«Fractionner les racines_Héron 5P 6P 7CO»

fichier : sm07_flr_heron_5p7co.pdf

Fiche de présentation

Titre de l'activité	Des diviseurs aux racines
Sous-titre	La méthode de Héron
Degré(s) concerné(s)	5-6 EP 7 CO
Durée estimée	3h
Résumé	
Contexte d'usage de la calculatrice	EXECUTER:l'élève est dans un contexte de mathématiques connues, la machine exécute des tâches acquises mais fastidieuses, longues ou répétitives (recherches de diviseurs,)
Contenus et compétences mathématiques visées	Diviseurs d'un nombre entier
Pré requis	
Lien(s) avec les plans d'études et moyens d'enseignement	
Mots-clé	
Source	

Énoncé élève (activité *Fractionner les racines_Héron 5P-7CO*)

(ces 4 premières pages ne sont pas à distribuer aux élèves, mais indique le déroulement de cette activité et comprend le tableau – à remplir par les élèves – à photocopier sur une feuille acétate.) Cette feuille pourra être utilisée pour la mise en commun.

A) Multiples et diviseurs

1. Trouver et lister les diviseurs des nombres entiers inférieurs à 100.
   Pour cela répartir le travail entre les élèves, qui ont la calculatrice à disposition.
   Selon les classes et les degrés, ce travail peut être exécuté à la maison.
2. Mise en commun intermédiaire des résultats.
   (photocopier les 3 pages suivantes sur une feuille acétate).
   Que peut-on observer ?

B) Multiples et diviseurs

Définir la racine carrée pour les carrés parfaits.

Cette idée est reprise dans l'activité écrite, pour les degrés 8 et plus, pour définir la racine d'un nombre qui n'est pas un carré parfait.

Le tableau à compléter par les élèves

Nombre	**Tous les diviseurs du nombre**
1	{ **1** }
2	{ 1, 2 }
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	
31	
32	
33	

34	
35	
36	
37	
38	
39	
40	
41	
42	
43	
44	
45	
46	
47	
48	
49	
50	
51	
52	
53	
54	
55	
56	
57	
58	
59	
60	
61	
62	
63	
64	
65	
66	
67	
68	

69	
70	
71	
72	
73	
74	
75	
76	
77	
78	
79	
80	
81	
82	
83	
84	
85	
86	
87	
88	
89	
90	
91	
92	
93	
94	
95	
96	
97	
98	
99	
100	

Commentaires pour le maître

(activité *Fractionner les racines_Héron 5P-7CO*)

Analyse à priori de l'activité (enjeux de l'activité, démarches possibles, difficultés, relances, mise en commun)	Intentions Il s'agit d'observer les propriétés des diviseurs des nombres entiers afin de définir la notion de carré parfait et de racine carrée Démarches possibles - - Relances Mise en commun Variables didactiques
Proposition(s) de déroulement	
Prolongements possibles	•

Corrigé détaillé (activité *Fractionner les racines_Héron 5P-7CO*)

2.

Nombre	**Tous les diviseurs du nombre**
1	{ **1** }
2	{ 1, 2 }
3	{ 1, 3 }
4	{ 1, **2**, 4 }
5	{ 1, 5 }
6	{ 1, 2, 3, 6 }
7	{ 1, 7 }
8	{ 1, 2, 4, 8 }
9	{ 1, **3**, 9 }
10	{ 1, 2, 5, 10 }
11	{ 1, 11 }
12	{ 1, 2, 3, 4, 6, 12 }
13	{ 1, 13 }
14	{ 1, 2, 7, 14 }
15	{ 1, 3, 5, 15 }
16	{ 1, 2, **4**, 8, 16 }
17	{ 1, 17 }
18	{ 1, 2, 3, 6, 9, 18 }
19	{ 1, 19 }
20	{ 1, 2, 4, 5, 10, 20 }
21	{ 1, 3, 7, 21 }
22	{ 1, 2, 11, 22 }
23	{ 1, 23 }
24	{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 }
25	{ 1, **5**, 25 }
26	{ 1, 2, 13, 26 }
27	{ 1, 3, 9, 27 }
28	{ 1, 2, 4, 7, 14, 28 }
29	{ 1, 29 }
30	{ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 }
31	{ 1, 31 }

32	{ 1, 2, 4, 8, 16, 32 }
33	{ 1, 3, 11, 33 }
34	{ 1, 2, 17, 34 }
35	{ 1, 5, 7, 35 }
36	{ 1, 2, 3, 4, **6**, 9, 12, 18, 36 }
37	{ 1, 37 }
38	{ 1, 2, 19, 38 }
39	{ 1, 3, 13, 39 }
40	{ 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 }
41	{ 1, 41 }
42	{ 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42 }
43	{ 1, 43 }
44	{ 1, 2, 4, 11, 22, 44 }
45	{ 1, 3, 5, 9, 15, 45 }
46	{ 1, 2, 23, 46 }
47	{ 1, 47 }
48	{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 }
49	{ 1, **7**, 49 }
50	{ 1, 2, 5, 10, 25, 50 }
51	{ 1, 3, 17, 51 }
52	{ 1, 2, 4, 13, 26, 52 }
53	{ 1, 53 }
54	{ 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54 }
55	{ 1, 5, 11, 55 }
56	{ 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56 }
57	{ 1, 3, 19, 57 }
58	{ 1, 2, 29, 58 }
59	{ 1, 59 }
60	{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 }
61	{ 1, 61 }
62	{ 1, 2, 31, 62 }
63	{ 1, 3, 7, 9, 21, 63 }
64	{ 1, 2, 4, **8**, 16, 32, 64 }
65	{ 1, 5, 13, 65 }
66	{ 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66 }

67	{ 1, 67 }
68	{ 1, 2, 4, 17, 34, 68 }
69	{ 1, 3, 23, 69 }
70	{ 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70 }
71	{ 1, 71 }
72	{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72 }
73	{ 1, 73 }
74	{ 1, 2, 37, 74 }
75	{ 1, 3, 5, 15, 25, 75 }
76	{ 1, 2, 4, 19, 38, 76 }
77	{ 1, 7, 11, 77 }
78	{ 1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78 }
79	{ 1, 79 }
80	{ 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80 }
81	{ 1, 3, **9**, 27, 81 }
82	{ 1, 2, 41, 82 }
83	{ 1, 83 }
84	{ 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84 }
85	{ 1, 5, 17, 85 }
86	{ 1, 2, 43, 86 }
87	{ 1, 3, 29, 87 }
88	{ 1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88 }
89	{ 1, 89 }
90	{ 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90 }
91	{ 1, 7, 13, 91 }
92	{ 1, 2, 4, 23, 46, 92 }
93	{ 1, 3, 31, 93 }
94	{ 1, 2, 47, 94 }
95	{ 1, 5, 19, 95 }
96	{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96 }
97	{ 1, 97 }
98	{ 1, 2, 7, 14, 49, 98 }
99	{ 1, 3, 9, 11, 33, 99 }
100	{ 1, 2, 4, 5, **10**, 20, 25, 50, 100 }

Les nombres, qui ont un nombre impair de diviseurs, sont des carrés parfaits.
Les diviseurs vont par paire; celui qui reste seul est la racine du nombre.

$1 \bullet 12 = 12$ $\quad 2 \bullet 6 = 12$ $\quad 3 \bullet 4 = 12$

$1 \bullet 16 = 16$ $\quad 2 \bullet 8 = 16$ $\quad 4 \bullet 4 = 16$

4 est la racine carrée de 16.

Autre exemple:

$1 \bullet 720 = 720$ et $1 < \sqrt{720} < 720$

$2 \bullet 360 = 720$ et $2 < \sqrt{720} < 360$ car $2 \bullet 2 < 2 \bullet 360 = 720$ et $360 \bullet 360 > 2 \bullet 360 \geq 720$

$3 \bullet 240 = 720$ et $3 < \sqrt{720} < 240$

...

