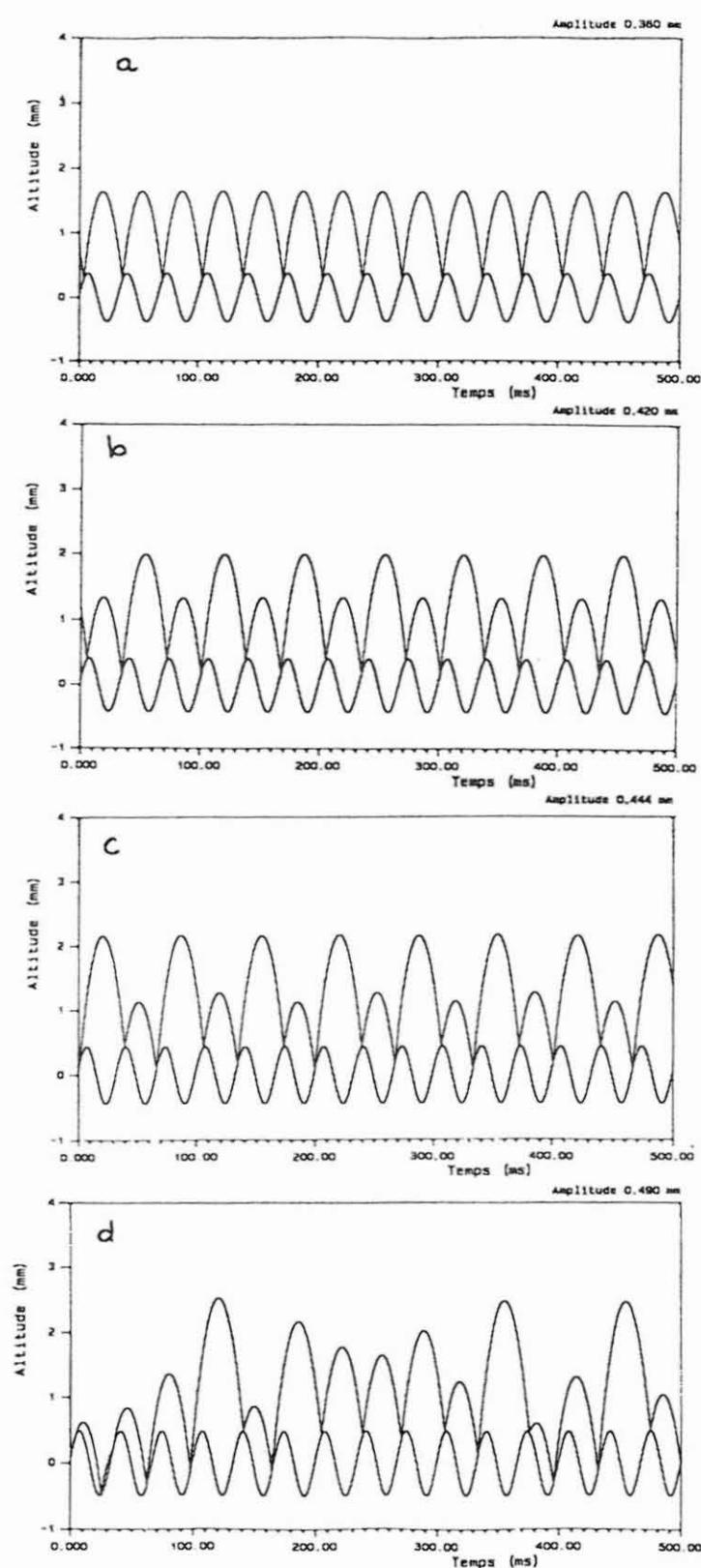


Figure 4 : Trajectoires de la bille et du plateau pour différentes valeurs de l'amplitude  $A_0$  ( $\mu = 0.53$ ).

de plus près, on constate que les petits sauts sont eux-même alternativement plus grands et plus petits et qu'il faut maintenant attendre quatre périodes pour retrouver le même comportement. Il y a *quadruplement de période*.

Le phénomène continue ensuite : les quatres branches se subdivisent pour donner la période 8 puis 16 et ainsi de suite à l'infini c'est la *cascade de bifurcations*. Expérimentalement, le bruit électronique et la résolution limitée du convertisseur rendent difficile l'observation au delà du quadruplement, mais sur la simulation. on peut suivre la cascade aussi loin que la précision des calculs le permet.

Le point important est que cette cascade de bifurcations a un caractère tout à fait universel. C'est une des façons de passer de l'ordre au chaos que l'on peut retrouver sur des systèmes aussi différents qu'un oscillateur électronique [5], les oscillations acoustiques entretenues dans une clarinette [6] ou la simulation de l'évolution d'une population [2]...

Cette universalité n'est pas seulement qualitative : en appelant  $A_q$  le seuil d'apparition de la bifurcation d'ordre  $q$ , on peut calculer le rapport :

$$\delta = \frac{A_{q+1} - A_q}{A_q - A_{q-1}}$$

Ce rapport tend vers un nombre  $\delta = 1/4.6692016\dots$ , aussi universel que  $\pi$  ou  $e$ , indépendant du système physique (ou purement mathématique) étudié.

### 3.2 Le régime chaotique, l'attracteur étrange

La cascade de bifurcation est donc en principe infinie, mais la suite  $A_q$  des valeurs critiques du paramètre de contrôle converge vers une valeur finie  $A_\infty$ . Pour une valeur de  $A_0$  supérieure à  $A_\infty$ , on entre dans le régime chaotique. Le mouvement de la bille devient complètement désordonné. Le calcul des trajectoires montre une succession de sauts irréguliers (figure 4d).

Pour étudier ce régime, la représentation adoptée pour le diagramme de bifurcations n'est plus adaptée puisque, pour une valeur de  $A_0$ , on ne voit plus qu'une succession de points sur une verticale, qui finissent par couvrir peu à peu toute la ligne. On va donc porter, pour une amplitude donnée, deux grandeurs caractérisant le choc: toujours l'instant  $\tau_n$ , mais cette fois en fonction de l'intensité du choc  $I_n$ .  $I_n$  est l'amplitude de l'impulsion électrique sur la céramique pour le diagramme expérimental, la différence des vitesses  $v_{in} - v_{fn}$  pour le calcul. En termes savants cette représentation est une *section de Poincaré de l'espace des phases* (voir annexe 1).

Pour le régime périodique simple, cette section se réduit à un point (figure 5a), les valeurs de  $\tau_n$  et  $I_n$  étant identiques à chaque choc. Pour le doublement et le quadruplement, on obtient deux, puis quatre points (figure 5b, c), on peut suivre ainsi la cascade de bifurcations.

Lorsque le régime est chaotique, on voit apparaître progressivement un nuage de points (figure 5d). Alors que, pour une valeur fixée de  $A_0$  dans la cascade de bifurcations le nombre de points était fixe, ici, tant que l'on n'est pas limité par la résolution de l'affichage, de nouveaux points apparaissent sans cesse, chaque impact ayant des caractéristiques différentes de tous les précédents. Ce nuage de points n'est pourtant pas quelconque, il reste limité dans une région du plan et possède un certain nombre de propriétés caractéristiques. Ce nuage est une section de Poincaré de l'*attracteur étrange*. La figure 6 montre l'attracteur obtenu expérimentalement. On constate là encore que l'accord est bon, tant pour la forme générale que pour les détails. L'attracteur expérimental est cependant un peu plus étalé.

Sur les figures 5d et 6 apparaît l'aspect feuilleté qui est une des caractéristiques de l'attracteur étrange. Cette caractéristique s'accompagne d'une propriété curieuse : à n'importe quelle échelle d'observation l'attracteur conserve la même structure, chaque branche se divisant en deux à l'infini, c'est l'*autosimilarité*. Cette propriété apparaît nettement sur la figure 7, calculée, qui n'est pas entachée du bruit expérimental. D'autres propriétés intéressantes, comme la dimension fractionnaire liée à la nature fractale peuvent être étudiées, on se reportera pour cela aux références [1-3].

### 3.3. Le cœur du problème : déterminisme et imprédicibilité

Les aspects mathématiques inhabituels rencontrés dans l'étude de l'attracteur étrange intéresseront surtout le scientifique. Cependant, un

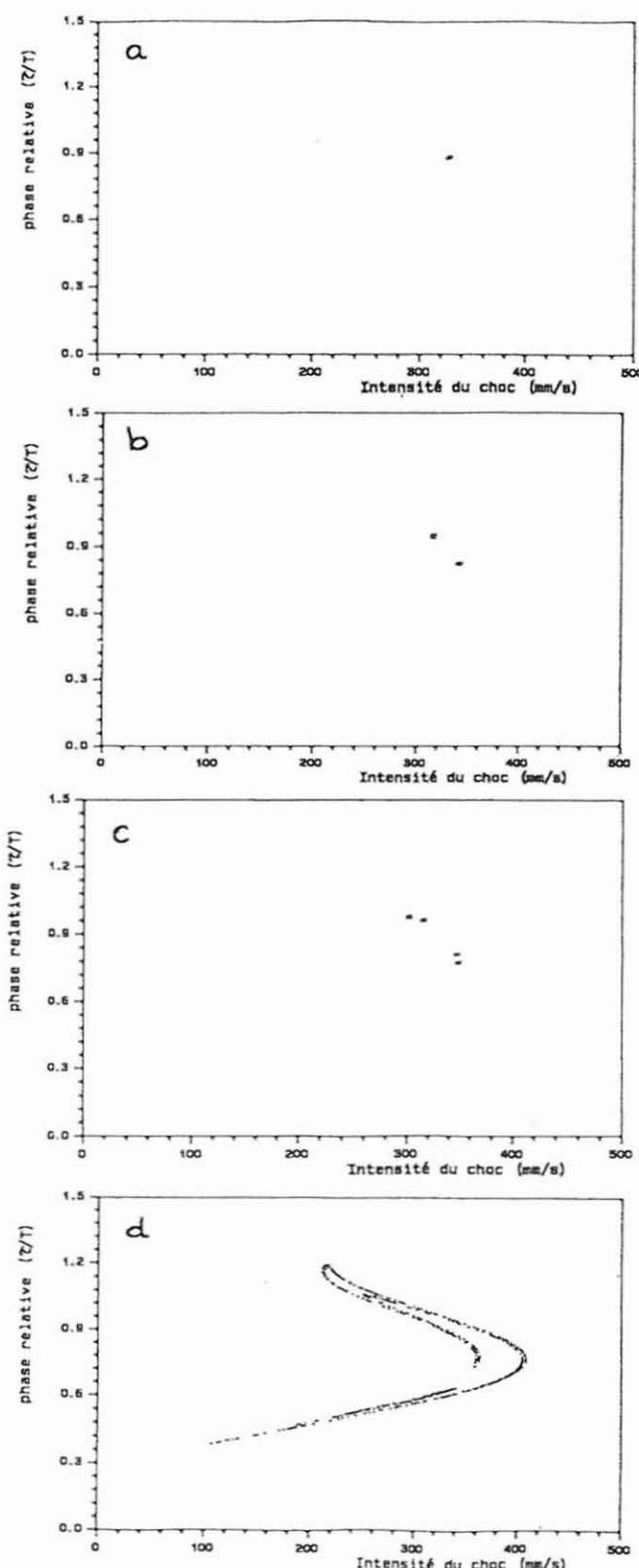


Figure 5 : Sections de Poincaré des trajectoires de la figure 4. Les points ont été grossi pour les sections a, b et c ( $\mu = 0.53$ ).

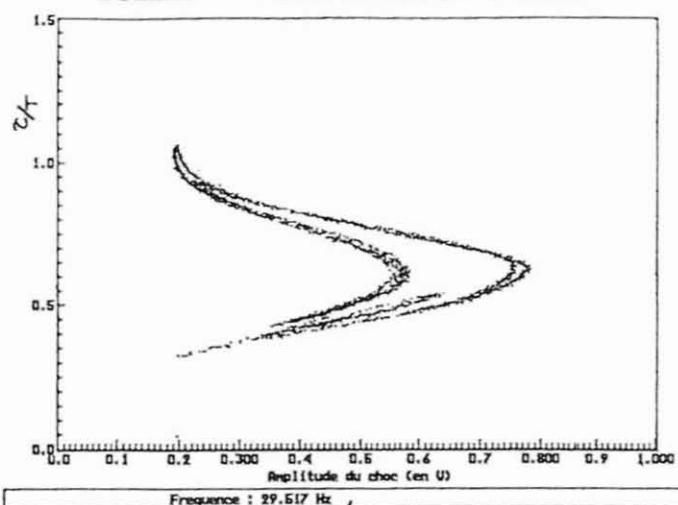


Figure 6 : Sections de Poincaré de l'attracteur étrange, résultat expérimental.

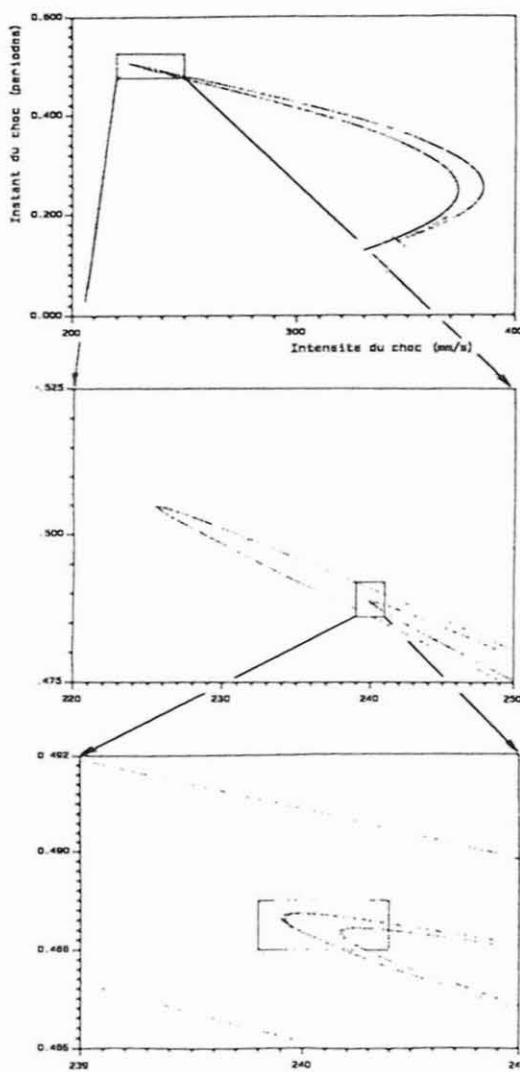


Figure 7 : Agrandissements successifs d'une section de l'attracteur étrange. Simulation numérique ( $\mu = 0.25$ ,  $A_0 = 0.73$  mm).