$16 \bullet 45 = 720$ et $16 < \sqrt{720} < 45$

$18 \bullet 40 = 720$ et $18 < \sqrt{720} < 40$

$20 \bullet 36 = 720$ et $20 < \sqrt{720} < 36$ car $20 \bullet 20 < 20 \bullet 36 = 720$ et $36 \bullet 36 > 20 \bullet 36 = 720$

$24 \bullet 30 = 720$ et $24 < \sqrt{720} < 30$

La meilleure approximation que l'on peut obtenir par cette méthode est donc
$24 < \sqrt{720} < 30$

« Fractionner les racines_fractions continues 7CO 8CO »

fichier : sm07_flr_fc_78CO.pdf

Fiche de présentation

Titre de l'activité	Fractions en escaliers
Sous-titre	Des fractions pour approcher $\sqrt{2}$
Degré(s) concerné(s)	78 CO
Durée estimée	3h
Résumé	Ces activités veulent montrer les racines sous différentes formes et familiariser l'élève avec l'utilisation de certaines fonctions de la calculatrice (fraction-décimal, programmation).
Contexte d'usage de la calculatrice	RECHERCHER/EXPLORER : l'élève aborde des notions mathématiques nouvelles ou les travaille sous un angle qu'il ne connaît pas encore ; la calculatrice permet de découvrir, de conjecturer, de produire et d'effectuer des calculs à interpréter
Contenus et compétences mathématiques visées	Utilisation d'un algorithme
Pré requis	
Lien(s) avec les plans d'études et moyens d'enseignement	789CO Nombres et Opérations: "...On leur fera découvrir graduellement les différentes écritures des nombres : ... et autres écritures à l'aide d'opérations non effectuées... et constater qu'un même nombre peut toujours avoir plusieurs écritures..." 789CO Usage de la calculatrice "Aprendre à utiliser les différentes touches et fonctions de la calculatrice"
Mots-clé	Fraction continue -
Source	Malices du Kangourou collèges 2003

Énoncé élève (activité *Fractionner les racines_fc 7-8CO*)

A) L'idée de la méthode

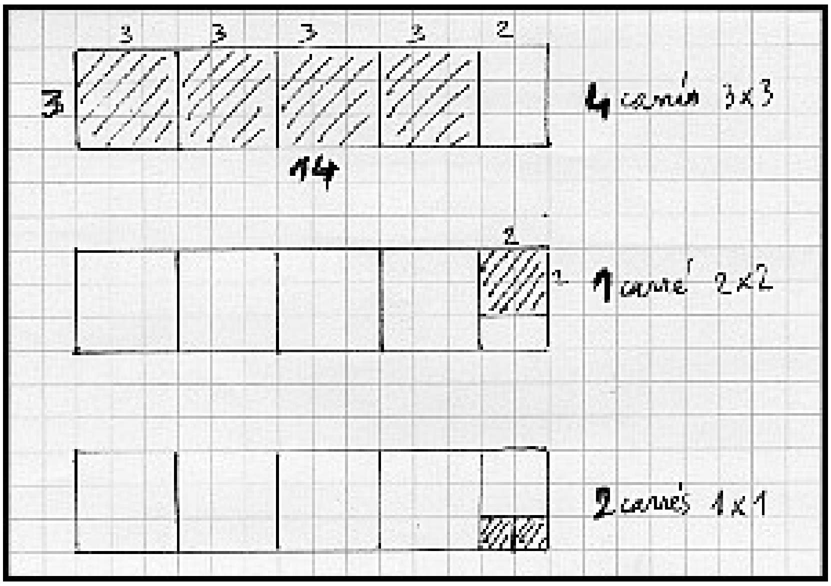
Dans certaines régions du monde, on écrit $\frac{3}{2}$ sous la forme $1\frac{1}{2}$.

Cela signifie : $\frac{3}{2} = 1{,}5 = 1 + \frac{1}{2}$; on a extrait l'entier !

Recommençons avec un deuxième exemple : $\frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}$ *car* $4 = \frac{12}{3}$;
quand on a soustrait les entiers (ici 4 entiers) il reste un nombre, $2/3$ plus petit que 1.

L'idée est de dessiner la fraction, sous la forme d'un rectangle, et et les entiers sous la forme de carrés, puis de recommencer avec le nouveau rectangle qui apparaît:

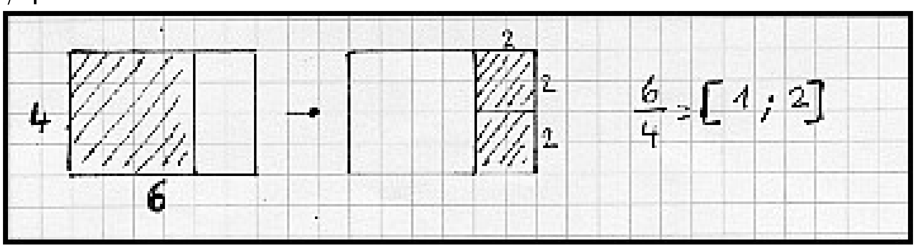
avec 14 / 3



On écrira plus simplement $\frac{14}{3} = [4 \; ; \; 1 \; , \; 2]$

(4, 1 et 2 sont des nombres entiers ; remarquer le point virgule !)
Cette écriture est appelée « fraction en escalier »

avec 6 / 4



1. Choisir des fractions et les dessiner selon la méthode de la page précédente.

Écrire toutes les fractions dessinées sous la forme d'une fraction en escalier:

$\frac{\ldots}{\ldots}$ = [... ; ... , ... , ...]

2. Dessiner les fractions
$[1;2]$ $[1;2,3]$ $[2;1,3]$ ainsi que celles de ton choix.

Écrire ces fractions sont leur forme habituelle.

3. Dessiner les fractions

$[1;2]$ $[1;1,2]$ $[1;1,1,2]$ $[1;1,1,1,2]$ $[1;1,1,1,1,2]$

Que remarques-tu ?

B) Utilisation des touches $\boxed{\text{OP1}}$ et $\boxed{\text{OP2}}$

La calculatrice peut trouver le nombre de carrés.
Pour cela il faut programmer la calculatrice (c'est ton professeur qui l'a fait).
Voici comment utiliser ta calculatrice avec **14 / 3.**

	Consigne	Séquence de touches	partie entière	nombre dans la mémoire A
	Mettre 14 / 3 dans la mémoire A	$\boxed{1}\boxed{4}\boxed{/}\boxed{3}\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}\boxed{\text{ENTER}}$ **Attention**: $\boxed{/}$ n'est pas la touche $\boxed{\div}$		$\frac{14}{3}$
1er tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	$\boxed{\text{OP1}}$	**4**	$\frac{14}{3}$
1er tour	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	$\boxed{\text{OP2}}$		$\frac{3}{2}$
2ème tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	$\boxed{\text{OP1}}$	**1**	$\frac{3}{2}$
2ème tour	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	$\boxed{\text{OP2}}$		$\frac{2}{1}$
3ème tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	$\boxed{\text{OP1}}$	**2**	$\frac{2}{1}$
3ème tour	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	$\boxed{\text{OP2}}$		

La calculatrice affiche « erreur ».
Taper alors $\boxed{\text{CLEAR}}\boxed{\text{CLEAR}}\boxed{\text{CLEAR}}$ pour continuer à utiliser la calculatrice.

Les 3 parties entières qui ont été trouvées permettent d'écrire le nombre 14/3 sous la forme:

$\frac{14}{3} = [\ 4\ ;\ 1\ ,\ 2\ ]$ (fraction en escalier de 3 « marches »)

4. Quelles sont les fractions en escalier qui ont 1 « marche »?

5. Trouver, en utilisant la calculatrice, l'écriture en escalier des fractions suivantes:
13/8 19/7 11/7 .
Vérifier en faisant un croquis sur la page suivante,

C) Recherche de fractions en escaliers

6. Trouver, en utilisant la calculatrice, l'écriture en escalier des fractions suivantes:
3/2 5/3 8/5 13/8 21/13 ...
Que peut-on remarquer ?

7. Trouver, en utilisant la calculatrice, l'écriture en escalier des fractions suivantes:
8/7 9/7 10/7 11/7 12/7 13/7 14/7 15/7 16/7 17/7 ...
Que peut-on affirmer?

8. Trouver, sans la calculatrice, l'écriture en escalier de 2007 / 2006.
Si on emploie les touches $\boxed{\text{OP}_1}$ et $\boxed{\text{OP}_2}$ obtient la même réponse? Expliquer.

9. À deux !
Choisir une fraction, dont le numérateur et le dénominateur sont inférieurs à 20. Demander à son voisin de prédire le nombre de marches de la fraction escalier . Le premier trouve, mentalement ou en s'aidant d'un papier et d'un crayon, et l'autre utilise la calculatrice. Écrire les écritures trouvées.

D) Avec une feuille de papier et avec les deux méthodes

Prendre une feuille de papier de format A4.
Mesurer, au millimètre près, la longueur L et la largeur l de la feuille de papier A4.
On va appliquer les deux méthodes précédentes avec ces deux nombres entiers L et l.

10. Première méthode

Remplir avec un maximum de carrés la feuille A4, selon la méthode de la partie A) de cette activité.
Indiquer pour chaque carré la dimension de son côté.

11. Deuxième méthode

Utiliser la calculatrice, selon la méthode de la partie B) de cette activité, pour trouver l'écriture sous la forme de fraction continue. (On pourra s'aider du tableau ci-dessous)

	Consigne	**Séquence de touches**	**partie entière**
	Mettre $\frac{L}{l}$ dans la mémoire A	[2][9][7][/][2][1][0][STO▸][ENTER] **Attention**: [/] n'est pas la touche [÷]	
1er tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	[OP1]	
	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	[OP2]	
2ème tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	[OP1]	
	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	[OP2]	
3ème tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	[OP1]	
	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	[OP2]	

Combien de tours peut-on faire avant de voir s'afficher le message d'erreur?

12. Écrire la fraction en escalier qui a été trouvée.
Calculer le carré de cette fraction.

Historiquement, les fractions continues ont été utilisées en astronomie dès le cinquième siècle.