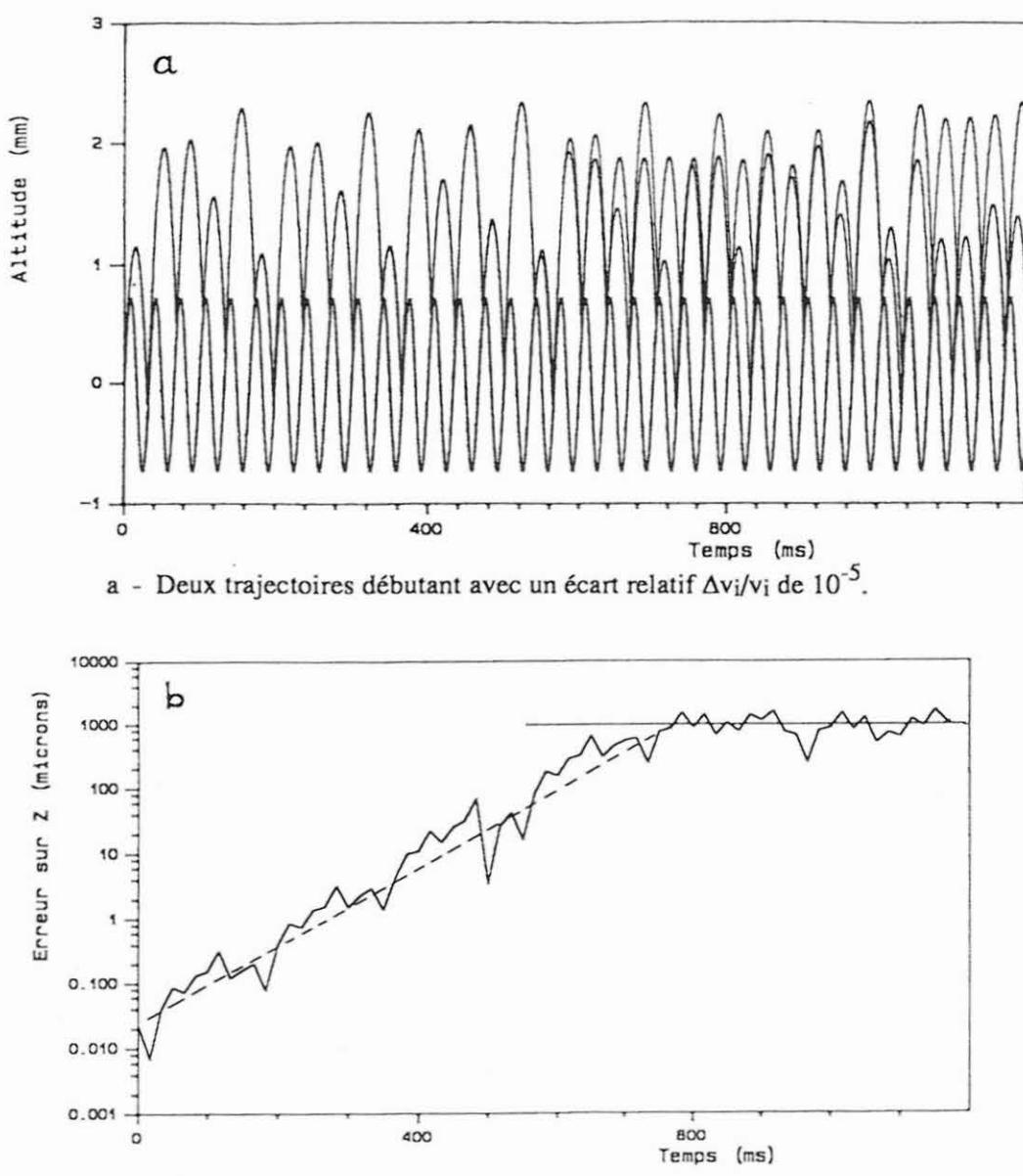
autre point qui peut être abordé avec ce système a une portée beaucoup plus générale puisqu'il s'agit du problème du déterminisme.

La question est de savoir si, à partir de mesures effectuées à un instant donné, il est possible de prédire le comportement de la bille à n'importe quel instant dans l'avenir. En théorie, la réponse semble être oui. De fait, au niveau du calcul, pour des conditions initiales (vitesse et position de la bille) fixées à un instant donné, la trajectoire est entièrement déterminée. Le système est bien *déterministe*. Mais avec quelle précision peut-on fixer les conditions initiales ? La figure 8a montre la comparaison de deux trajectoires en régime chaotique, commencées apparemment dans les mêmes conditions, mais avec un écart relatif de  $10^{-5}$  sur les vitesses initiales. Pendant une quinzaine de rebonds, les trajectoires sont confondues, puis elles se séparent très rapidement et n'ont plus rien en commun après une vingtaine de rebonds. Si l'écart initial avait été plus faible, les trajectoires auraient été confondues un peu plus longtemps mais le résultat final aurait été le même, on constate là la *sensibilité aux conditions initiales*.

Le problème apparaît plus nettement encore sur la figure 8b où l'on a porté, en ordonnées logarithmiques, l'écart sur l'altitude à l'instant du choc. L'écart initial, d'une fraction de micron, croît inexorablement avec le temps. L'obtention d'une droite sur la première partie de la figure montre que la divergence des trajectoires est une *divergence exponentielle* ce qui est aussi une caractéristique générale des systèmes chaotiques. La croissance s'arrête seulement lorsque l'écart devient de l'ordre du mm, c'est à dire de l'ordre de grandeur du mouvement de la bille.

Ainsi, à une précision donnée sur les conditions initiales, correspond un *horizon de prédictibilité*, temps au delà duquel l'incertitude sur la prédiction du mouvement devient de l'ordre de grandeur du mouvement lui-même. Pour repousser plus loin cet horizon, il faut connaître avec une précision plus grande les conditions initiales. Mais, celles-ci ne pouvant être précisées au-delà de l'échelle atomique et des limitations de la mécanique quantique (principe d'incertitude), l'horizon de prédiction sera toujours limité.

Pour illustrer ce phénomène de sensibilité aux conditions initiales dans la vie courante, on prend souvent l'exemple des prévisions météorologiques : les progrès dans le nombre de jours de prévision suivent les progrès dans la précision et surtout le nombre de points de



b - Écarts en z au moment des chocs pour ces deux trajectoires.

Figure 8 : Sensibilité aux conditions initiales.

mesures atmosphériques sur l'ensemble du globe. Mais, dans ce cas, le problème étant beaucoup plus complexe, la limitation tient aussi au volume du calcul nécessaire. Le cas de la bille fait mieux apparaître le caractère fondamental de l'imprédictibilité à long terme.

#### 3.4. Fenêtres d'ordre dans le chaos

On peut remarquer sur la figure 3 que dans la zone correspondant aux régimes chaotiques l'accord expérience-simulation est moins bon.

Comme on vient de le voir, le comportement de la bille est alors très sensible aux faibles perturbations. Les imperfections de l'expérience ont donc une influence plus grande. Un point critique à ce point de vue est la stabilité en amplitude du générateur.

Malgré ce brouillage, la figure 3a laisse cependant entrevoir une particularité, plus apparente sur la figure 3b : au cœur de la zone chaotique, une certaine régularité se manifeste par l'apparition de traits sous-jacents au nuage de points. Sur les attracteurs, cette régularité se traduit par des accumulations de points : certains types de chocs sont beaucoup plus fréquents que les autres. Le point surprenant est que, pour certains domaines de valeurs du paramètre de contrôle, on obtient à nouveau un régime strictement périodique, centré sur ces points d'accumulation. On peut observer une telle *fenêtre d'ordre* pour les valeurs de  $A_0$  autour de 0.52mm. La zone correspondante est brouillée dans le diagramme expérimental mais la régularité s'entend très bien à l'oreille. Une deuxième fenêtre apparaît, cette fois dans les deux diagrammes, pour  $A_0 \sim 0.44$  V (0.62 mm).

L'existence de fenêtres d'ordre dans le chaos est encore un phénomène assez général, commun à tous les systèmes non-linéaires. Cependant, ces fenêtres sont généralement très étroites et difficilement visibles. L'existence, ici, d'une grande plage de variation du paramètre de contrôle peut s'expliquer en observant la trajectoire. La figure 9 représente cette trajectoire en régime permanent, calculée pour une valeur de  $A_0$  de 0.515 mm. La période de base du mouvement est 5T. Le point important est que, après le saut le plus élevé, la bille tombant sur le plateau au moment où celui-ci descend, les rebonds suivants sont amortis très vite et la bille finit par rester sur le plateau, en suivant le mouvement de celui-ci. Après un nouveau décollage, ayant perdu la mémoire des rebonds antérieurs, la trajectoire recommence avec des conditions initiales identiques.

Dans le cas général, la fenêtre d'ordre retourne au régime chaotique par la même cascade de bifurcations sous-harmoniques. Ici, en étudiant en détail la zone concernée, on peut effectivement mettre en évidence un doublement de période pour  $A_0 = 0.52365$  mm.

#### 4. ANALYSE DE STABILITÉ, RÉGIMES TRANSITOIRES

En dehors de l'étude expérimentale et du calcul purement numérique, une autre façon d'aborder le système est de chercher, directement

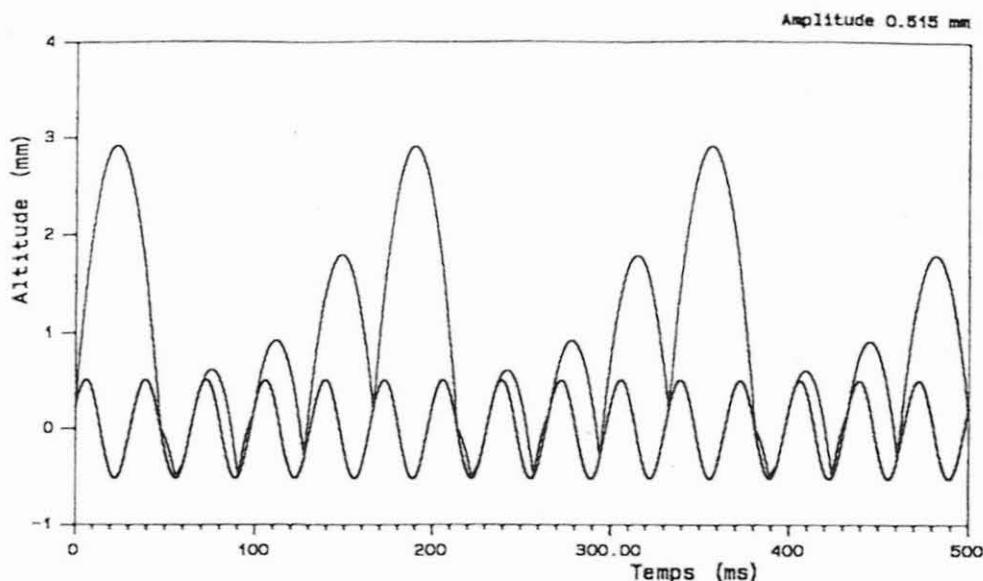


Figure 9 : Trajectoire de période  $5T$  correspondant à une fenêtre d'ordre dans le chaos ( $\mu = 0.53$ ,  $A = 0.515$  mm).

à partir des équations du mouvement, quels sont les régimes de fonctionnements possibles et quels sont les critères de stabilité de ces régimes.

#### 4.1. Recherche des régimes périodiques

Le mouvement vertical du plateau.  $Z(t) = A_0 \cos(\omega t)$ , fixe le repère temporel. Dans le cas d'un régime de rebond périodique, les conditions initiales de la trajectoire libre de la bille sont les mêmes après chaque choc. En particulier, la hauteur du plateau  $Z_n = Z(\tau_n)$  étant invariante, la vitesse finale  $v_{fn}$  doit être l'opposée de la vitesse initiale :

$$v_{in} = -v_{fn} = v_P = gT/2 \quad \{2\}$$

$g$  étant l'accélération de la pesanteur et  $T = 2\pi/\omega$  la période de vibration, l'indice  $P$  caractérisant les grandeurs en régime périodique. Cette équation, combinée à l'équation du choc {1}, donne une condition sur la vitesse du plateau à l'instant  $t_n$  :

$$V(t_n) = v_P \frac{1-\mu}{1+\mu} \quad \{3\}$$

Ceci impose une relation entre  $A_0$  et  $\tau_p$ ,  $\tau_p$  étant la phase commune à tous les chocs :

$$A_0 \omega \cdot \sin(\omega \tau_p) = -v_p \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu} = -\frac{gT}{2} \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu} \quad \{4\}$$

ce qui, en introduisant l'amplitude critique  $A_c = \frac{gT}{2\omega} \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu}$  s'écrit :

$$A_0 = -A_c / \sin(\omega \tau_p) \quad \{5\}$$

La courbe correspondant à cette relation est tracée sur la figure 10, superposée au diagramme de bifurcations calculé pour les mêmes valeurs de  $\mu$  et de la période  $T$ . Cette courbe décrit bien l'ensemble du régime de période simple, mais elle se poursuit au delà par des branches qui ne sont pas observées, ni expérimentalement, ni dans les résultats du calcul numérique. Il faut donc rechercher dans les critères de stabilité pourquoi ces branches ne sont pas obtenues.

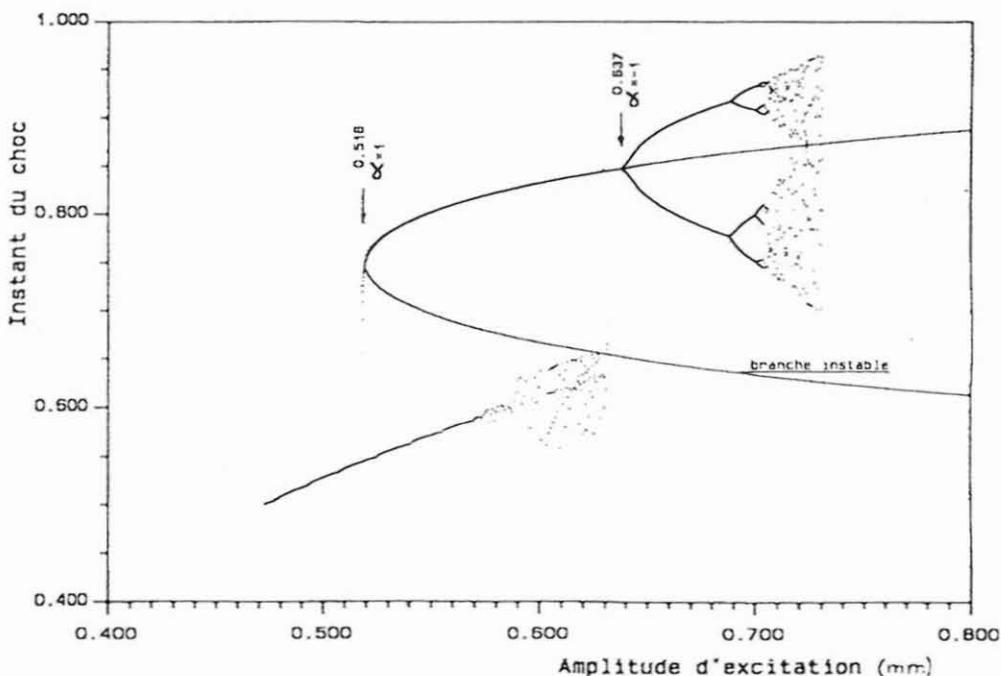


Figure 10 : Analyse de stabilité : courbe des régimes périodiques ( $\mu = 0.25$ ).

Avant de passer à cette analyse, il faut remarquer que, dans l'équation {2}, on a considéré que la durée du vol libre de la bille était égale à la période de la table  $T$ . D'autres régimes périodiques simples

sont possibles pour lesquels cette durée est un multiple de  $T$ . L'équation {2} devient alors,  $m$  étant un nombre entier:

$$v_{in} = -v_{fn} = v_{Pm} = m \cdot gT/2 \quad \{6\}$$

On obtient ainsi toute une famille de courbes. La portion stable de la courbe  $m = 2$  est effectivement observée, expérimentalement et dans la simulation. Elle se termine par la même cascade de bifurcation. Ce régime, pour lequel la période du mouvement de la bille est double de celle du mouvement de la table, ne doit cependant pas être confondu avec le régime issu de la première bifurcation décrit plus haut.

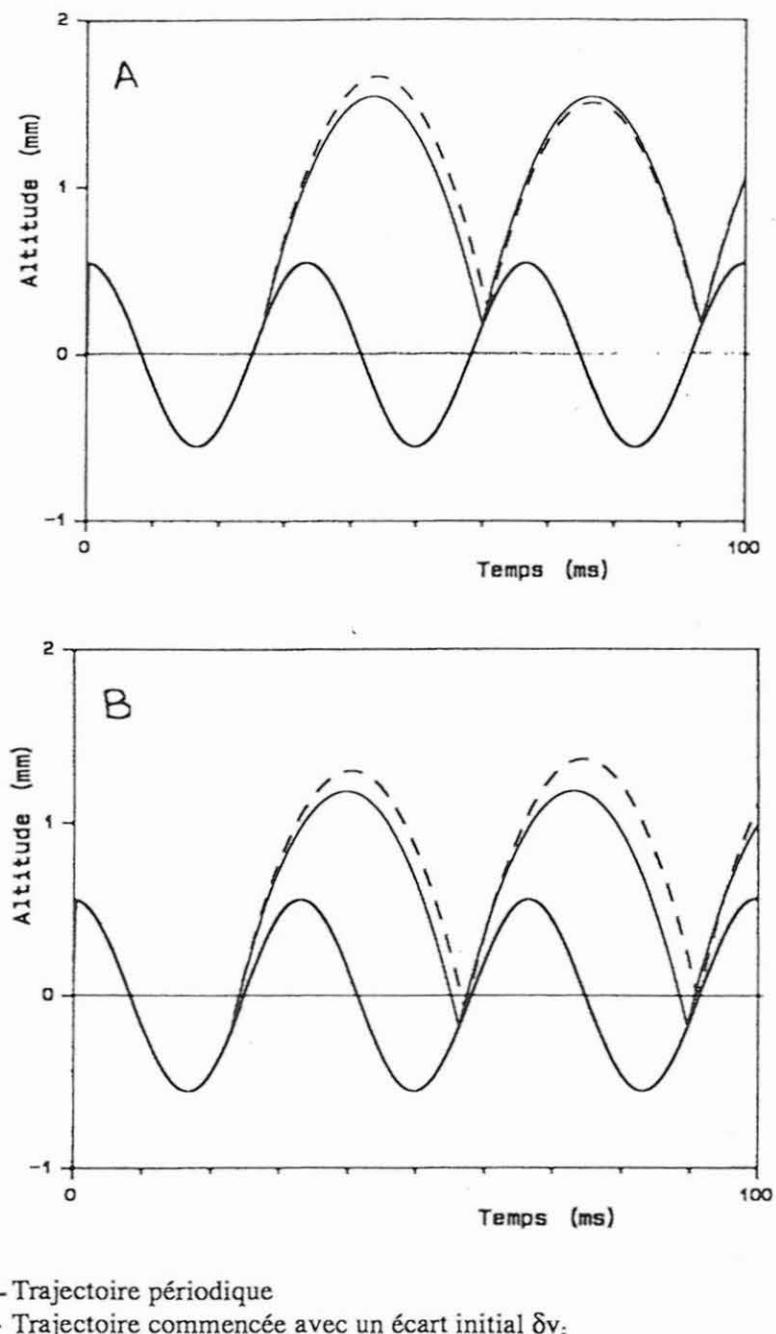
#### 4.2. Étude qualitative de la stabilité

Pour comprendre l'analyse de la stabilité du cycle, on peut raisonner sur un analogue mécanique : une bille au fond d'une sphère creuse est en équilibre, une bille posée sur le sommet d'une sphère est théoriquement en équilibre aussi, mais cette position instable n'a aucune chance d'être observée dans des conditions normales. En effet, dans ce cas, un petit déplacement dû à une perturbation a tendance à être amplifié, alors que dans le premier cas il est source d'une force de rappel vers l'équilibre.

De la même façon, ici, il faut étudier comment une petite perturbation de la trajectoire correspondant au régime périodique est amplifiée ou atténuée. Pour cela, on peut se contenter de prendre un échantillon de la trajectoire à chaque période, c'est à dire de regarder ce qui se passe au moment du choc.

On peut voir, sur la figure 11, à quoi correspondent les deux branches de la courbe des régimes périodiques. La périodicité impose simplement une condition sur la vitesse ascensionnelle du plateau au moment du choc (équation {3}), mais la même vitesse peut être obtenue pour deux valeurs de  $\tau$  :  $\tau_p$  (trajectoire A), et  $3T/2 - \tau_p$  (trajectoire B). Dans le cas de la trajectoire A, si, à la suite d'une perturbation, la vitesse initiale après le choc,  $v_{in}$ , est un peu trop forte, la bille retombera plus tard, à un moment où la vitesse du plateau est plus faible, ce qui aura tendance à corriger l'écart. Dans le cas de la trajectoire B au contraire, la vitesse du plateau au choc suivant sera plus grande et l'écart aura tendance à augmenter : le régime est instable. Le même raisonnement amène une conclusion identique dans le cas où la perturbation correspond à une diminution de  $v_{in}$ . L'amplitude critique est celle pour

laquelle la vitesse nécessaire à l'entretien du rebond est la vitesse maximum du plateau pour  $\tau_p = 3T/4$ .



— Trajectoire périodique  
— — — Trajectoire commencée avec un écart initial  $\delta v_i$

Figure 11 : Comparaison des trajectoires stables (A) et instables (B).

Toujours qualitativement, on peut comprendre pourquoi il y a doublement de période. Au delà d'une certaine valeur de  $A_0$ , l'effet de correction devient trop grand et, au lieu d'un retour vers le régime

périodique simple, on obtient oscillation de part et d'autre de celui-ci. Mais ce raisonnement ne permet pas de déterminer pour quelle valeur de  $A_0$  la bifurcation se produit.

#### 4.3. Analyse de stabilité linéaire

Pour cette analyse, nous allons encore utiliser une section de Poincaré de la trajectoire, mais ici, l'intensité du choc sera remplacée par la vitesse initiale après le choc  $v_i$ . Pour travailler avec des unités homogènes, on exprimera cette vitesse par la grandeur  $u_i = v_i / g$  ayant la dimension d'un temps.

Dans le plan  $\tau - u_i$ , un point  $(\tau_n, u_{in})$  correspond à un choc. Pour simplifier les notations, on représentera ce point par le vecteur associé  $\vec{W}_n$ , de composantes  $\tau_n, u_{in}$ . Les équations du mouvement de la bille et du rebond se résument alors, pour une valeur déterminée des paramètres  $\omega, \mu$  et du paramètre de contrôle  $A_0$ , à une application qui fait correspondre au vecteur  $\vec{W}_n (\tau_n, u_{in})$  le vecteur  $\vec{W}_{n+1} (\tau_{n+1}, u_{in+1})$ :

$$\vec{W}_{n+1} = \mathcal{F}(\vec{W}_n) \quad \{7\}$$

Un régime périodique simple est possible pour les vecteurs  $\vec{W}_P$  qui sont inchangés dans cette application, et donc solutions de :

$$\vec{W}_P = \mathcal{F}(\vec{W}_P) \quad \{8\}$$

On retrouve ici, de façon plus formelle, les résultats du paragraphe 5.1. : les composantes des vecteurs  $\vec{W}_P$  sont en fait données par les équations {2} et {4}, mais ce formalisme va nous permettre d'aborder plus simplement le critère de stabilité.

Supposons qu'au choc N, le vecteur  $\vec{W}_n$  diffère de  $\delta \vec{W}_n$  du vecteur  $\vec{W}_P$ , le vecteur caractérisant le choc suivant  $\vec{W}_{n+1}$  différera de  $\delta \vec{W}_{n+1}$ . Le régime sera stable si, en l'absence de perturbation ultérieure, les écarts successifs  $\delta \vec{W}_{n+1}, \delta \vec{W}_{n+2} \dots$  tendent vers 0, il sera instable si cet écart s'amplifie.

Comme on s'intéresse aux écarts faibles autour de  $\vec{W}_P$ , l'application  $\mathcal{F}$  peut être linéarisée autour de ce point. Le vecteur  $\delta\vec{W}_{n+1}$  s'obtient alors en faisant simplement le produit de  $\delta\vec{W}_n$  par une matrice  $[F]$ .

$$\delta\vec{W}_{n+1} = [F] \cdot \delta\vec{W}_n \quad \{9\}$$

Cette méthode s'appelle *l'analyse de stabilité linéaire*, la matrice  $[F]$  est une *matrice de Floquet*. Le régime sera stable tant que les deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de la matrice de Floquet auront un module inférieur à 1, le module de  $\delta\vec{W}_{n+1}$  étant alors inférieur au module de  $\delta\vec{W}_n$ . Les valeurs critiques du paramètre de contrôle seront celles pour lesquelles le module de l'une des valeurs propres devient supérieur à 1. Dans le cas qui nous intéresse, pour le régime de période  $T$ , l'équation {9} écrit :

$$\begin{pmatrix} \delta\tau_{n+1} \\ \delta u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \mu \\ \pi(1 - \mu) \cdot \cot(\omega\tau_p) & \mu^2 + \pi(1 - \mu^2) \cdot \cot(\omega\tau_p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\tau_n \\ \delta u_n \end{pmatrix} \quad \{10\}$$

L'équation aux valeurs propres correspondante est :

$$\lambda^2 - \lambda \cdot \left[ 1 + \mu^2 + \pi(1 - \mu^2) \cdot \cot(\omega\tau_p) \right] + \mu^2 = 0 \quad \{11\}$$

Le paramètre de contrôle  $A_0$  semble avoir disparu de ces relations, mais il est en fait lié à  $\tau_p$  (pour  $T/2 < \tau_p < T$ ) par la relation {5} exprimant la condition de périodicité.

L'analyse des solutions de l'équation {11} montre tout d'abord que, pour  $\cot(\omega\tau_p) > 0$  ( $T/2 < \tau_p < 3T/4$ ), une des valeurs propres est toujours supérieure à 1. La branche inférieure est donc bien instable. La limite de stabilité  $\lambda = 1$  est obtenue pour  $\tau_p = 3T/4$  correspondant à l'amplitude critique  $A_c$ .

Dans l'autre sens, la valeur propre  $\lambda = -1$  est obtenue pour

$$\cot(\omega\tau_2) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 + \mu^2}{1 - \mu^2} \quad \{12\}$$

d'où l'on peut déduire l'amplitude correspondant au seuil de doublement de période:

$$A_2 = - A_c / \sin(\omega \tau_2) \quad \{13\}$$

Les relations {12} et {13} montrent que le rapport  $A_2/A_c$  ne dépend que de  $\mu$ . Ce rapport permet donc une détermination expérimentale de ce paramètre sans connaître le coefficient de proportionnalité entre la tension d'alimentation et l'amplitude de vibration. La valeur trouvée,  $\mu = 0.53$ , est en accord avec la détermination directe par la méthode exposée plus haut. C'est cette valeur qui a été utilisée dans le calcul des figures 3 et 5.

Il serait possible de continuer et d'étudier la stabilité du régime de période 2. Les vecteurs  $\vec{W}_2$  caractéristiques de ce régime sont ceux qui sont inchangés dans l'application  $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}$ . Les valeurs propres de la matrice  $[F_2]$  linéarisant cette application autour de  $\vec{W}_2$  permettent de déterminer les portions stables ou instables de ce régime. Mais les calculs deviennent beaucoup plus complexes. En effet la matrice  $[F_2]$  n'est pas le simple produit  $[F] \cdot [F]$  mais le produit des matrices de linéarisation autour des deux vecteurs  $\vec{W}_2$ . On peut remarquer cependant qu'au point de bifurcation, on a  $[F_2] = [F] \cdot [F]$  et donc qu'une valeur propre de  $[F_2]$  est égale à  $(-1)^2 = 1$ .

#### 4.4 Vecteurs propres, transitoires

Ayant déterminé les valeurs critiques du paramètre de contrôle correspondant aux changements de régimes, on peut s'intéresser maintenant à ce qui se passe au voisinage de ces changements.

On notera  $\alpha$  et  $\beta$  les deux valeurs propres réelles de la matrice de Floquet\*,  $\vec{w}_\alpha$  et  $\vec{w}_\beta$ , les vecteurs propres correspondants. Si  $\alpha$  est la valeur propre dont le module est égal à 1 au changement de régime, le module de l'autre valeur propre,  $\beta$ , sera voisin de  $\mu^2$  d'après l'équation {11}.

\* Vers le milieu de la zone de stabilité, la matrice de Floquet n'a pas de valeurs propres réelles. On montre cependant dans ce cas que le régime est stable si le module des deux valeurs propres reste inférieur à 1 (voir référence 1 Annexe).