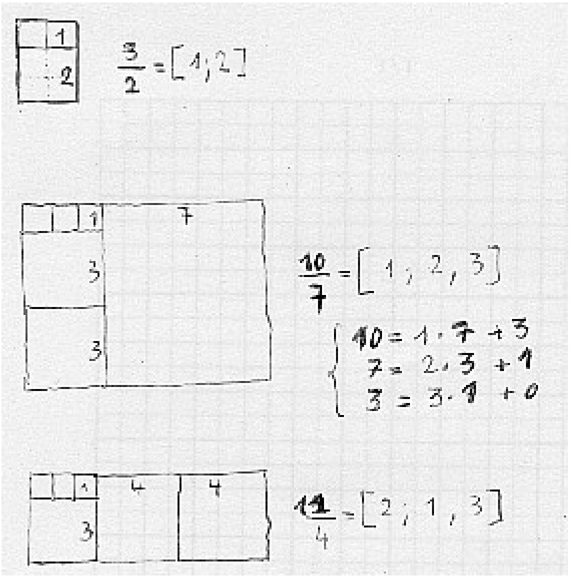
Commentaires pour le maître

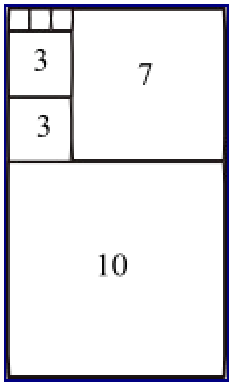
(activité *Fractionner les racines_fc 7-8CO*)

Analyse à priori de l'activité (enjeux de l'activité, démarches possibles, difficultés, relances, mise en commun)	<u>Intentions</u> Sous le prétexte de la découverte d'une nouvelle notion (fractions continues) c'est l'occasion d'utiliser des touches importantes, mais peu utilisées généralement, de la calculatrice. Il est nécessaire de programmer les calculatrices des élèves, comme cela est indiqué dans le corrigé. <u>Démarches possibles</u> <u>Relances</u> Les dimensions en mm d'une feuille A4 sont 297x210 <u>Mise en commun</u> <u>Variables didactiques</u> Les exemples de fractions choisis se veulent simples : attention à ne pas toujours prendre des fractions irréductibles!
Proposition(s) de déroulement	Toute l'activité se déroule en classe, par groupe de 2.
Prolongements possibles	• Activité sur la définition et l'approximation d'une racine carrée «*Fractionner les racines_ r* ».

Corrigé détaillé (activité *Fractionner les racines_fc 7-8CO*)

2.



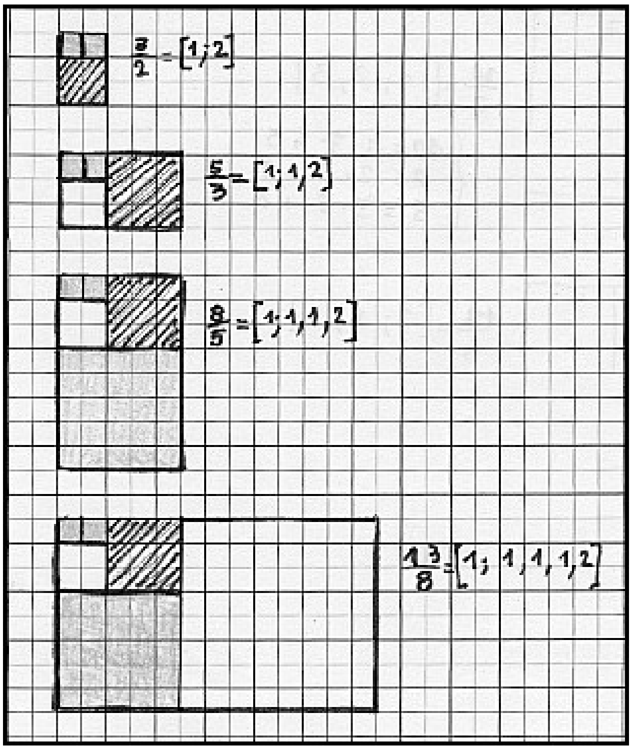


Méthode , expliquée avec un exemple, pour dessiner une fraction en escalier

Dans l'image ci-contre on peut retrouver le rationnel dont le développement est [1, 1, 2, 3]. Les trois petits carrés donnent la taille du carré suivant (3). Les deux carrés moyens et le petit carré donnent la taille du carré plus grand (7), le carré plus grand et le carré moyen donnent le dernier carré (10) et les deux derniers carrés donne la longueur du rectangle (17).
[1 ; 1 , 2 , 3]=17/10

Pour dessiner [1 ; 1 , 2 , 3] on commence par dessiner les 3 petits carrés (on peut choisir l'unité que l'on veut pour le côté des petits carrés), puis les 2 carrés moyens suivants, le carré plus grand puis le dernier carré. Il reste à additionner 7 et 10.

3.



4. Les nombres entiers naturels s'écrivent sous la forme d'une fraction en escalier, qui n'a qu'une seule marche : sa partie entière, c'est-à-dire lui-même.

5. $\frac{13}{8}$ =[1;1,1,1,2] $\qquad$ $\frac{19}{7}$ = [2;1,2,2] $\qquad$ $\frac{11}{7}$ = [1;1,1,3]

6. ... On retrouve la suite de Fibonacci !
À chaque étape le nouveau numérateur est la somme du numérateur et du dénominateur de la dernière étape, et l'ancien numérateur 3 devient le dénominateur. Par suite, il suffit d'ajouter un 1 à chaque nouvelle étape :
$\frac{3}{2}$ = [1 ; 2] $\qquad$ $\frac{5}{3}$ = [1 ; 1,2] $\qquad$ $\frac{8}{5}$ = [1 ; 1,1,2] $\qquad$ $\frac{13}{8}$ = [1 ; 1,1,1,2] $\qquad$ ...

7. $\frac{8}{7}$ = [**1** ; 7] $\qquad$ $\frac{9}{7}$ = [**1** ; 3,2] $\qquad$ $\frac{10}{7}$ = [**1** ; 2,3] $\qquad$ $\frac{11}{7}$ = [**1** ; 1,1,3] $\qquad$ $\frac{12}{7}$ = [**1** ; 1,2,2] $\qquad$ $\frac{13}{7}$ = [**1** ; 1,6]

$\frac{14}{7}$ = [2]

$\frac{15}{7}$ = [**2** ; 7] $\qquad$ $\frac{16}{7}$ = [**2** ; 3,2] $\qquad$ $\frac{17}{7}$ = [**2** ; 1,2] $\qquad$ $\frac{18}{7}$ = [**2** ; 1,1,3] $\qquad$ $\frac{19}{7}$ = [**2** ; 1,2,2] $\qquad$ $\frac{20}{7}$ = [**2** ; 1,6].

La partie entière augmente de 1, tous les 7 nombres; les écritures en fractions en escalier se répètent à l'exception du premier entier.

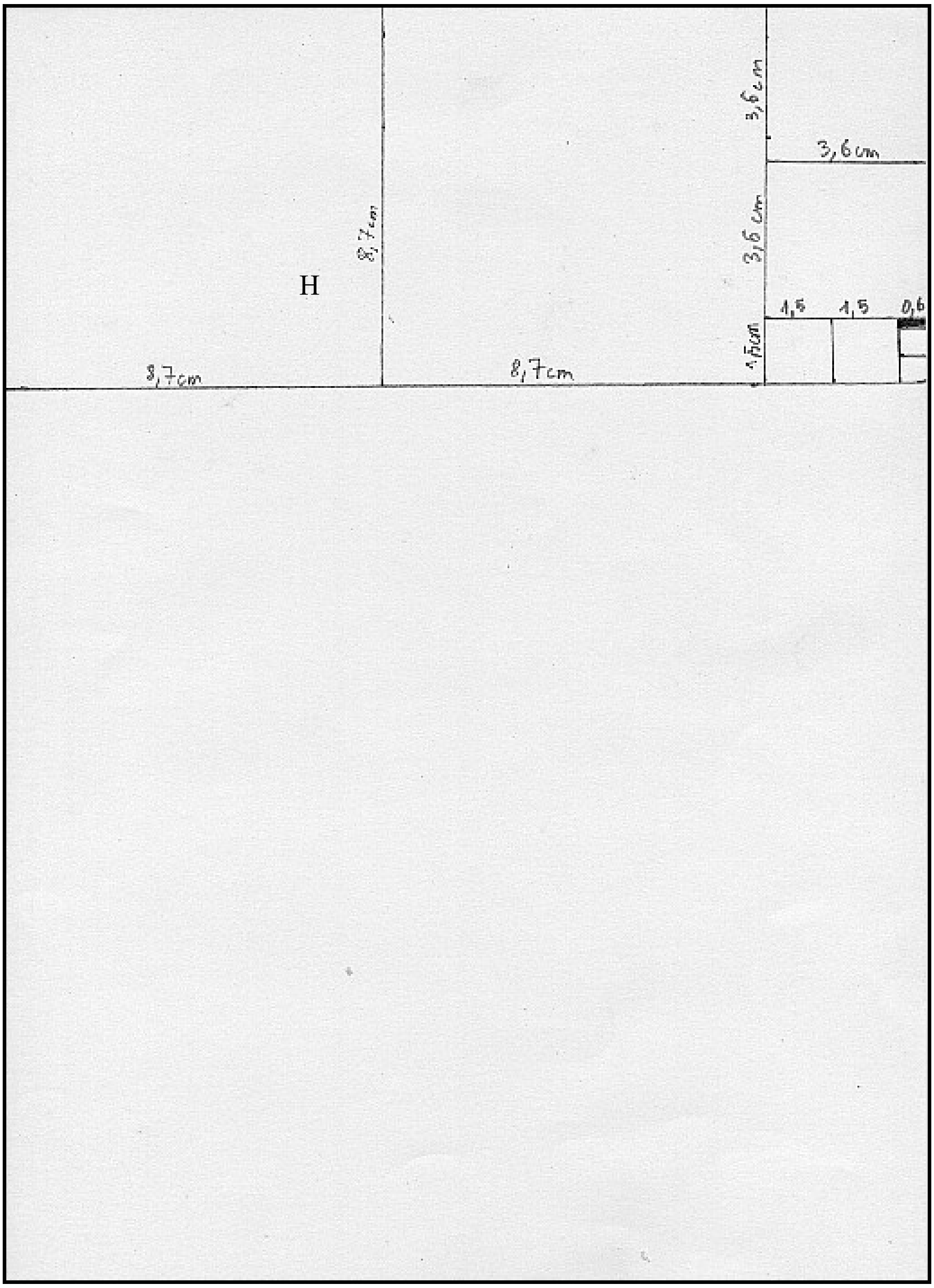
8. $\frac{2007}{2006} = \frac{2006}{2006} + \frac{1}{2006} = 1 + \frac{1}{2006} = [\,1\,;2006\,]$