Un vecteur d'écart quelconque  $\delta \vec{W}_n$  peut s'exprimer comme combinaison linéaire de  $\vec{w}_\alpha$  et  $\vec{w}_\beta$  :

$$\delta \vec{W}_n = a \cdot \vec{w}_\alpha + b \cdot \vec{w}_\beta$$

au choc suivant, on aura :

$$\delta \vec{W}_{n+1} = a \cdot \alpha \cdot \vec{w}_\alpha + b \cdot \beta \cdot \vec{w}_\beta$$

puis, après m chocs :

$$\delta \vec{W}_{n+m} = a \cdot \alpha^m \cdot \vec{w}_\alpha + b \cdot \beta^m \cdot \vec{w}_\beta$$

La composante selon  $\vec{w}_\beta$  diminue très vite, comme  $\mu^{2m}$ . L'approche ou le départ d'un régime se feront toujours le long du vecteur propre  $\vec{w}_\alpha$ .

Si l'on s'intéresse à la première bifurcation, on peut poser  $\alpha = -(1 + \varepsilon)$ . Un écart initial au régime périodique simple grandira comme  $[-(1 + \varepsilon)]^m$ . Un exemple est donné sur la figure 12 : à partir d'un point A, situé sur la courbe du régime périodique simple, un écart, selon  $v_i$  au départ, croît le long  $\vec{w}_\alpha$  pour aller rejoindre le régime de période 2 (points D, D'). On peut vérifier sur la figure que la pente de la droite correspond bien aux composantes de  $\vec{w}_\alpha$  données par {10} en unités réduites :  $2 + \varepsilon$  et  $-(1 + \mu)$ . On peut voir de la même façon qu'à partir du point B, pour  $A_0$  légèrement inférieur à  $A_c$  ( $\alpha = 1 + \varepsilon$ ), le départ se fait selon la direction (1, 0).

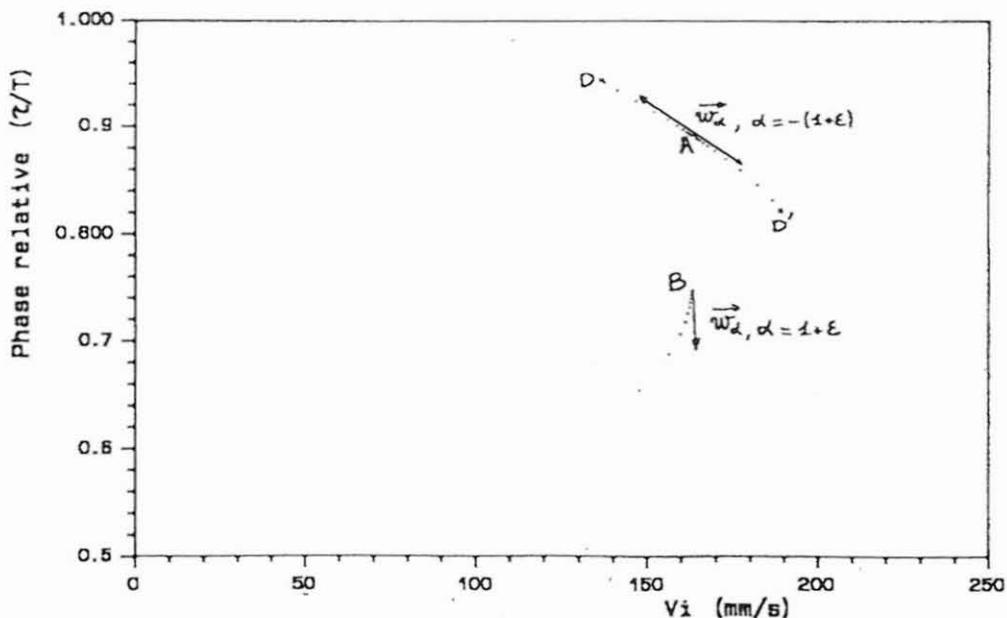


Figure 12 : Régimes transitoires et vecteurs propres dans le plan  $\tau, v_i$ .

On peut expliquer ainsi le mécanisme de *retard à la bifurcation*. Lorsque l'amplitude  $A_0$  franchit la valeur  $A_2$  par valeurs croissantes, le système reste un moment en régime périodique simple. En effet,  $\varepsilon$  étant petit juste après la transition, l'écart à ce régime, en  $[-(1 + \varepsilon)]^m$ , n'augmente que lentement. Inversement, lorsqu'on franchit le seuil par valeurs décroissantes, l'approche du régime périodique ne se fait que comme  $[-(1 - \varepsilon)]^m$ , qui tend vers 0 d'autant plus lentement que  $A_0$  est proche de  $A_2$ . La bifurcation, au lieu d'une allure parabolique, prend alors un aspect pointu. Ceci est particulièrement visible sur la figure 13.

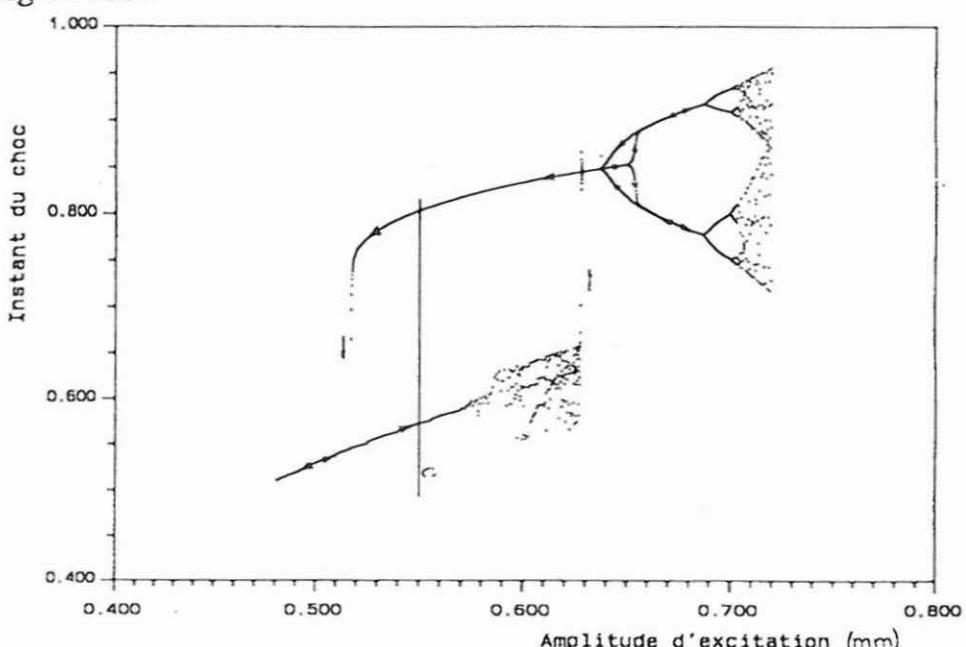


Figure 13 : Bistabilité et hystérésis. Les flèches indiquent le sens de parcours ( $\mu = 0.25$ ).

## 5. BISTABILITÉ, BASSINS D'ATTRACTION

### 5.1. Le régime décollage-atterrissage

Jusque là, dans un but de simplification, nous n'avons pas étudié la branche inférieure des diagrammes de bifurcations. Expérimentalement, c'est pourtant le régime correspondant à cette branche qui apparaît en premier. Lorsque, la bille étant posée sur le plateau immobile, on augmente progressivement l'amplitude de vibration, la bille suit tout d'abord le mouvement. A partir d'un certain seuil, lorsque l'accélération du plateau à son point haut ( $-A_0\omega^2$ ) devient supérieure à

g, on entre dans un régime de décollage-atterrissage : la bille décolle, puis retombe et, après éventuellement un certain nombre de rebonds de hauteur décroissante, accompagne à nouveau le mouvement du plateau jusqu'au prochain décollage. On a donc encore un mouvement périodique, ayant la périodicité de l'excitation, ce qui se traduit par une ligne sur le diagramme de bifurcation.

Lorsque l'amplitude continue à augmenter, le régime devient irrégulier. La bille retombant plus tard et d'une plus grande hauteur, les rebonds suivant le premier choc n'ont plus le temps de s'atténuer et la bille ne suit plus vraiment le mouvement du plateau à l'instant qui correspondrait au décollage. On retrouve l'analyse faite à propos de l'étude de la fenêtre d'ordre dans le chaos (section 3.4) : l'ordre provient de la perte de mémoire des rebonds précédents pendant que la bille est collée sur le plateau. Un point intéressant serait de voir si ce régime irrégulier est bien un régime chaotique, caractérisé par un attracteur étrange avec toutes ses propriétés..., ou s'il s'agit seulement d'un régime périodique ayant une périodicité très longue. La façon dont il apparaît est en tout cas assez inhabituelle.

### 5.2. Bistabilité, hystérésis

La figure 13 a été calculée, pour une valeur  $\mu = 0.25$  du coefficient de restitution, avec une vitesse de variation du paramètre de contrôle  $A_0$  constante, d'abord en augmentant, jusqu'à 0.72 mm, puis en diminuant. Le point représentatif du système décrit d'abord la branche du bas, régime périodique, puis régime irrégulier. Pour une valeur déterminée de  $A_0$ , il y a alors un saut brusque sur la branche correspondant au régime périodique de rebond. On peut noter au passage le comportement transitoire à l'arrivée dans ce régime (écart en  $[-(1 - \varepsilon)]^m$ ). En continuant, on observe la première bifurcation, avec le phénomène de retard décrit précédemment, puis le passage au régime chaotique. En revenant en arrière, après la dernière bifurcation, le régime reste le régime de rebond de période  $T$  jusqu'à l'amplitude critique  $A_c$  en dessous de laquelle la bille retombe dans le régime de décollage-atterrissage.

Il existe ainsi toute une plage de valeurs du paramètre de contrôle pour lesquelles deux régimes de fonctionnement différents peuvent être obtenus. Le système est bistable ; son fonctionnement dépend non seulement de la valeur de  $A_0$  mais aussi de la façon dont on a établi cette valeur. On a un phénomène d'hystérésis. Sur la figure 10, qui donne une vue d'ensemble des états du système, on voit apparaître, avec

la branche instable rejoignant les deux branches stables, la courbe en S caractéristique des systèmes bistables.

La valeur  $\mu = 0.25$  a été choisie pour le tracé de la figure 13 car, le basculement vers le haut aboutissant au régime périodique, le cycle d'hystérésis est plus simple. Pour la valeur expérimentale  $\mu = 0.53$  (figure 3), le basculement conduit directement au régime chaotique et il faut revenir en arrière pour observer la cascade de bifurcations.

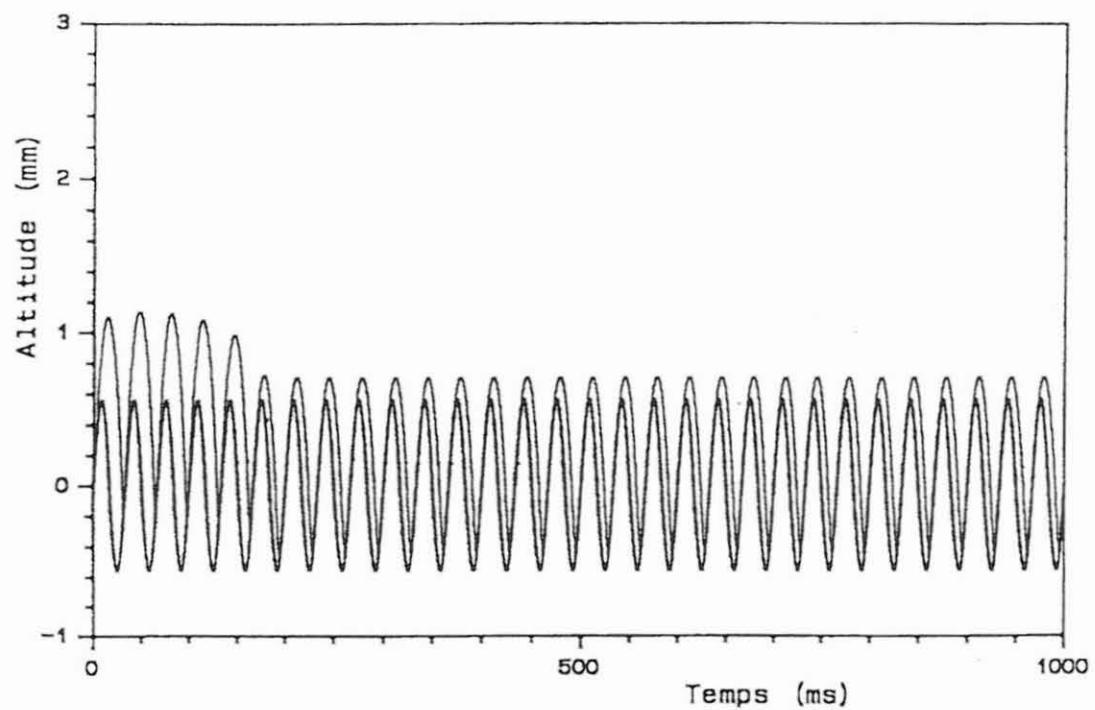
### 5.3. Bassins d'attraction

Pour une valeur fixée du paramètre de contrôle dans la zone de bistabilité, la bille, lâchée avec des conditions initiales quelconques, finira toujours, après un transitoire plus ou moins long, dans l'un ou l'autre des régimes. La figure 14 montre l'exemple de deux trajectoires, commencées avec la même phase  $\tau_1 = 3T/4$ , la bille étant sur le plateau, mais avec deux vitesses initiales  $v_{i1}$  différentes.

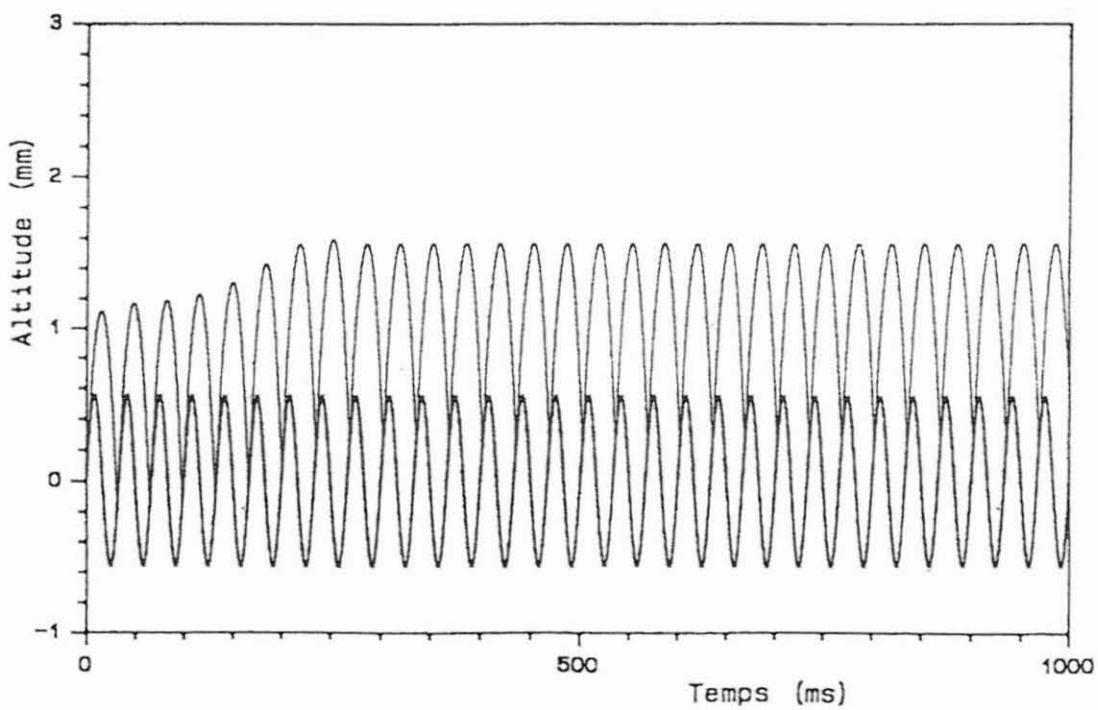
On peut ainsi séparer l'espace des phases en deux *bassins d'attraction* correspondant chacun à l'ensemble des points pour lesquels l'évolution aboutit à un des deux régimes. Pour se ramener à une représentation à deux dimensions de ces bassins, on peut faire à nouveau une section de Poincaré de l'espace des phases. Comme pour l'attracteur, on choisit de faire la coupe au moment du choc pour obtenir une représentation dans le plan  $v_i - \tau$ . Mais, pour tenir compte du caractère périodique de l'excitation, comme expliqué en annexe, on utilise les coordonnées polaires : la vitesse initiale après le choc,  $v_i$  est portée dans la direction définie par l'angle  $\omega\tau$ .

Un point du plan  $(v_i, \omega\tau)$  définit donc les conditions initiales pour une trajectoire, la hauteur initiale étant celle du plateau à l'instant  $\tau$ . Pour tracer les limites des bassins, il suffit alors, pour tous les points du plan, de déterminer quel est le régime final auquel on aboutit et de classer le point dans un bassin ou dans l'autre. Mais la méthode retenue pour le calcul de la figure 15 est un peu différente. A partir d'un point  $(v_i, \omega\tau)$  pris au hasard dans le plan, on suit l'évolution en gardant en mémoire les points intermédiaires, et l'ensemble des points est porté sur le bassin correspondant à l'état d'arrivée. Cette méthode permet d'accélérer le calcul, plusieurs points étant trouvés pour une même trajectoire, mais surtout elle donne une indication sur les chemins les plus fréquemment empruntés pour parvenir au régime stable. La densité des points représentatifs permet ainsi d'avoir une idée de la "profondeur" dans le bassin.

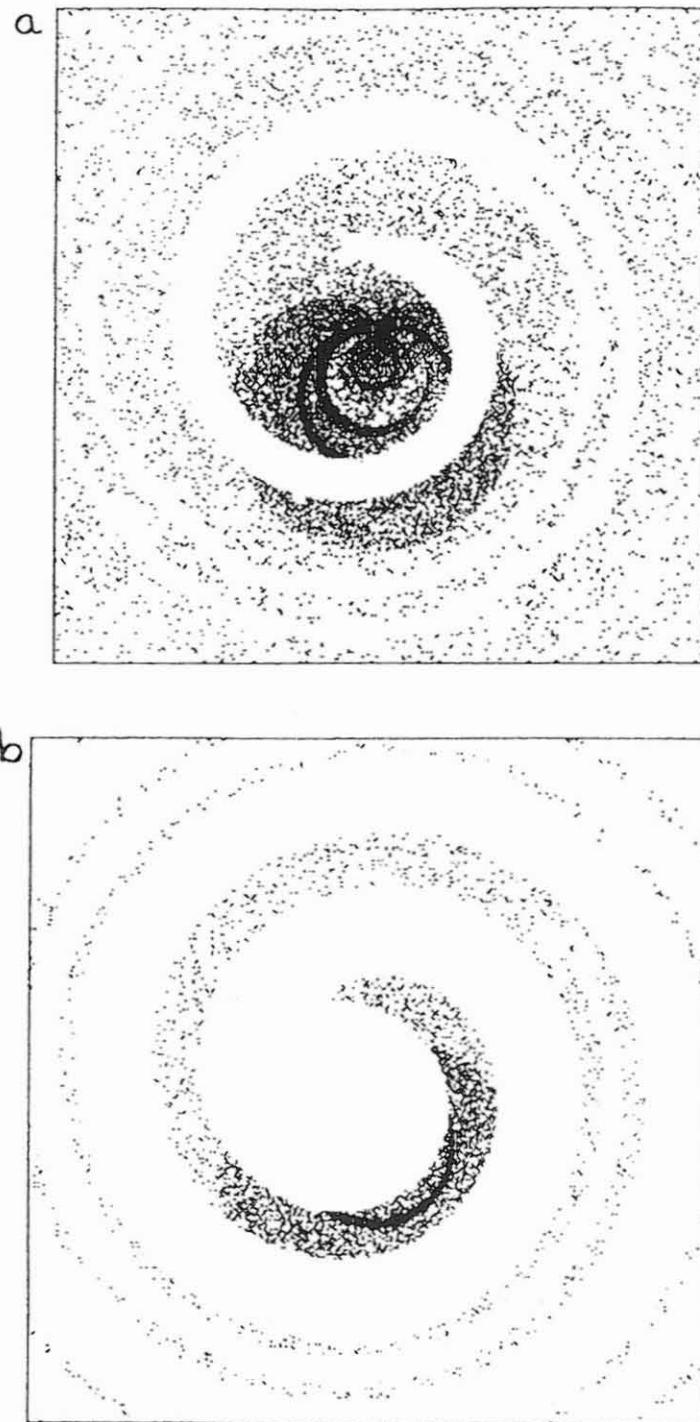
Vi: 147 mm/s; Amplitude: 0.56 mm



Vi: 148 mm/s; Amplitude: 0.56 mm



**Figure 14 :** Trajectoires pour des conditions initiales appartenant à deux bassins d'attractions différents.



a - Régime de décollage-atterrissage.

b - Régime de rebond.

**Figure 15 :** Bassins d'attraction des deux régimes périodiques.  
Représentation polaire  $v_i, \omega\tau$ .

Deux remarques peuvent être faites à l'examen de la figure 15. D'une part, si l'on réunit les deux bassins, on reconstitue bien entendu le plan entier, mais dans cette reconstitution, les zones de plus grande densité ont une forme similaire à celle de l'attracteur étrange obtenu pour une valeur plus élevée du paramètre de contrôle (figure 17b). D'autre part, la séparation des deux bassins coupe ces zones selon une direction que rien ne laissait prévoir. Si le premier point peut se comprendre de façon plus ou moins intuitive, nous n'avons aucune interprétation concernant le second; le problème reste ouvert.

Un autre point à étudier sur ce système est le comportement pour une valeur plus élevée du paramètre de contrôle dans le cas d'un coefficient de restitution de 0.53. Pour  $A_0 = 0.44$  mm par exemple, les deux régimes permanents sont des régimes chaotiques. Il serait intéressant de déterminer les bassins d'attraction respectifs de deux attracteurs étranges.

Ce dernier point peut être abordé expérimentalement et fournit matière à réflexion sur les facultés d'analyse du cerveau humain. Lorsque, débutant loin dans le régime chaotique, on fait décroître l'amplitude de vibration en agissant sur le bouton de niveau du générateur B.F., les deux bassins d'attraction sont si intimement liés que l'obtention de l'un ou l'autre des régimes après la séparation est pratiquement aléatoire. Cependant, avec un peu d'expérience, il est possible de distinguer à l'oreille de subtiles différences de rythme et d'obtenir à volonté le régime périodique stable.

## 6. CONCLUSION

Présentée au congrès de la S.F.P. à Caen au cours de l'opération "Physique dans la Ville", cette expérience a suscité de l'intérêt auprès d'un public de tous niveaux. D'un point de vue général, elle est intéressante par son aspect démonstratif. Les notions de seuil, de bifurcation, d'attracteur étrange... sont directement illustrées, par le comportement de la bille et sur l'écran de l'ordinateur.

Une approche plus quantitative ne nécessite que des outils mathématiques à la portée d'élèves de lycée : équations de la chute libre, calcul numérique de l'intersection de deux courbes. Ceci est important d'un point de vue conceptuel : le calcul ne présentant pas de difficulté, le caractère fondamental de la sensibilité aux conditions initiales, par exemple, apparaît beaucoup plus nettement.

Du point de vue de l'enseignant, la physique du chaos ne fait pas partie des programmes, ou du moins pas encore. Mais le choix de ce thème, aussi bien pour des travaux pratiques que pour un projet d'informatique, fournit aux étudiants ou aux élèves une motivation supplémentaire. Il est en effet stimulant de sentir que l'on peut aborder, avec des outils connus et maîtrisés, un domaine nouveau et encore peu étudié de la physique.

Pour le physicien qui désire approfondir la question, le grand intérêt de ce système est la rapidité de l'acquisition de données. Ceci est vrai du point de vue expérimental, une fréquence de 30 Hz donnant en moyenne un point toutes les 33 ms, mais aussi du point de vue de la simulation numérique. Il est ainsi possible, en quelques minutes de calcul sur un microordinateur, de mettre en évidence l'autosimilarité de l'attracteur étrange pour un système physique réel alors que les exemples que l'on trouve dans les ouvrages sur le chaos sont en général calculés à partir d'équations mathématiques de récurrence n'ayant pas de lien vraiment direct avec un système physique.

Enfin, il n'est pas interdit de penser que, simplement avec un micro-ordinateur sur un coin de bureau, il est possible d'explorer soi-même des aspects encore mal connus de cette physique du chaos et peut-être de contribuer à son avancement. Les questions ouvertes à propos des bassins d'attraction dans la section 5 en donnent un exemple.

Je tiens à remercier ici les groupes d'étudiants qui, au cours des trois dernières années, ont contribué à l'approfondissement de cette expérience. Je remercie aussi E. RESSAYRE pour des discussions fructueuses sur les problèmes de stabilité.

## Annexe - Espaces des phases

Le mouvement d'une bille libre le long d'une direction verticale est entièrement déterminé si on connaît son altitude  $z$  et sa vitesse  $v$  à un instant donné  $t$ . L'espace des phases est à deux dimensions.

Le mouvement périodique du plateau rajoute une troisième coordonnée. En effet, l'évolution du système est conditionnée aussi par la position du plateau à l'instant  $t$  ou, inversement, si l'excitation sert de référence de temps, il faut connaître  $z$ ,  $v$  et  $\tau$ , le temps compté dans ce repère pour déterminer la trajectoire. On a ainsi les trois degrés de liberté minimum nécessaires à l'apparition du chaos<sup>[1]</sup>. La figure 16

présente un essai de représentation de la trajectoire périodique de la bille dans un tel espace, en coordonnées cartésiennes  $\tau$ ,  $v$ ,  $z$ .

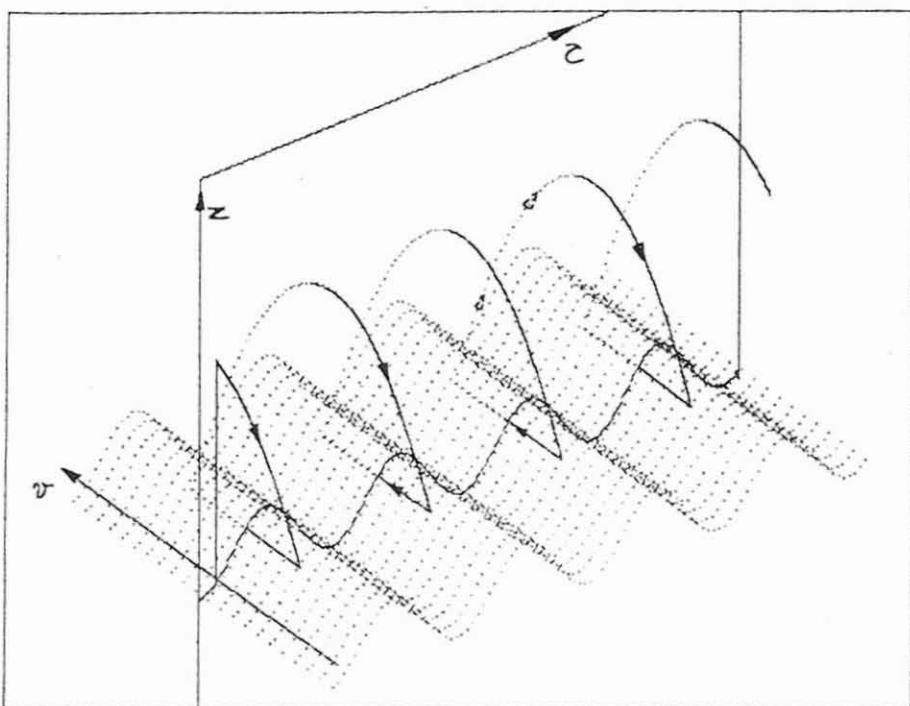


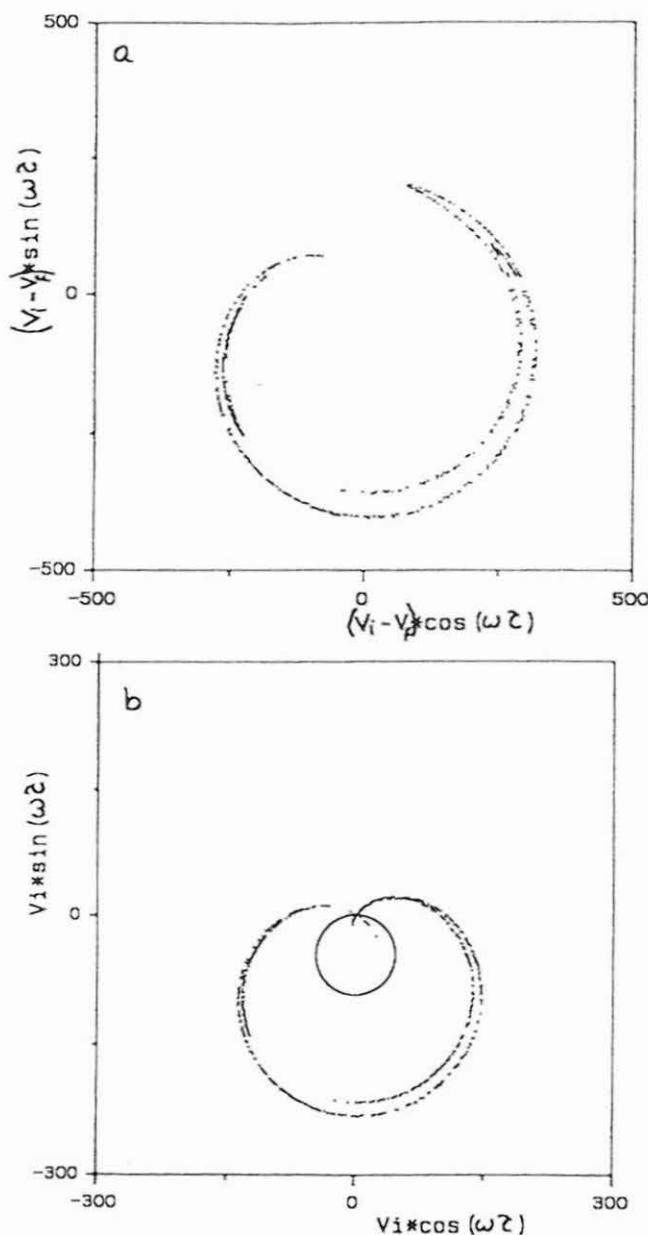
Figure 16 : Représentation en coordonnées cartésiennes de la trajectoire dans l'espace des phases.