En utilisant les touches $\boxed{\text{OP1}}$ et $\boxed{\text{OP2}}$, la calculatrice arrondit les nombres et on obtient :

$\frac{2007}{2006} = [\,1\,;2006\,,510\,,1\,,2\,,1\,,1\,,1\,,3\,,2\,,2\,,4\,,...]$, résultat inexact.

9.

10.



11.

	Consigne	Séquence de touches	partie entière
	Mettre $\frac{L}{l}$ dans la mémoire A	$\boxed{2}\boxed{9}\boxed{7}\boxed{/}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}\boxed{\text{ENTER}}$ **Attention**: $\boxed{/}$ n'est pas la touche $\boxed{\div}$	
1er tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	$\boxed{\text{OP1}}$	**1**
	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	$\boxed{\text{OP2}}$	
2ème tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	$\boxed{\text{OP1}}$	**2**
	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	$\boxed{\text{OP2}}$	
3ème tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	$\boxed{\text{OP1}}$	**2**
	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	$\boxed{\text{OP2}}$	
4ème tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	$\boxed{\text{OP1}}$	**2**
	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	$\boxed{\text{OP2}}$	
5ème tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	$\boxed{\text{OP1}}$	**2**
	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	$\boxed{\text{OP2}}$	
6ème tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	$\boxed{\text{OP1}}$	**2**
	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	$\boxed{\text{OP2}}$	

Au 6ème tour apparaît le message d'erreur

12. La fraction en escalier qui a été trouvée: $\frac{297}{210} = [1;2,2,2,2,2]$

Et $\left(\frac{297}{210}\right)^2 = 2{,}000204082$ $\quad\sqrt{2} \approx \mathbf{1{,}4142}13562$ *et* $\mathbf{\frac{297}{210}} \approx \mathbf{1{,}4142}85714$

Théoriquement le rapport $\frac{L}{l}$ pour les feuilles de format A4 (mais aussi A0, A1, A2, A3, A5, A6,...) est toujours égal à $\sqrt{2}$.

13. Programmer les touches OP1 et OP2 en tapant les séquences de touches

Attention : certaines touches nécessite l'utilisation de la touche 2nd pour être activées: elles sont notées entre crochets et non dans un cadre.
Exemple 1 : pour la touche [▸OP1] on appuiera sur la touche 2nd puis sur la touche OP1.
Exemple 2 : pour la touche OP1 on appuiera seulement sur la touche OP1.
La touche 2nd , en activant une deuxième fonction pour les touches, permet d'avoir un nombre réduit de touches sur la calculatrice.

Taper les deux séquences de touches

[▸OP1] {éventuellement effacer avec CLEAR} [MATH] ▸ ▸ ENTER MEMVAR ENTER) ENTER ENTER
(**iPart** affiche la partie entière (=extrait les entiers) du nombre qui est dans la mémoire A)

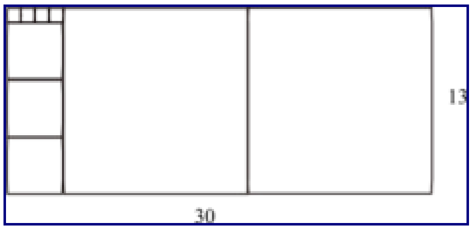
[▸OP2] {éventuellement effacer } ([MATH] ▸ ▸ ▸ ENTER MEMVAR ENTER)) [x^{-1}] STO▸ ENTER ENTER
(**fPart** calcule la partie décimale du nombre qui est dans la mémoire A et place le résultat dans la mémoire A : on peut ainsi recommencer à utiliser OP1 et OP2 avec ce nouveau nombre)

Utilisation : Mettre un nombre en mémoire (A), puis taper OP1 OP2 autant de fois que nécessaire (Voir le tableau à remplir dans la partie B).

Éléments pour la synthèse (activité *Fractionner les racines_fc 7-8CO*)

1 Une visualisation par un pavage de rectangle (tiré de wikipédia)

Un moyen simple de comprendre et visualiser une fraction continue consiste à imaginer un rectangle de dimension $L \times l$ tel que $\frac{L}{l} = x$ et de paver le rectangle par des carrés de côté l.



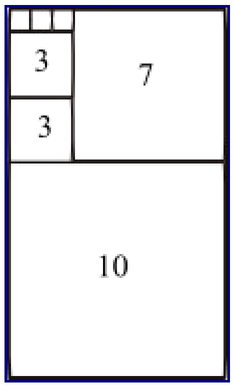
Si *x* est entier alors le pavage comporte exactement x carrés

Sinon, il reste une bande de dimension $l \times l_1$, que l'on cherche alors à paver avec des carrés de côté l_1 et ainsi de suite.
30/13=[2 , 3, 4]

Si x est rationnel - Euclide aurait dit : *si L et l sont des longueurs commensurables* - alors le processus va s'arrêter et il existe une unité de longueur l_n qui permet de mesurer *L* et *l*. Le nombre de carrés de chaque taille donne alors la suite des entiers du développement en fraction continue.

Ainsi, dans l'image ci-dessus, on pave le rectangle 30 x 13 par deux carrés de côtés 13, la bande restante de largeur 4 est pavée de 3 carrés de côté 4, et la bande restante de largeur 1 est pavée de 4 carrés de côté 1.

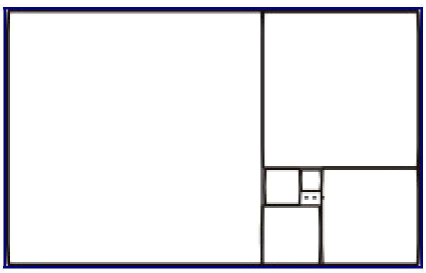
De plus la présentation du pavage pour un rationnel donne un moyen rapide de le déterminer, puisque l'on connaît l'unité de longueur permettant de *mesurer* L et l.



Ainsi dans l'image ci-contre on peut retrouver le rationnel dont le développement est [1, 1, 2, 3]. Les trois petits carrés donnent la taille du carré suivant (3). Les deux carrés moyens et le petit carré donnent la taille du carré plus grand (7), le carré plus grand et le carré moyen donnent le dernier carré (10) et les deux derniers carrés donne la longueur du rectangle (17).
[1 ; 1 , 2 , 3]=17/10

Si *x* n'est pas rationnel - Euclide aurait dit : *si L et l sont des longueurs non commensurables*, le processus se déroule à l'infini.

C'est le cas par exemple dans un rectangle d'or, pour $x = \varphi$ (nombre d'or) où l'on remarque que l'on ne peut placer qu'un carré dans chaque bande et confirme que $\varphi = [1, 1, 1, \cdots]$



Activités de consolidation (activité *Fractionner les racines_fc 7-8CO*)

«Fractionner les racines_Héron 8CO 9CO 10PO 11PO»

fichier : sm07_flr_heron_8co11po.pdf

Fiche de présentation

Titre de l'activité	Aux racines des fractions
Sous-titre	La méthode de Héron
Degré(s) concerné(s)	8-9 CO 10-11 PO
Durée estimée	3h
Résumé	Cette activité veut montrer les racines sous différentes formes et familiariser l'élève avec l'utilisation de certaines fonctions de la calculatrice (fraction-décimal, variable, mise en mémoire, programmation).
Contexte d'usage de la calculatrice	EXECUTER:l'élève est dans un contexte de mathématiques connues, la machine exécute des tâches acquises mais fastidieuses, longues ou répétitives (recherches de diviseurs, quotients et calculs de moyenne)
Contenus et compétences mathématiques visées	Diviseurs d'un nombre entier Valeurs approchées d'un nombre Utilisation d'un algorithme
Pré requis	Encadrement de nombres décimaux
Lien(s) avec les plans d'études et moyens d'enseignement	8CO "Construction des notions de racine carrée... Dans cette optique, l'encadrement d'une racine renforce la compréhension de cette notion" 9CO : Technique et Savoir-faire "Calculer une image à partir de l'expression algébrique d'une fonction" 9CO Usage de la calculatrice "Aprendre à utiliser les différentes touches et fonctions de la calculatrice"
Mots-clé	Racine carrée - Héron -
Source	

Énoncé élève

(activité *Fractionner les racines_Héron 8CO 9PO 10PO 11PO*)

(ces 4 premières pages ne sont pas à distribuer aux élèves, mais indique le déroulement de cette partie de l'activité et comprend le tableau – à remplir par les élèves – à photocopier sur une feuille acétate.) Cette feuille pourra être utilisée pour la mise en commun.