Une telle représentation ne prend cependant pas en compte le caractère périodique de l'excitation : le temps  $\tau$  n'est défini que modulo  $T$ . La représentation correcte de l'espace des phases serait donc une représentation en coordonnées cylindriques,  $z$  étant l'altitude,  $v$  le rayon vecteur et  $\omega\tau$  l'angle polaire. Sur un écran d'ordinateur, on peut suivre au cours du temps la trajectoire dans une telle représentation, mais une figure imprimée devient tout de suite difficilement lisible.

On se ramène à une étude à deux dimensions en effectuant une section de l'espace des phases par une surface coupant la trajectoire. Celle-ci se réduit alors à une série de points. Les possibilités de coupes sont multiples. On peut par exemple fixer une altitude  $z$  et noter les temps  $\tau$  et les vitesses  $v$  de passage à cette altitude, ou encore relever à chaque période l'altitude et la vitesse pour un instant  $\tau$  fixé.

La section utilisée ici celle qui apparaît naturellement dans l'expérience puisqu'elle correspond aux chocs. Il s'agit de la projection sur le plan  $\tau, v$  d'une coupe par la surface sinusoïdale  $z = A_0 \cos(\omega\tau)$ . Cette coupe donne deux valeurs de  $v$  :  $v_i$  et  $v_f$ , l'une ou l'autre pouvant

être retenues. L'expérience mélangeant ces deux valeurs sous la forme  $v_i - v_f$  ne fournit pas à proprement parler une coupe, mais les propriétés du diagramme restent les mêmes.



a - intensité du choc ( $v_i - v_f$ ) en fonction de  $\omega t$ .

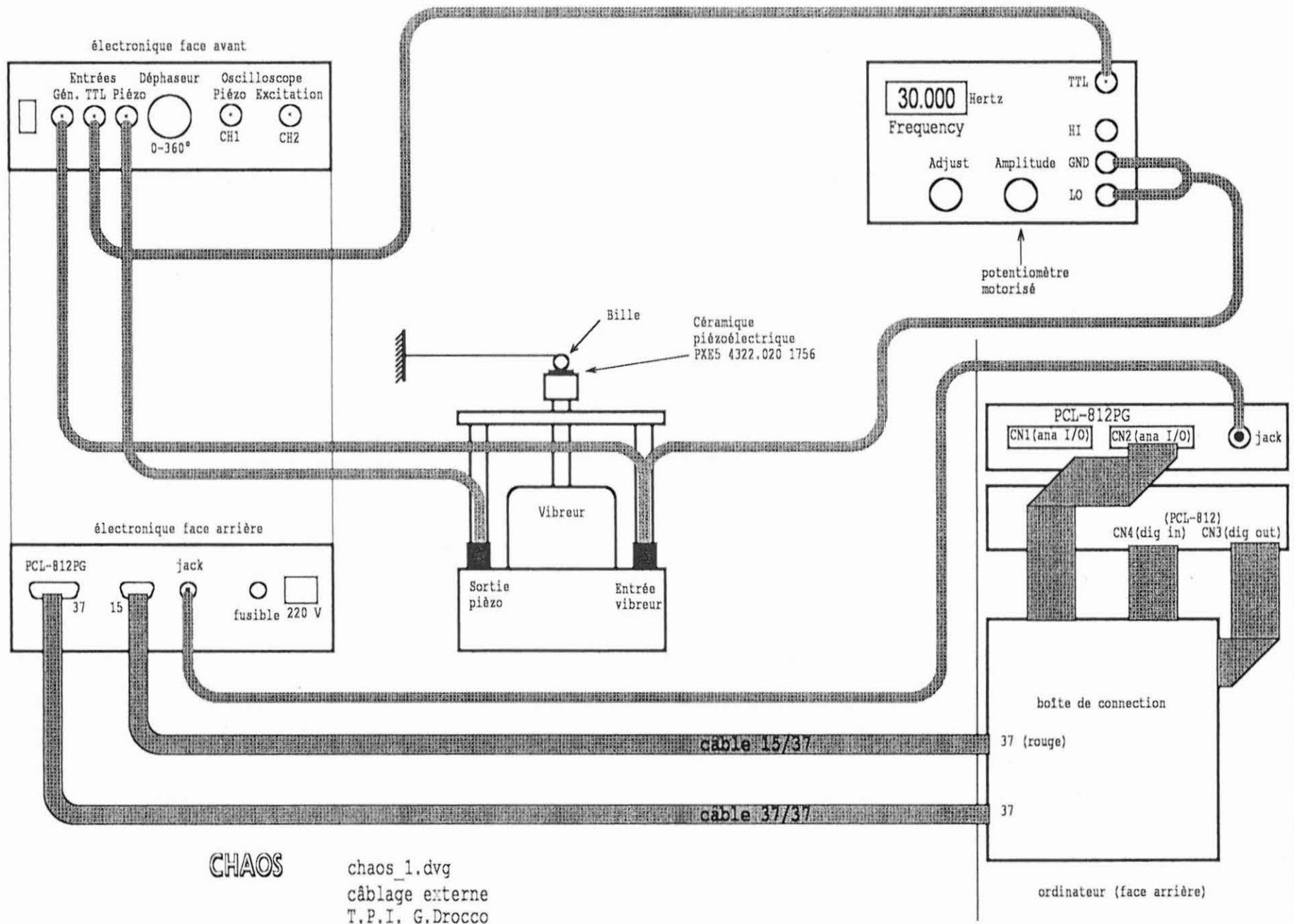
b - vitesse initiale  $v_i$  en fonction de  $\omega t$ .

Figure 17 : Représentations de l'attracteur de la figure 5d en coordonnées polaires.

Dans un souci pédagogique, ces coupes ont été présentées en représentation cartésienne sur les figures 5, 6, 7 et 12 mais la représentation logique est la représentation polaire, projection sur le plan  $z = 0$  de l'espace des phases décrit plus haut. La figure 17 montre le même attracteur que sur la figure 5b dans cette représentation, le rayon vecteur étant  $v_i - v_f$  sur la figure 17a et  $v_i$  sur la figure 17b. Sur cette dernière, la vitesse du plateau a été reportée à la même échelle. Il faut noter que, dans cette représentation, les vitesses étant algébriques, les points  $(v, \omega\tau)$  et  $(-v, \omega\tau + \pi)$  sont confondus. Le cercle représentant la vitesse du plateau est ainsi parcouru deux fois en une période.

## RÉFÉRENCES

- [1] *L'ordre dans le chaos* P. BERGÉ, Y. POMEAU, Ch. VIDAL  
Éditions Hermann, (1984 et 1988).
- [2] *La physique du désordre* La Recherche, Numéro spécial 232,  
(Mai 1991).
- [3] *Le chaos* J. CRUTCHFIELD, D. FARMER, N. PACKARD et  
R. SHAW Pour la Science, (Février 1987).
- [4] a *Chaotic dynamics of a bouncing ball* N.B. Tuffilaro and A.M.  
Albano American Journal of Physics. vol 54, p. 939, (Octobre 1986).  
b *STRANGE ATTRACTOR of a bouncing ball* T.M. MELLO and  
N.B. TUFFILARO American Journal of Physics, vol 55, p 316,  
(Avril 1987).
- c *Comment on "Chaotic dynamics of a bouncing ball"* R.L. ZIMMERMAN American Journal of Physics, vol 56, p. 1147,  
(Décembre 1988).
- [5] *Simple experiments in chaotic dynamics* K. BRIGGS American  
Journal of Physics, vol 55, p. 1083, (Décembre 1987).
- [6] *Du silence au chaos acoustique* C. MAZANGA La Recherche,  
vol. 173, p. 100 (Janvier 1986).





photons  
second

discuss  
independ-  
ency by  
re are  
in-  
se-  
n, the  
bed by  
oxical  
based  
ature.

I com-

activity  
1.5  
ic ten-  
dendent  
re (see

(A1)  
dition  
ishing  
(or  $u$ ,  
angular

(A2)

(A3)  
zero if  
s of two  
different

angular velocities  $\Omega$  and  $\Omega + \delta\Omega$  (assuming  $\delta\Omega \ll \Omega$ ) is

$$\delta a_r = \frac{\Omega(\partial R^2/\partial r)}{(1 - \Omega^2 R^2)} \delta\Omega, \quad (\text{A4})$$

where  $R \equiv -g_{\phi\phi}/g_{rr}$ . We see that the acceleration is the same for all the observers (with  $\Omega \neq \pm 1/R$ ) on a given orbit if and only if  $\partial R / \partial r = 0$  on this orbit. Note, that on a free photon orbit we have  $u^i u_i = 0$  and  $a_i = 0$ . Therefore  $\Omega = \pm 1/R$  and  $\partial R / \partial r = 0$  there. Thus, we have formally proved that observers (e.g., spacecraft) moving on a circular phonon orbit with different angular velocities have exactly the same acceleration. It is *not* equal to the acceleration of the photons (which is zero) because of the assumption  $\Omega \neq \pm 1/R$  one must make to derive formulas (3) and (4).

In the special case of the nonrotating black hole with the mass  $M$ :

$$g_{rr} = [1 - (2GM/c^2r)]^{-1/2}, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta \quad (\text{A5})$$

and the condition  $\partial R / \partial r = 0$  reduces to the formula for the radius of the photon orbit quoted in the paper:

$$r_c = 3GM/c^2.$$

The acceleration formula (3) gives

$$a_r = c^4/6GM,$$

which is independent of the angular velocity.

One could have the impression that these results are not covariant, that they are an artifact of the special coordinate system used. This is not the case. It is easy to express all the formulas presented here in terms of two Killing vector fields,  $\eta^i$  and  $\xi^i$ , which exist in the space-time with the metric (A1) because of time and axial symmetries. These

two Killing vectors in the special coordinates connected with (A1) have the form:

$$\eta^i = \delta^i(t), \quad \xi^i = \delta^i(\phi),$$

with  $\delta^i(k)$  being the Kronecker delta.

The formulas for angular momentum and angular velocity read:

$$1 = -\frac{(\xi^i u_i)}{(\eta^k u_k)}, \quad \Omega = -\frac{1}{(\xi^k \xi_k)},$$

and the acceleration formulas take the form:

$$a_i \equiv u^k \nabla_k u_i = \frac{1}{2} \frac{\nabla_i(\eta^k \eta_k) + \Omega^2 \nabla_i(\xi^k \xi_k)}{(\eta^j \eta_j) + \Omega^2 (\xi^j \xi_j)},$$

$$\delta a_i = \frac{\Omega \nabla_i R^2}{(1 - \Omega^2 R^2)}, \quad R^2 \equiv -(\xi^i \xi_i)/(\eta^k \eta_k).$$

On the photon orbit one has  $\nabla_i R = 0$  and the acceleration

$$a_i = \frac{1}{2} \frac{\nabla_i(\xi^k \xi_k)}{(\xi^j \xi_j)}$$

does not depend on the angular velocity. This proves our point.

<sup>1</sup> Permanent address: Département d'Astrophysique Fondamentale, Observatoire de Paris-Meudon, 92195 Meudon Principal Cedex and Institut d'Astrophysique de Paris, 98 bis Bd. Arago, 75014 Paris, France.

<sup>2</sup> A. Einstein, *Relativity, the Special and the General Theory* (Methuen, London, 1964).

<sup>3</sup> H. Cohn, Am. J. Phys. 45, 239 (1977).

<sup>4</sup> D. S. Koltun, Am. J. Phys. 50, 527 (1982).

<sup>5</sup> S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972).

<sup>6</sup> M. A. Abramowicz and J. P. Lasota, Acta Phys. Pol. B 5, 327 (1974).

## Chaotic dynamics of a bouncing ball

N. B. Tufillaro and A. M. Albano

Department of Physics, Bryn Mawr College, Bryn Mawr, Pennsylvania 19010

(Received 13 June 1985; accepted for publication 11 November 1985)

An undergraduate experiment is described that illustrates the period doubling route to chaos in a simple dissipative mechanical system, a bouncing ball subject to repeated impacts with a vibrating table.

### I. INTRODUCTION

The period doubling route to chaos has now been observed in an impressive number of experimental systems. Electrical,<sup>1–6</sup> optical,<sup>7</sup> hydrodynamic,<sup>8</sup> chemical,<sup>9</sup> and biological systems can all exhibit period doubling instabilities. A few recent articles in this Journal deal with the chaotic dynamics of nonlinear systems.<sup>11,12</sup> but recent discoveries in nonlinear dynamics are still not well known at the undergraduate level.

We have developed an undergraduate experiment that

illustrates many of the ideas and methods used in describing nonlinear dissipative dynamical systems. The experiment consists of two parts. In the first part the students explore the "quadratic map"<sup>13</sup> on a microcomputer. Many aspects of the quadratic map are common to a large class of systems showing chaotic behavior. By studying the quadratic map, the students are introduced to the basic notions of deterministic randomness (i.e., chaos), subharmonic bifurcations, strange attractors, and the like.