A) Multiples et diviseurs

1. Trouver et lister les diviseurs des nombres entiers inférieurs à 100.
   Pour cela répartir le travail entre les élèves, qui ont la calculatrice à disposition.
   Selon les classes et les degrés, ce travail peut être exécuté à la maison.
2. Mise en commun intermédiaire des résultats.
   (photocopier les 3 pages suivantes sur une feuille acétate).
   Que peut-on observer ?

B) Multiples et diviseurs

Définir la racine carrée pour les carrés parfaits.

Cette idée est reprise dans la suite de l'activité pour définir la racine d'un nombre qui n'est pas un carré parfait.

Le tableau à compléter par les élèves

Nombre	**Tous les diviseurs du nombre**
1	{ **1** }
2	{ 1, 2 }
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	
31	
32	
33	

34	
35	
36	
37	
38	
39	
40	
41	
42	
43	
44	
45	
46	
47	
48	
49	
50	
51	
52	
53	
54	
55	
56	
57	
58	
59	
60	
61	
62	
63	
64	
65	
66	
67	
68	

69	
70	
71	
72	
73	
74	
75	
76	
77	
78	
79	
80	
81	
82	
83	
84	
85	
86	
87	
88	
89	
90	
91	
92	
93	
94	
95	
96	
97	
98	
99	
100	

(activité *Fractionner les racines_Héron 8CO 9PO 10PO 11PO*)

C) L'idée de cette activité

Les diviseurs de 720 sont { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 48, 60, 72, 80, 90, 120, 144, 180, 240, 360, 720 }

$1 \cdot 720 = 720$ et $1 < \sqrt{720} < 720$

$2 \cdot 360 = 720$ et $2 < \sqrt{720} < 360$ car $2 \cdot 2 < 2 \cdot 360 = 720$ et $360 \cdot 360 > 2 \cdot 360 \geq 720$

$3 \cdot 240 = 720$ et $3 < \sqrt{720} < 240$

...

$16 \cdot 45 = 720$ et $16 < \sqrt{720} < 45$

$18 \cdot 40 = 720$ et $18 < \sqrt{720} < 40$

$20 \cdot 36 = 720$ et $20 < \sqrt{720} < 36$ car...

......

3. Quel est le meilleur encadrement, que l'on peut trouver par cette méthode, de la racine de 720 ?

On a des encadrements de plus en plus précis de la racine de 720, mais leur nombre est limité par le nombre de diviseurs de 720; cette activité indique comment poursuivre cette idée : on va chercher des couples de nombres (pas nécessairement entiers) dont le produit vaut 720, et dont la différence devient de plus en plus petite.
Pour trouver ces couples on va utiliser **une méthode répétitive** (un algorithme) qui n'emploie que les quatre opérations.

D) L'algorithme utilisé

1. Choisir un nombre de départ (ici ce sera 20 pour commencer).
2. Trouver le nombre dont le produit par le nombre choisi est 720
   (ici 36 car 20x36=720). On peut éventuellement arrondir ce nombre !
3. Faire la moyenne des deux nombres (28 est la moyenne de 20 et 36)
4. Recommencer, à l'étape 1, en choisissant la moyenne comme nombre de départ.
   - Trouver le deuxième nombre …
   - Faire la moyenne des deux nombres
   - …

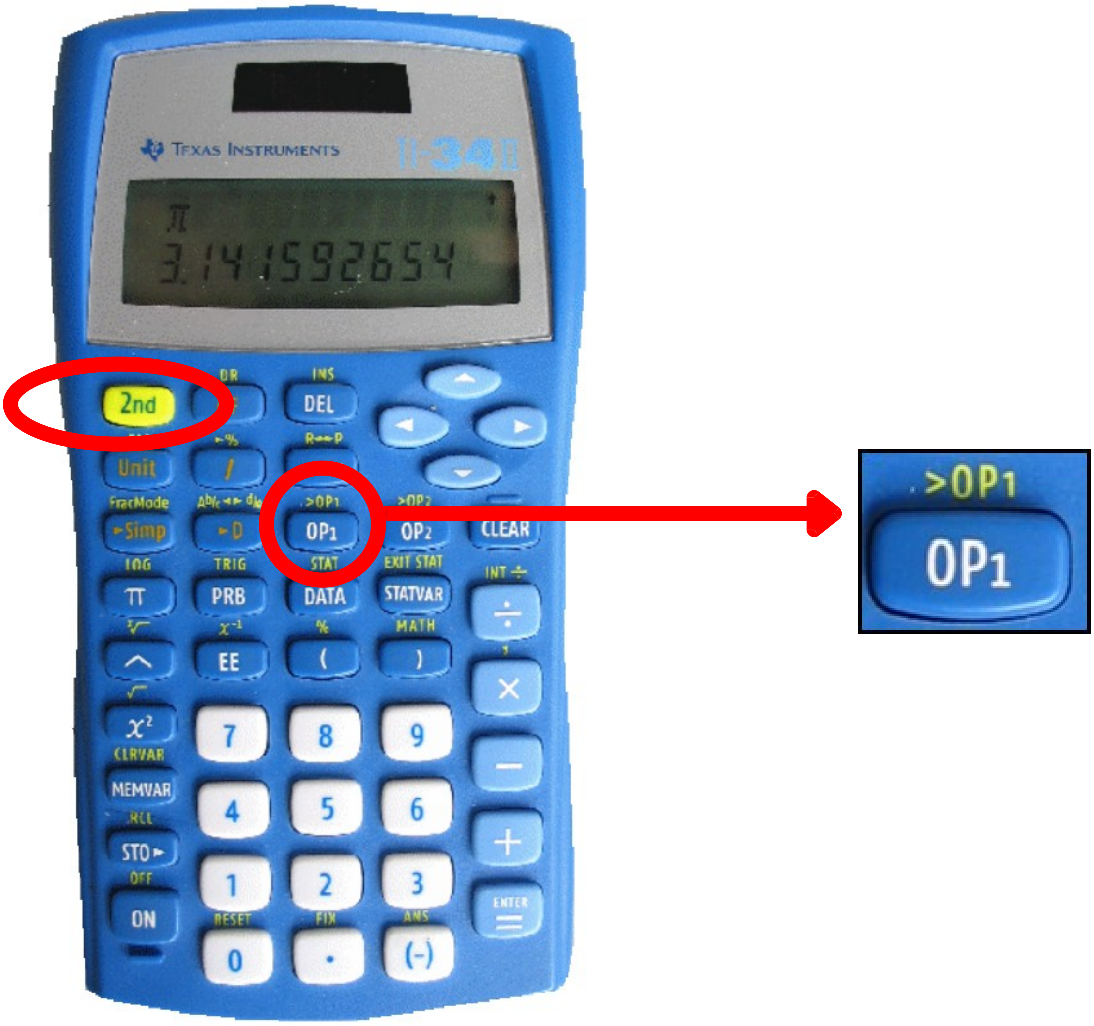
Et les décimales communes aux deux nombres donnent à chaque tour une approximation de la racine de 720.

au premier tour on a l'approximation $20 < \sqrt{(720)} < 36$
au deuxième tour on a l'approximation $25,7 < \sqrt{(720)} < 28$ (25,7 est un arrondi).

On recommencera ainsi jusqu'au nombre désiré de décimales communes.

E) Programmer les touches $\boxed{\text{OP1}}$ et $\boxed{\text{OP2}}$ en tapant les séquences de touches

Attention : certaines touches nécessite l'utilisation de la touche $\boxed{\text{2nd}}$ pour être activées: elles sont notées entre crochets et non dans un cadre.
Exemple 1 : pour la touche [▸OP1] on appuiera sur la touche $\boxed{\text{2nd}}$ puis sur la touche OP1.
Exemple 2 : pour la touche $\boxed{\text{OP1}}$ on appuiera seulement sur la touche OP1.
La touche $\boxed{\text{2nd}}$, en activant une deuxième fonction pour les touches, permet d'avoir un nombre réduit de touches sur la calculatrice.