These ideas are immediately applied to a simple mechanical system in the second part of the lab. The students ex-

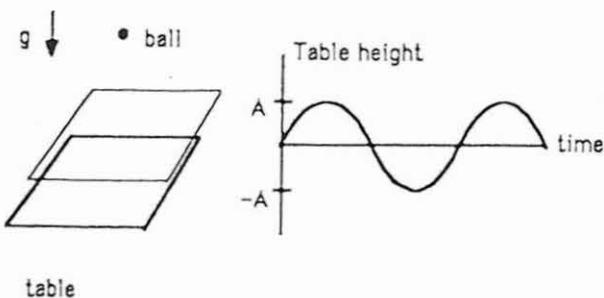


Fig. 1. Bouncing ball. A ball is free to bounce on a table which moves sinusoidally up and down.

perimentally study the dynamics of a ball that is free to bounce on a table which moves sinusoidally up and down (Fig. 1). The dynamics of a bouncing ball subject to repeated impacts with a sinusoidally vibrating table appears to have been studied first by Holmes<sup>14</sup> who showed the existence of periodic and chaotic motions (i.e., strange attractors) for suitable parameter values and initial conditions. The bouncing ball apparatus described here is simple, inexpensive, and exhibits period doubling. The students obtain an estimate of the Feigenbaum delta<sup>15</sup> from both the quadratic map and the bouncing ball experiment. The Feigenbaum delta measured from the latter consistently falls between four and five.

## II. QUADRATIC MAP

Nonlinear dynamical systems are studied in two complementary ways by mathematicians and physicists. The mathematical goal of dynamical systems theory is to understand the asymptotic behavior of a dynamical process. The set of asymptotic solutions is called an "attractor." Attracting sets come in many varieties: fixed points, limit cycles, and strange attractors, to name a few. In physics, a dynamical process is often modeled by a differential or a difference equation, so the task before the mathematician is to find where all the orbits go after a long time. Physicists ask a more subtle (and ambiguous) question. One of the physicist's goals in nonlinear dynamics is to identify what such systems have in common, irrespective of differences in the underlying physics. A physicist seeks to discover those properties that are experimentally measurable and commonly realized in physical phenomena. This is the quest for universality. A familiar result is that a period doubling cascade can culminate in chaos. Moreover, this doubling cascade possesses certain universal, and experimentally realizable, scaling properties. These scaling laws were first noticed by studying the "quadratic map." For an eminently readable introduction to this, and related topics, see R. D. Hofstadter's "Metamagical Themas" in the November 1981 issue of *Scientific American* (Ref. 19).

The difference equation,

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) \quad (1)$$

is called the "quadratic map." It is the simplest nonlinear one dimensional map imaginable. Unlike the analogous differential equation,

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x(1 - x), \quad (2)$$

whose solution is simply

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} / [1 - x_0 (1 - e^{\lambda t})]. \quad (3)$$

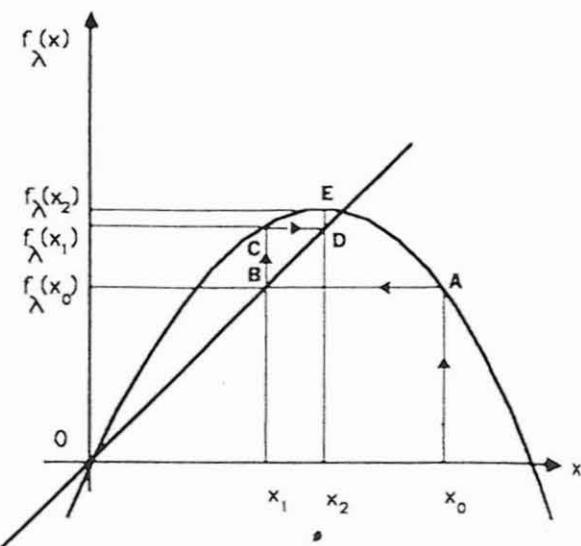


Fig. 2. The quadratic map. The first few iterates of  $x_n$  are shown.

the solutions of the quadratic map can be astonishingly complex. In fact, some aspects of the asymptotic orbits are still not fully understood.

We can think of the quadratic map as a very idealized model of some dynamical process. It has, in fact, been used to model the temporal evolution of insect populations.<sup>13,15</sup> The parameter  $\lambda$  in this case may be a measure of the abundance and availability of food supplies which affects how large the next generation  $x_{n+1}$  will be given that the present population is  $x_n$ . In the bouncing ball experiment,  $\lambda$  might be the amplitude of the platform's oscillations, in hydrodynamic experiments, it might be the Reynolds number.

Much is learned about the quadratic map by examining the behavior of  $x_n$  starting from some arbitrary  $x_0$ . (In the following, we only examine the case where  $\lambda > 1$ .) A particularly simple graphical method for iterating Eq. (1) is illustrated in Fig. 2 (see Ref. 19) in which

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x) \quad (4)$$

is plotted against  $x$ . Starting from some  $x_0$ , the value of  $x_1$  is obtained by drawing a line segment parallel to the  $f_\lambda(x)$  axis from  $x_0$  and extending it until it intersects the graph at  $A$ . The length of this line segment gives the value of  $x_1$ . The value of  $x_2 = f_\lambda(x_1)$  is obtained by drawing a line segment parallel to the  $x$  axis from  $A$  until it intersects the diagonal  $f_\lambda(x) = x$ , at  $B$  and then drawing a line segment  $BC$ . The height of  $C$  above the  $x$  axis gives  $x_2$ . All other future iterates  $x_3, \dots, x_k, \dots$  may be similarly obtained.

The first thing to notice is that  $f_\lambda(0) = 0$ . Thus if  $x_0 = 0$ , all future iterates remain at 0 and  $x = 0$  is a trivial fixed point of the map. Next, if  $x_0 < 0$  or  $x_0 > 1$ , then the future iterates of  $x_0$  run away to negative infinity. Therefore, the interesting dynamics of the quadratic map are confined to the unit interval,  $[0,1]$ . Lastly, a nontrivial fixed point exists whenever  $f_\lambda(x) = x$ , i.e., whenever  $f_\lambda(x)$  intersects the  $45^\circ$  line. Note that when  $\lambda < 2$ , no such intersections occur and all initial conditions on the unit interval converge toward  $x = 0$  ( $x = 0$  in this case is a stable fixed point) while for  $\lambda > 2$ , initial conditions near  $x = 0$  diverge from it ( $x = 0$  becomes an unstable fixed

```

10 XMAX = 250: YMAX = 179
20 INPUT "Enter lower lambda: "; llower
30 INPUT "Enter upper lambda: "; lupper
40 INPUT "Enter step size for lambda: "; lstep
50 HGR: HCOLOR = 3
60 FOR l = llower TO lupper STEP lstep
70     xplot = XMAX*(l - llower)/(lupper - llower)
80     x = 0.5
90     FOR i = 1 TO 200
100        x = l*x*(1-x)
110    NEXT i
120    FOR i = 1 TO 200
130        x = l*x*(1-x)
140        yplot = YMAX*(1-x)
150        HPLOT(xplot, yplot)
160    NEXT i
170 NEXT l
180 END

```

Fig. 3. Bifurcation diagram program. The user inputs a minimum and maximum as well as a step size for lambda.

point) and all initial conditions seem to be attracted to other points.

After similar introductory remarks, the students are encouraged to explore the dynamics of the quadratic map on their own using a microcomputer. For instance, for various values of  $x_0$  between zero and one, and  $\lambda$  between one and four, the students can watch the future iterates of Eq. (1) bounce around on the unit interval. They soon discover that if  $\lambda$  is between one and three then there exists only one attracting (stable) fixed point inside the unit interval and one repelling (unstable) fixed point at zero. That is, no matter what  $x_0$  they pick, future iterates always go to where  $f_\lambda(x) = x$ . However, a more exciting result is obtained if  $\lambda = 3.9$ , say.

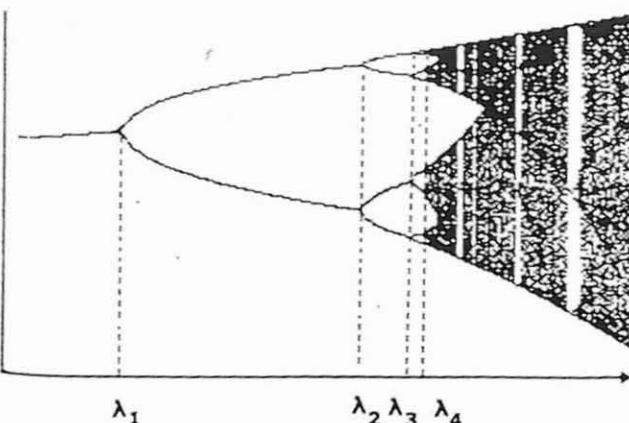


Fig. 4. Bifurcation diagram for quadratic map. The first pitch fork begins at  $\lambda_1$ . The second pitch fork (period 4T) starts at  $\lambda_2$ .

Now that their curiosity is aroused, the students are guided to investigate systematically the dynamics of the quadratic map by constructing a "bifurcation diagram." This is a plot of  $x_n$  (for large values of  $n$ ) versus  $\lambda$ . The program listed in Fig. 3 will run on any Apple II computer. (If hardcopy graphical output is desired, some graphical screen dump capability is required.) The graphical output is shown in Fig. 4. The horizontal axis shows values of  $\lambda$  between 2.8 and 4. The vertical axis shows the attracting set on the unit interval for a given  $\lambda$ . The diagram was constructed by discarding the first two hundred iterates of  $x_0$  (the transient solution) and then plotting the subsequent two hundred points. The bifurcation diagram displays how the attractor changes as  $\lambda$  increases.

Figure 4 illustrates the "period-doubling route to chaos" via a series of "pitchfork" bifurcations. For each value of  $\lambda < \lambda_1$ , the high- $n$  limit set of the solution consist of a single point, called a period one solution: there is only one attracting fixed point. When  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ , a "period two orbit" exists, the solution hops back and forth between the upper and lower branches of the pitchfork. For  $\lambda_2 < \lambda < \lambda_3$ , a "period four" solution exists. This period doubling continues indefinitely, but the interval of a given periodic motion,  $\lambda_n < \lambda < \lambda_{n+1}$ , rapidly becomes more compact.  $\lambda_n$  soon converges to a value  $\lambda_c$  that marks the onset of chaotic behavior, at which point the iterates appear to randomly hop around on a subset of the unit interval. As  $\lambda$  is further increased, windows of periodic motion can reappear. In this regime, chaotic and periodic motion exist side by side.

Feigenbaum<sup>15,20</sup> discovered that the dimensionless number defined by

$$\delta_F = \lim_{n \rightarrow \infty} [(\lambda_{n+1} - \lambda_n)/(\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1})] = 4.6692... \quad (5)$$

is independent of the details of the quadratic map. Furthermore, the convergence rate of Eq. (5) is quite rapid (quadratic, in fact). Hence,  $\delta_F$  is well approximated by the first few values of  $\lambda_n$ . The students can obtain  $\delta_F$  close to that given by Eq. (5) by using only the first few values of  $\lambda_n$  (e.g.,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) found in the quadratic map.

A remarkable feature of Feigenbaum's delta is its *universality*. It seems to characterize every dynamical problem that displays the period-doubling route to chaotic behavior. This is illustrated by the bouncing ball experiment which yields a value of  $\delta_F$  that agrees with Eq. (5) to within roughly 10%.

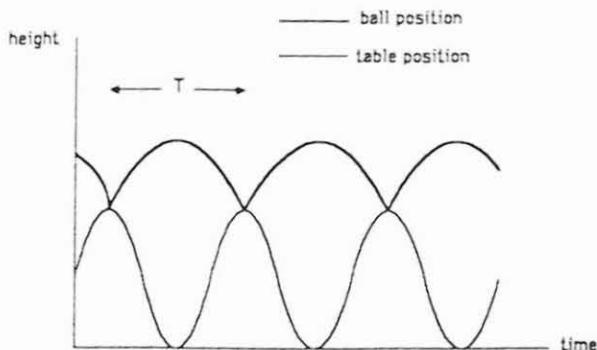


Fig. 5. Ball and table position. Periodic motion of period  $T$  is depicted.

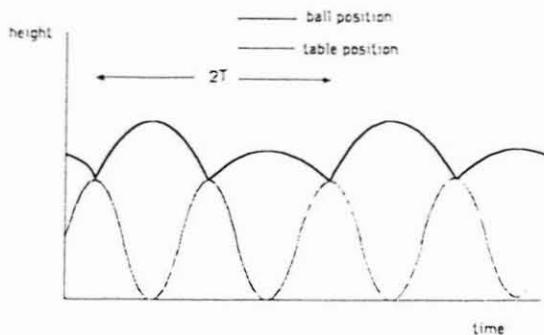


Fig. 6. Periodic motion of period  $2T$ .

### III. QUALITATIVE DESCRIPTION OF A BOUNCING BALL

Imagine dropping a ball on top of a table that is oscillating in the vertical direction with a frequency  $\omega$  and amplitude  $A$  (Fig. 1). In the bouncing ball experiment we want to study how varying the table amplitude  $A$  affects the ball's dynamics. The system is dissipative since the collisions are inelastic. We therefore expect the table and the ball to move in unison when  $A$  is small enough; no bouncing occurs. However, for a fixed  $\omega$  and a large enough  $A$ , the ball will begin to bounce. As we shall see, the ball initially bounces periodically until we reach a critical value of the amplitude  $A_c$ , at which point the ball bounces in a chaotic manner. New periodic and chaotic motions can appear if the amplitude increases further.

One way to visualize the ball's motion is to graph both the ball's height and the table's motion on the same plot. Figure 5 shows the simplest periodic motion we can imagine. The ball executes periodic motion with a period  $T$  equal to that of the forcing period. In Fig. 6, a  $2T$  periodic

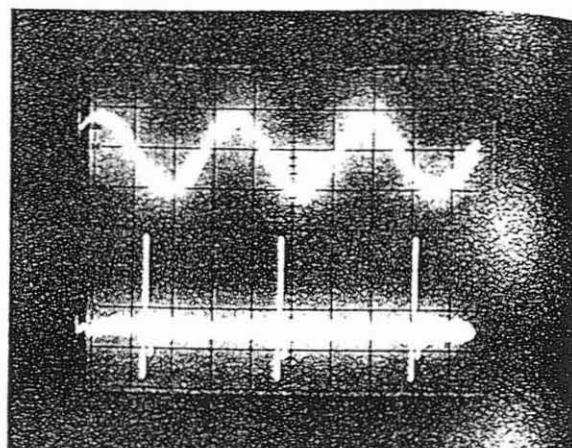


Fig. 8. Experimental output from the bouncing ball machine. A "2T" periodic orbit is shown. The upper trace is the driving voltage to the speaker. The lower display shows the direct output from the piezoelectric film due to impacts with the bouncing ball.

orbit is illustrated; the ball bounces high, then low, then high again.