Taper les deux séquences de touches

[▸OP1] {éventuellement effacer avec $\boxed{\text{CLEAR}}$} $\boxed{7}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{\div}\boxed{\text{MEMVAR}}\boxed{\text{ENTER}}\boxed{\text{STO▸}}\boxed{\triangleright}\boxed{\text{ENTER}}\boxed{\text{ENTER}}$ (cela trouve le deuxième nombre, quand le premier est dans A, et le mémorise dans B)

[▸OP2] {éventuellement effacer} $\boxed{(}\boxed{\text{MEMVAR}}\boxed{\text{ENTER}}\boxed{+}\boxed{\text{MEMVAR}}\boxed{\triangleright}\boxed{\text{ENTER}}\boxed{)}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{\text{STO▸}}\boxed{\text{ENTER}}\boxed{\text{ENTER}}$
(cela calcule la moyenne des deux nombres, le premier dans A et le deuxième dans B, et le mémorise en A)

F) Approcher la racine carrée de 720, en commençant par 20

4. Le tableau à compléter:

	Consigne	Séquence de touches	mémoire A	mémoire B (nombre affiché à l'écran)	Nombre de décimales communes à A et B	Encadrement de la racine carrée de 720 (arrondir éventuellement)	Approximation de la racine carrée de 720 (décimales communes à A et B)
1er tour	Choisir un nombre et le stocker en A	[2] [0] [STO▶] [ENTER]	$x_0 = 20$				
	Trouver le deuxième nombre	[OP1]	$x_1 = 20$	$y_1 = 36$	0	$20 < \sqrt{720} < 36$	Pas de décimales communes
2ème tour	Faire la moyenne et trouver le 2ème nombre…	[OP2] puis [OP1]	$x_2 = 28$	$y_2 =$	0		Pas de décimales communes
3ème tour	Faire la moyenne et trouver le 2ème nombre…	[OP2] puis [OP1]	$x_3 =$	$y_3 =$	1		26,8
4ème tour	Faire la moyenne et trouver le 2ème nombre…	[OP2] puis [OP1]	$x_4 =$	$y_4 =$	4		26,8328
5ème tour	Faire la moyenne et trouver le 2ème nombre…	[OP2] puis [OP1]	$x_5 =$	$y_5 =$	8		

Quand la calculatrice affiche le même nombre dans les mémoires A et B (c'est-à-dire $x_n=y_n$) calculer directement le carré de ce nombre avec la séquence de touches [x^2] [ENTER] . Écrire le résultat obtenu:

5. Est-il vrai que $(26{,}83281573)^2 = 720$? Pourquoi la calculatrice affiche-t-elle 720 ?

Et si on avait commencé avec un autre nombre que 20 ? Combien de tours seraient nécessaires si le nombre de départ était 25, 26 ou 1?
(tableaux à compléter page suivante)

G) Avec un autre nombre au départ de l'algorithme pour calculer $\sqrt{720}$

6. Compléter les tableaux suivants et faire des remarques

Avec 25

Séquence de touches	**mémoire A**	**mémoire B**
[2][5][STO▸][ENTER]	$x_0 = 25$	
[OP1]		
[OP2] puis [OP1]		
[OP2] puis [OP1]		
[OP2] puis [OP1]		

Avec 26

Séquence de touches	**mémoire A**	**mémoire B**
[2][6][STO▸][ENTER]	$x_0 = 26$	
[OP1]		
[OP2] puis [OP1]		
[OP2] puis [OP1]		
[OP2] puis [OP1]		

Avec 1

Séquence de touches	**mémoire A**	**mémoire B**
[1][STO▸][ENTER]	$x_0 = 1$	
[OP1]		
[OP2] puis [OP1]		
[OP2] puis [OP1]		

H) Les tableaux pour d'autres nombres à la place de 720

Recommencer le travail pour trouver une valeur approchée de la racine carrée d'un autre nombre : 2 par exemple. On ne va pas reprogrammer, les touches [OP1] et [OP2] pour chaque nouvelle racine carrée : il suffit de taper la séquence de touches suivante :

[▸OP1][DEL][DEL][DEL] {éventuellement [INS] pour le souligné}[MEMVAR][▸][▸][ENTER][ENTER][ENTER]

(la formule affichée doit être OP1 = C ÷ A → B)

(Il suffira alors de mettre un nombre dans la mémoire C pour qu'il joue le rôle de 720)

7. Par **exemple**, taper les deux séquences de touches pour mettre 2 dans la mémoire C et mettre 1 dans la mémoire A (1 sera le nombre de départ pour l'algorithme) :

[2][STO▸][▸][▸][ENTER]
[1][STO▸][ENTER]

et compléter le tableau ci-dessous : **attention,** quand on s'arrête et que l'approximation est affichée à l'écran, taper [x^2][ENTER] pour afficher le carré de l'approximation :

le nombre dont on cherche la racine carrée	**le nombre de départ pour utiliser l'algorithme**	**le nombre de « tours »**	**l'approximation de la racine carrée du nombre**	[x^2]
2	1			
2	1,5			
3	1			
5	1			
15	4			
99	10			
10001	100			

Calculer le carré de chaque approximation obtenue en tapant le nombre avec les touches : $1{,}414213562^2 = 1{,}999999999$. Expliquer !

Faire d'autres essais :

le nombre dont on cherche la racine carrée	**le nombre de départ pour utiliser l'algorithme**	**le nombre de « tours »**	**l'approximation de la racine carrée du nombre**	[x^2]

I) Présenter les résultats en écriture fractionnaire

Recommencer les calculs, en partant du nombre 2, en donnant les réponses sous la forme fractionnaire.
Transformer les nombres en fractions avec les séquences de touches
[A b/c ◂▸ d/e] [ENTER] deux fois de suite

Attention; régler l'affichage des fractions sur ***d/e*** avec la séquence de touches:
[FracMode] {choisir **d/e** avec ▸ } [ENTER]

8. Remplir le tableau, (s'assurer que 2 est dans la mémoire C) :

Consigne	Séquence de touches	mémoire A	mémoire B
Choisir un nombre et le stocker en A	[1] [STO▸] A	$x_0 = 1$	
Trouver le deuxième nombre.	[OP1]	$x_1 =$	$y_1 =$
Faire la moyenne et trouver le deuxième nombre	[OP2] [OP1]	$x_2 =$	$y_1 =$
...	[OP2] [OP1]	$x_3 =$	$y_2 =$
...	[OP2] [OP1]		

Calculer le carré des approximations obtenues ; on utilisera la touche [▸D] pour afficher le nombre dans l'écriture décimale.

Vérifier, sans la calculatrice, que le produit des nombres dans les mémoires A et B est toujours égal à 2, c'est-à-dire calculer : $x_1 \cdot y_1$; $x_2 \cdot y_2$; $x_3 \cdot y_3$;...

Commentaires pour le maître

(activité *Fractionner les racines_Héron 8CO 9PO 10PO 11PO*)

<table>
<tr><td>Analyse à priori de l'activité
(enjeux de l'activité, démarches possibles, difficultés, relances, mise en commun)</td><td><u>Intentions</u>
À l'aide d'un algorithme très simple, il s'agit de trouver une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre.
La calculatrice va permettre de faciliter les calculs nombreux et répétitifs: il est aussi possible de « programmer » certaines touches.
Le document est complet: il peut être utilisé en autonomie, sans explication supplémentaire.
<u>Démarches possibles</u>
-
-

<u>Relances</u>
- Utiliser l'activité de consolidation A) pour s'assurer que l'élève maîtrise la programmation des touches $\boxed{\text{OP1}}$ et $\boxed{\text{OP2}}$.

<u>Mise en commun</u>

<u>Variables didactiques</u></td></tr>
<tr><td>Proposition(s) de déroulement</td><td>Toute l'activité se déroule en classe, par groupe de 2.
Pour certaines classes, ou si on veut se concentrer sur les parties utilisant plus spécifiquement la calculatrice, la recherche sur les diviseurs des nombres entiers inférieurs à 100 pourra être fait en devoir à la maison.</td></tr>
<tr><td>Prolongements possibles</td><td>● Activité sur l'écriture d'un nombre sous la forme d'une fraction continue «Fractionner les racines_f».
● Activité 08 de la brochure wwwedu.ge.ch/sm2007</td></tr>
</table>

Corrigé détaillé

(activité *Fractionner les racines_Héron 8CO 9PO 10PO 11PO*)

2.

Nombre	**Tous les diviseurs du nombre**
1	{ **1** }
2	{ 1, 2 }
3	{ 1, 3 }
4	{ 1, **2**, 4 }
5	{ 1, 5 }
6	{ 1, 2, 3, 6 }
7	{ 1, 7 }
8	{ 1, 2, 4, 8 }
9	{ 1, **3**, 9 }
10	{ 1, 2, 5, 10 }
11	{ 1, 11 }
12	{ 1, 2, 3, 4, 6, 12 }
13	{ 1, 13 }
14	{ 1, 2, 7, 14 }
15	{ 1, 3, 5, 15 }
16	{ 1, 2, **4**, 8, 16 }
17	{ 1, 17 }
18	{ 1, 2, 3, 6, 9, 18 }
19	{ 1, 19 }
20	{ 1, 2, 4, 5, 10, 20 }
21	{ 1, 3, 7, 21 }
22	{ 1, 2, 11, 22 }
23	{ 1, 23 }
24	{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 }
25	{ 1, **5**, 25 }
26	{ 1, 2, 13, 26 }
27	{ 1, 3, 9, 27 }
28	{ 1, 2, 4, 7, 14, 28 }
29	{ 1, 29 }
30	{ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 }

31	{ 1, 31 }
32	{ 1, 2, 4, 8, 16, 32 }
33	{ 1, 3, 11, 33 }
34	{ 1, 2, 17, 34 }
35	{ 1, 5, 7, 35 }
36	{ 1, 2, 3, 4, **6**, 9, 12, 18, 36 }
37	{ 1, 37 }
38	{ 1, 2, 19, 38 }
39	{ 1, 3, 13, 39 }
40	{ 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 }
41	{ 1, 41 }
42	{ 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42 }
43	{ 1, 43 }
44	{ 1, 2, 4, 11, 22, 44 }
45	{ 1, 3, 5, 9, 15, 45 }
46	{ 1, 2, 23, 46 }
47	{ 1, 47 }
48	{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 }
49	{ 1, **7**, 49 }
50	{ 1, 2, 5, 10, 25, 50 }
51	{ 1, 3, 17, 51 }
52	{ 1, 2, 4, 13, 26, 52 }
53	{ 1, 53 }
54	{ 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54 }
55	{ 1, 5, 11, 55 }
56	{ 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56 }
57	{ 1, 3, 19, 57 }
58	{ 1, 2, 29, 58 }
59	{ 1, 59 }
60	{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 }
61	{ 1, 61 }
62	{ 1, 2, 31, 62 }
63	{ 1, 3, 7, 9, 21, 63 }
64	{ 1, 2, 4, **8**, 16, 32, 64 }
65	{ 1, 5, 13, 65 }

66	{ 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66 }
67	{ 1, 67 }
68	{ 1, 2, 4, 17, 34, 68 }
69	{ 1, 3, 23, 69 }
70	{ 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70 }
71	{ 1, 71 }
72	{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72 }
73	{ 1, 73 }
74	{ 1, 2, 37, 74 }
75	{ 1, 3, 5, 15, 25, 75 }
76	{ 1, 2, 4, 19, 38, 76 }
77	{ 1, 7, 11, 77 }
78	{ 1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78 }
79	{ 1, 79 }
80	{ 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80 }
81	{ 1, 3, **9**, 27, 81 }
82	{ 1, 2, 41, 82 }
83	{ 1, 83 }
84	{ 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84 }
85	{ 1, 5, 17, 85 }
86	{ 1, 2, 43, 86 }
87	{ 1, 3, 29, 87 }
88	{ 1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88 }
89	{ 1, 89 }
90	{ 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90 }
91	{ 1, 7, 13, 91 }
92	{ 1, 2, 4, 23, 46, 92 }
93	{ 1, 3, 31, 93 }
94	{ 1, 2, 47, 94 }
95	{ 1, 5, 19, 95 }
96	{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96 }
97	{ 1, 97 }
98	{ 1, 2, 7, 14, 49, 98 }
99	{ 1, 3, 9, 11, 33, 99 }
100	{ 1, 2, 4, 5, **10**, 20, 25, 50, 100 }

Les nombres, qui ont un nombre impair de diviseurs, sont des carrés parfaits.
Les diviseurs vont par paire; celui qui reste seul est la racine du nombre.

$1 \cdot 12 = 12$ $\quad 2 \cdot 6 = 12$ $\quad 3 \cdot 4 = 12$

$1 \cdot 16 = 16$ $\quad 2 \cdot 8 = 16$ $\quad 4 \cdot 4 = 16$

4 est la racine carrée de 16.

3.

$1 \cdot 720 = 720$ et $1 < \sqrt{720} < 720$

$2 \cdot 360 = 720$ et $2 < \sqrt{720} < 360$ car $2 \cdot 2 < 2 \cdot 360 = 720$ et $360 \cdot 360 > 2 \cdot 360 \geq 720$

$3 \cdot 240 = 720$ et $3 < \sqrt{720} < 240$

...

$16 \cdot 45 = 720$ et $16 < \sqrt{720} < 45$

$18 \cdot 40 = 720$ et $18 < \sqrt{720} < 40$

$20 \cdot 36 = 720$ et $20 < \sqrt{720} < 36$ car $20 \cdot 20 < 20 \cdot 36 = 720$ et $36 \cdot 36 > 20 \cdot 36 = 720$

$24 \cdot 30 = 720$ et $24 < \sqrt{720} < 30$

La meilleure approximation que l'on peut obtenir par cette méthode est donc
$24 < \sqrt{720} < 30$

4.

	Consigne	Séquence de touches	mémoire A	mémoire B (nombre affiché à l'écran)	Nombre de décimales communes à A et B	Encadrement de la racine carrée de 720 (arrondir éventuellement)	Approximation de la racine carrée de 720 (décimales communes à A et B)
1er tour	Choisir un nombre et le stocker en A	2 0 STO▸ ENTER	$x_0 = 20$				
	Trouver le deuxième nombre	OP1	$x_1 = 20$	$y_1 = 36$	0	$20 < \sqrt{720} < 36$	Pas de décimales communes
$2^{ème}$ tour	Faire la moyenne et trouver le $2^{ème}$ nombre…	OP2 puis OP1	$x_2 = 28$	$y_2 = 25{,}71428571$	0	$25{,}7 < \sqrt{720} < 28$ (ou $25 < \sqrt{720} < 28$)	Pas de décimales communes
$3^{ème}$ tour	Faire la moyenne et trouver le $2^{ème}$ nombre…	OP2 puis OP1	$X_3 = 26{,}85714286$	$Y_3 = 26{,}80851064$	1	$26{,}80 < \sqrt{720} < 26{,}86$ (ou $26{,}8 < \sqrt{720} < 26{,}9$	26,8
$4^{ème}$ tour	Faire la moyenne et trouver le $2^{ème}$ nombre…	OP2 puis OP1	$X_4 = 26{,}83282675$	$Y_4 = 26{,}83280471$	4	$26{,}83280 < \sqrt{720} < 26{,}83283$	26,8328
$5^{ème}$ tour	Faire la moyenne et trouver le $2^{ème}$ nombre…	OP2 puis OP1	$X_5 = 26{,}83281573$	$y_5 = 26{,}83281573$	8	$\sqrt{720}$ est compris entre 26,83281572 et 26,83281574	26,83281573

5. $26{,}83281573^2 = 720$ n'est pas une égalité vraie car le carré du nombre 26,83281573 se termine par un 9.

$26{,}83281573^2 =$ **720 , 000 000 0**00 135 432 9 (en gras les 10 chiffres que peut afficher la calculatrice)

Cette calculatrice garde 2 (?) chiffres de plus en mémoire; mais ici ces deux chiffres valent 0, donc le dernier chiffre affiché sera 0.

On pourra calculer $(26{,}832815729)^2$ *et* $(26{,}832815731)^2$

$\sqrt{720} \approx$ **26 , 832 815 72**9 997 476 4

6. Avec un autre nombre au départ de l'algorithme pour calculer $\sqrt{720}$

Avec 25

Séquence de touches	**mémoire A**	**mémoire B**
2 5 STO▸ ENTER	$x_0 = 25$	
OP1	$x_1 = 25$	$y_1 = 28{,}8$
OP2 puis OP1	$x_2 = 26{,}9$	$y_2 = 26{,}76579926$
OP2 puis OP1	$x_3 = 26{,}83289963$	$y_3 = 26{,}83273183$
OP2 puis OP1	$x_4 = 26{,}83281573$	$y_4 = 26{,}83281573$

Avec 26

Séquence de touches	**mémoire A**	**mémoire B**
2 6 STO▸ ENTER	$x_0 = 26$	
OP1	$x_1 = 26$	$y_1 = 27{,}69230769$
OP2 puis OP1	$x_2 = 26{,}84615385$	$y_2 = 26{,}81948424$
OP2 puis OP1	$x_3 = 26{,}83281904$	$y_3 = 26{,}83281242$
OP2 puis OP1	$x_4 = 26{,}83281573$	$y_4 = 26{,}83281573$

Avec 1

Séquence de touches	**mémoire A**	**mémoire B**
1 STO▸ ENTER	$x_0 = 1$	
OP1	$x_1 = 1$	$y_1 = 720$
OP2 puis OP1	$x_2 = 360{,}5$	$y_2 = 1{,}997226075$
OP2 puis OP1	$x_3 = 181{,}248613$	$y_3 = 3{,}972444191$
OP2 puis OP1	$x_4 = 92{,}61052861$	$y_4 = 7{,}77449401$
	50,19251131	14,34476939
	32,26864035	22,31268477
	27,29066256	26,38265005
	26,83665631	26,8289757
	26,832816	26,83281546
	$x_{10} = 26{,}83281573$	$y_{10} = 26{,}83281573$

Remarques:

- On finit toujours par obtenir la même approximation : c'est rassurant!!
- Même avec un nombre de départ « très éloigné » de la racine, on obtient **très rapidement** une valeur approchée satisfaisante : on dit que l'algorithme converge rapidement.
- Avec du temps et une certaine rigueur pour éviter les erreurs il est possible d'utiliser cet algorithme en faisant les calculs à la main : il faut diviser, additionner, faire une moyenne arithmétique et arrondir.