Studying the quadratic map showed us that the chaotic solutions were preceded by a sequence of period doubled solutions. Reasoning by analogy, we might guess that as we increase the table amplitude  $A$ —which is analogous to the parameter  $\lambda$  in the quadratic map—we will see a sequence of periodic orbits of periods  $T, 2T, 4T, 8T, 16T\dots$  after which the ball moves chaotically. Notice that if the analogy is correct we will not see orbits of periods  $3T, 5T, 7T, 9T\dots$  in this sequence. Moreover, we can quantitatively test the analogy by calculating the Feigenbaum delta for the experimental system.

### IV. BOUNCING BALL APPARATUS

A schematic diagram of a "bouncing ball machine" is shown in Fig. 7. A speaker driven by a function generator serves as the vibrating table. A small steel ball bounces against a concave lens glued to the speaker. The curvature of the lens helps to keep the ball's motion vertical. Fastened to the top of the lens is a thin ( $28\ \mu\text{m}$ ) piezoelectric film.<sup>10</sup> Every time the ball hits the lens, the film generates a vol-

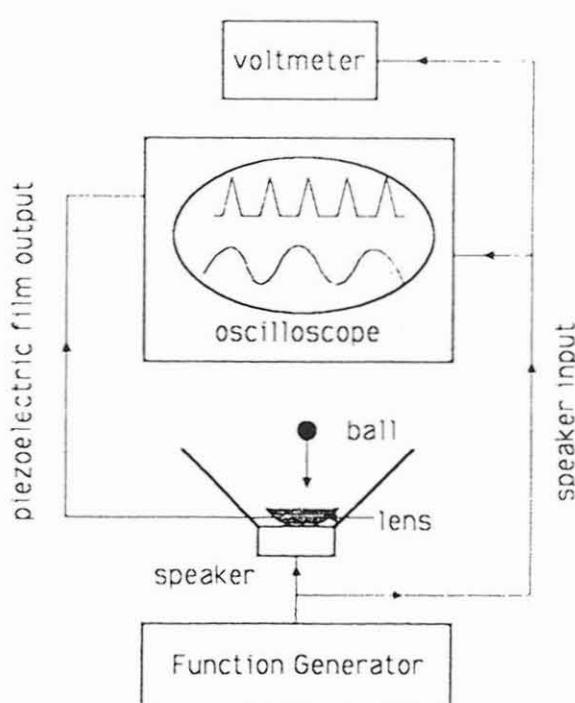


Fig. 7. Apparatus for bouncing ball experiment.

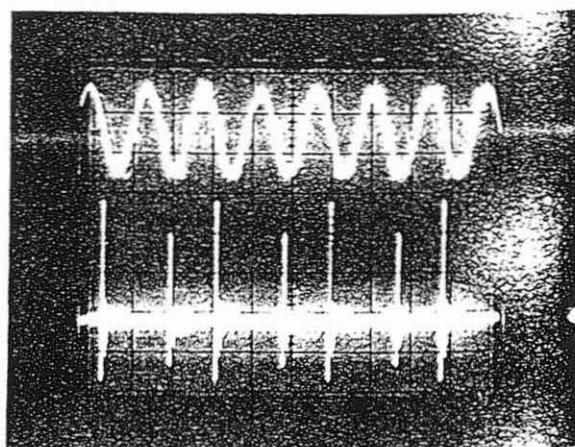


Fig. 9. A "2T" periodic orbit.

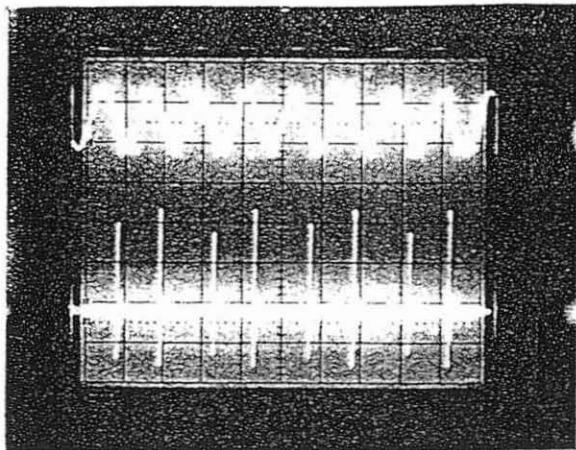


Fig. 10. A "4T" periodic orbit. The lower trace repeats itself at four times the forcing period.

tage, which is readily detected by an oscilloscope. The other channel of the oscilloscope shows the voltage driving the speaker. At impact, a sharp click is heard. The acoustical patterns of different periodic and chaotic motions are easily distinguished by the listener. The function generator is also connected to a voltmeter so that the driving voltage at a bifurcation value can be recorded.

## V. BOUNCING BALL EXPERIMENT

With a frequency around 60 Hz, the students are asked to slowly increase and decrease the driving voltage while they practice listening for different periodic and chaotic motions. Once they hear a periodic pattern, the oscilloscopes is adjusted to trigger properly off the periodic signal. For small voltages, it helps to tap the speaker to start the ball bouncing. The students should note that the system displays hysteresis. The bifurcation points can differ for increasing and decreasing sweeps through  $A$ .

Actual experimental data of periodic motions of periods  $T$ ,  $2T$ , and  $4T$  are shown in Figs. 8–10, respectively. The upper trace displays the driving voltage fed to the speaker. The lower trace shows the signal generated by the piezoelectric film due to collisions with the bouncing ball. Presumably, the pulse height is proportional to the force of impact.

Once the students are familiar with the apparatus they are asked to construct a "bifurcation diagram" for the bouncing ball system similar to that shown in Fig. 11 by placing the function generator near its maximum value and then decreasing the amplitude noting for what voltages (read from the voltmeter) chaotic and periodic motions appear and disappear. The Feigenbaum delta can now be calculated and compared to the quadratic map result. Typical values (Fig. 11) give

$$\delta_F \approx (A_2 - A_1)/(A_3 - A_2) = 4.3. \quad (6)$$

The lab concludes with a few questions. For example, the students are asked to estimate the maximum separation between the ball and the lens by elementary considerations of projectile motion. Also they are asked to explain why long ( $8T$ ,  $16T$ , ...) periodic orbits are not seen in the experimental setup, i.e., why there is a truncation of the cascade.

## Type of Motion (Period)

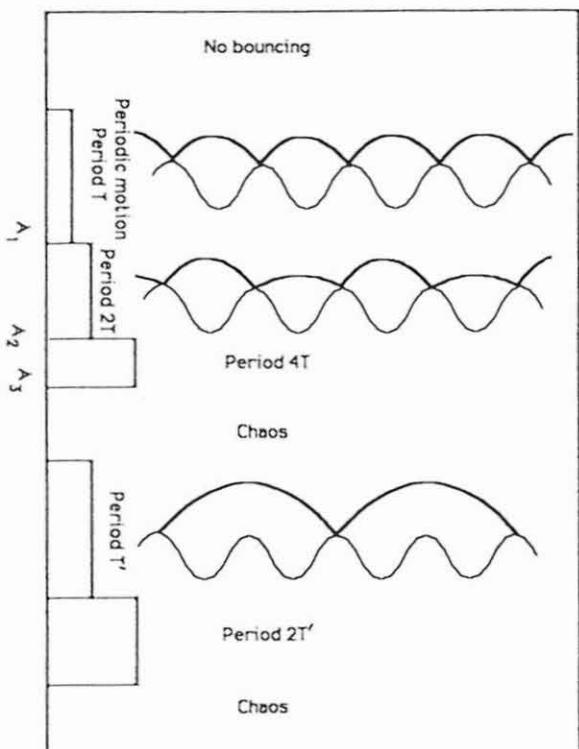


Fig. 11. Bifurcation diagram for bouncing ball experiment. Typical values are  $A_1 = 0.149$  V,  $A_2 = 0.226$  V,  $A_3 = 0.244$  V.

## VI. FUTURE WORK

A detailed analytic and numerical study of the bouncing ball system is in progress. Such a realistic model is not presented here in order to emphasize how much can be learned about the system by studying its analogies with the quadratic map. The more realistic model gives rise not to an interval map, but rather to a certain two-dimensional annular map.

In addition, we are currently engaged in a number of experimental studies. For instance, we are collecting data to calculate the fractal dimensionality<sup>17</sup> and distribution function of motion in the chaotic regime. The experimental result will be compared to those obtained from computer simulations. The bouncing ball system also provides a convenient system for testing new nonlinear phenomena such as noisy precursors of bifurcations discussed by Weisenfeld.<sup>18</sup>

## ACKNOWLEDGMENTS

We thank the Physics 331 class of 1984-85 at Bryn Mawr College, especially Tina Mello and Lauree Shampine, for the testing of the original version of this experiment.

<sup>1</sup>P. S. Lindsay, Phys. Rev. Lett. **47**, 1344 (1981).

<sup>2</sup>J. S. Testa, J. Perez, and C. Jeffries, Phys. Rev. Lett. **48**, 714 (1982).

<sup>3</sup>D. D'Humieres, M. R. Beasley, B. A. Huberman, and A. Libchaber, Phys. Rev. A **26**, 3438 (1982).

<sup>4</sup>S. Novak and R. G. Frehlich, Phys. Rev. A **26**, 3660 (1982).

<sup>5</sup>K. Aoki, K. Miyame, T. Kobayashi, and K. Yamamoto, Physica B

- 117 & 118, 570 (1983).  
 \*S. W. Teitsworth, R. M. Westervelt, and E. E. Haller, Phys. Rev. Lett. 51, 825 (1983).  
 ?See N. B. Abraham, in *Fluctuation and Sensitivity in Nonequilibrium* (Springer, Berlin, 1984), p. 152, and reference therein.  
 \*See H. L. Swinney, Physica 47, 7D (1983), and references therein.  
 \*M. Guerara, L. Glass, and A. Shrier, Science 214, 350 (1981).  
 \*L. Glass, M. R. Guerara, and A. Shrier, Physica 89, 7D (1983).  
 \*T. Mishina, T. Kohmoto, and T. Hashi, Am. J. of Phys. 53(4), 332 (1985).  
 \*E. V. Mielczarek, J. Turner, D. Leiter, and L. Davis, Am. J. of Phys. 51, 32 (1983).  
 \*R. M. May, Nature 261, 459 (1976). The quadratic map is also known  
 as the logistic map.  
 \*P. J. Holmes, J. Sound Vibration 84(2), 173–189 (1982).  
 \*M. J. Feigenbaum, Los Alamos Science 1, 4 (1980).  
 \*The KYNAR piezoelectric film is available from Pennwalt Corporation, 900 First Avenue, P.O. Box C, King of Prussia, Pennsylvania, 19046-0018. A 10 cm × 20 cm sheet 28 μm thick with standard nickel-aluminum coating costs \$35. The KYNAR Technical Manual is available from Pennwalt for \$10 and lists suppliers for conducting adhesives.  
 \*P. Grassberger and I. Procaccia, Phys. Rev. Lett. 50, 346 (1983).  
 \*K. Wisenfeld, J. Stat. Phys. 38, 1071 (1985).  
 \*D. R. Hofstadter, "Metamagical Themas," Scientific American (November, 1981) 22–43.  
 \*M. Fiegenbaum, J. Stat. Phys. 21, 669 (1979).

## Derivation of the potential energy for the inverse square force—Without calculus

Jeffry V. Mallow

Department of Physics, Loyola University of Chicago, Chicago, Illinois 60626

(Received 4 October 1985; accepted for publication 19 December 1985)

A derivation is presented for the potential energy using the assumption of elliptical orbits for a mass under the influence of a  $1/r^2$  force. This eliminates the need for a calculus-based derivation, and is therefore appropriate for a wide range of nonmajors' introductory physics courses.

For the undergraduate who knows calculus, the derivation of the  $1/r$  potential from the  $1/r^2$  force is exceedingly simple: A single integration of  $1/r^2$  between distances  $r_1$  and  $r_2$  yields  $1/r_1 - 1/r_2$ . For the students in non-calculus-based introductory physics courses, this simple derivation is inaccessible, and most texts either state the result, or implicitly or explicitly invoke calculus as part of a "derivation."<sup>1</sup>

In this paper, I derive the expression for  $\Delta PE$  from examination of the properties of the elliptical orbit of a particle (charge or mass) subject to a  $1/r^2$  attractive force. The only prerequisites are high school algebra and geometry, and the concepts of angular momentum and energy.

Consider a mass  $m$  orbiting a fixed mass  $M$ . The gravitational force  $F = GMm/r^2$  produces an elliptical orbit, with  $M$  at one focus, as shown in Fig. 1. The semimajor axis is  $a$ , the semiminor axis is  $b$ , the eccentricity is  $e$  and the distances from  $M$  to the turning points are  $r_1$  and  $r_2$  ("perigee" and "apogee," respectively). Since gravity is a conservative central force, any conclusions we draw about the energies of  $m$  at  $r_1$  and  $r_2$  is true about any positions, not just the turning points, and for any motion of  $m$ , not just elliptical. Note from the geometry that

$$\begin{aligned} r_1 &= a(1 - e), \\ r_2 &= a(1 + e), \\ b &= a(1 - e^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1a)$$

(The distance from the focus to the intersection of the ellipse with the  $y$  axis is also equal to  $a$ , because the constant

"length of string" between foci is  $2a$ ). Thus

$$b = (r_1 r_2)^{1/2}$$

and

$$a = (r_1 + r_2)/2. \quad (1b)$$

We choose to investigate the motion of  $m$  at the turning points, because at these positions, velocities  $v_1, v_2$  are perpendicular to distances  $r_1, r_2$ , and the motion is therefore centripetal.

Writing  $\Delta PE = -\Delta KE$ ,

$$\Delta PE = PE(r_2) - PE(r_1) = m(v_1^2 - v_2^2)/2. \quad (2)$$

Now at  $r_1$  and  $r_2$ ,  $m$  may be considered to be in a circular orbit of radius  $\bar{r}$ , subject to the gravitational force (see Fig. 1):

$$v_1^2/\bar{r} = GM/r_1^2$$

and

$$v_2^2/\bar{r} = GM/r_2^2. \quad (3)$$

(Note that  $\bar{r}$  is the same for both positions, since  $v_1 r_1 = v_2 r_2$  from angular momentum conservation.)

Thus, from (2) and (3)

$$\Delta PE = (GMm/2)\bar{r}(1/r_1^2 - 1/r_2^2). \quad (4)$$

It now remains to determine  $\bar{r}$ . This can be done by comparing the expression for the circle of radius  $\bar{r}$  centered at  $(a - \bar{r}, 0)$  to that for the ellipse, as  $(x, y) \rightarrow (a, 0)$ :

$$[x - (a - \bar{r})]^2 + y^2 = \bar{r}^2 \quad (5)$$