7. Le tableau rempli avec les nombres proposés

le nombre dont on cherche la racine carrée	**le nombre de départ pour utiliser l'algorithme**	**le nombre de « tours »**	**l'approximation de la racine carrée du nombre**	$\boxed{x^2}$
2	1	5	1,414213562	2
2	1,5	4	1,414213562	3
3	1	6	1,732050808	3
5	1	6	2,236067978	5
15	4	4	3,872983346	15
99	10	4	9,949874371	99
10001	100	3	100,0049999	10001

Calculs des carrés des approximations obtenues : quand on calcule de suite le carré de l'approximation affichée après l'emploi répété de l'algorithme on obtient le nombre dont on cherche la racine (exemple 2) mais la calculatrice affiche « 1,999999999 » quand on tape $\boxed{1}\boxed{\cdot}\boxed{4}\boxed{1}\boxed{4}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{x^2}\boxed{\text{ENTER}}$

Cet exemple montre que la calculatrice garde des chiffres en réserve.
En voici la preuve:
Refaire l'algorithme pour le calcul de la racine de 2, avec 1 pour nombre de départ.
Quand arrive l'approximation 1,414213562 taper la séquence de touche
$\boxed{-}\boxed{1}\boxed{\cdot}\boxed{4}\boxed{1}\boxed{4}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{2}\boxed{\text{ENTER}}$ pour voir s'afficher le résultat $3,71 \times 10^{-10}$, qui précise les chiffres en réserve.

$\sqrt{2} \approx$ **1,414 213 562** 373 095 048 801
On peut remarquer que les chiffres en réserve ne sont pas tous exacts.

8.

Consigne	Séquence de touches	mémoire A	mémoire B
Choisir un nombre et le stocker en A	1 STO▶ A	$x_0 = 1$	
Trouver le deuxième nombre.	OP1	$x_1 = 1$	$y_1 = 2$
Faire la moyenne et trouver le deuxième nombre	OP2 OP1	$x_2 = \frac{3}{2}$	$y_1 = \frac{4}{3}$
...	OP2 OP1	$x_3 = \frac{17}{12}$	$y_2 = \frac{24}{17}$
...	OP2 OP1	$\frac{577}{408}$	$\frac{816}{577}$

$\frac{816}{577} = \mathbf{1{,}414211}1438$ et $\sqrt{\mathbf{2}} \approx 1{,}414\,213\,562\,373\,095\,048\,801$

9. $x_1 \cdot y_1 = 1 \bullet 2 = 2$ $x_2 \cdot y_2 \frac{3}{2} \bullet \frac{4}{3} = \frac{4}{2} = 2$ $x_3 \cdot y_3 \frac{17}{12} \bullet \frac{24}{17} = \frac{24}{12} = 2$ ...

Éléments pour la synthèse

(activité *Fractionner les racines_Héron 8CO 9PO 10PO 11PO*)

1 Héron d'Alexandrie, fin du 1er siècle après J.C.

Sans doute égyptien, il est pétri de cultures grecque et babylonienne. Son savoir est encyclopédique. Il écrit de nombreux traités dont quatorze nous sont parvenus. Il est aussi un inventeur de talent et conçoit d'innombrables machines mues par des mouvements de fluides, qu'il décrit dans son ouvrage *Pneumatica*. Il fabrique également un ancêtre du thermomètre. Dans *Catroptica*, il énonce le principe de réflexion de la lumière, qu'il justifie par le principe aristotélicien selon lequel la nature choisit le chemin le plus court. Ses travaux mathématiques concernent avant tout la géométrie et ses applications pratiques.
Ses recherches et résultats sont réunis dans un important traité sur la manière de mesurer et de diviser les différentes figures, retrouvé à Constantinople en 1896 : *Metrica*. On y trouve en particulier l'aire du triangle. Cette formule est déjà connue d'Archimède. Héron en donne une démonstration. Grâce aux mathématiciens arabes, elle portera son nom.

2 Formule de Héron pour le triangle

Soit un triangle de mesures respectives a, b et c. L'aire de ce triangle est :

$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où p désigne le demi périmètre du triangle.

3 Approximation de la racine carrée

On attribue à Héron une formule récurrente d'approximation de la racine carrée d'un nombre N, déjà connue des Babyloniens 300 à 400 années auparavant, et qui s'écrit de nos jours au moyen des suites numériques :

$$r_{n+1} = \frac{(r_n + \frac{N}{r_n})}{2}$$

Cet algorithme est strictement équivalent au processus d'approximation de Newton appliqué à la fonction $f(x) = x^2 - N$.

4 Traduction du texte de Héron d'Alexandrie, Metrica, 1, 8

> Puisque 720 n'a pas de côté rationnel, nous prendrons le côté (*) avec une différence minime. Voici comment: puisque le carré le plus voisin de 720 est 729, dont le côté est 27 : cela fait 26 + 2/3; ajoute 27: cela fait 53 + 2/3. La moitié de ce nombre: cela fait 26 + 1/2 + 1/3 (**) . Car 26 + 1/2 + 1/3 multiplié par lui-même fait 720 + 1/36 : en sorte que la différence est égale à la 1/36ème partie de l'unité. Et si nous voulons que la différence soit encore plus petite que1/36, nous poserons à la place de 729 le nombre que nous avons maintenant trouvé: 720 + 1/36, et, en faisant les mêmes opérations, nous trouverons une différence qui sera bien plus petite que 1/36.

(*) Pour les Grecs, le côté est ce que nous appelons aujourd'hui la racine carrée.
(**) Cette façon d'exprimer les fractions par une somme de plusieurs fractions de numérateurs égal à l'unité remonte aux Egyptiens, la seule exception étant la fraction 2/3, qui est exprimée ainsi et non pas comme on l'aurait attendu.

Activités de consolidation

(activité *Fractionner les racines_Héron 8CO 9PO 10PO 11PO*)

A) Utiliser la programmation des touches OP1 OP2 pour remplir un tableau de valeurs d'une fonction:

x							
f(x) = 2/3 x^2 +5x-1							

x							
f(x) = x^3 - x-1							

x							
f(x) = π x							

x							
f(x) = $\frac{x-2}{x+5}$							

x							
f(x) = $\sqrt{1+\frac{1}{x}}$							

Activités de consolidation : aide

(activité *Fractionner les racines_Héron 8CO 9PO 10PO 11PO)*

A) Une fois que les touches [OP1][OP2] ont été programmées, on peut les **tester** en prenant une valeur « simple de x: par exemple x=0 quand la fonction est un polynôme.

Les fonctions **linéaires** (du type y=ax, par exemple y = $\pi\ x$) peuvent être programmées simplement par la séquence de touches : [×][π] et on utilisera directement la touche [OP1] ou [OP2] pour calculer l'image d'un nombre.
Quand il n'y a qu'une opération il n'est pas nécessaire d'utiliser la touche [MEMVAR]

Utiliser la touche [/] pour entrer 2 / 3.comme une fraction ; la calculatrice fera des calculs de fractions lorsque cela sera possible.

« Le nombre d'or, 8CO-13PO»

Fichier : sm07_flr_nombredor_8co13po.pdf

Fiche de présentation

Titre de l'activité	Nombre d'or et suite de Fibonacci.
Sous-titre	
Degré(s) concerné(s)	De 8 CO à 3 PO
Durée estimée	2 ou 3 périodes
Résumé	En utilisant (sans le savoir) le développement en fraction continue du nombre d'or, montrer que les quotients de deux nombres de Fibonacci successifs tendent vers le nombre d'or. Il faut au préalable avoir introduit les nombres de Fibonacci.
Type d'usage de la calculatrice	Pratique de l'utilisation de la machine (gestion des parenthèses emboitées), déduction
Contenus mathématiques visés	Quelques propriétés du nombre d'or et de la suite de Fibonacci. Idée de limite de suites.
Pré requis	Nombres de Fibonacci,
Liens avec le plan d'études et moyens d'enseignement	Pratique du calcul de fractions, mise en équation et résolution de d'équation du deuxième degré.
Mot-clé	Nombre d'or, fraction continue
Source	

Énoncé élève : Le nombre d'or.

Que peut bien valoir le nombre suivant?

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots}}}}}}}}}$$

Exercice 1 :

Trouver un moyen de calculer efficacement avec votre machine de plus en plus « d'étages ».
Que remarquez-vous?

Exercice 2 :

Ramener sous forme de fractions les nombres obtenus en remplaçant ce qu'il y a après le premier « + »
par 0, puis faire de même avec le deuxième « + », puis avec le troisième, etc.

$$1+0=1 \qquad 1+\frac{1}{1+0}=2 \qquad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+0}}=\frac{3}{2}$$

Calculer les 10 premiers termes. Que remarquez-vous?

Question subsidiaire : Qu'elle est la valeur du nombre remplacé par « 0 » à chaque étape?

Exercice 3 :

Notons $\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots}}}}}}}}}$

Pouvez-vous trouver, en vous aidant de l'exercice précédent, une équation que doit satisfaire Φ. Résoudre cette équation.

Énoncé élève : Le nombre d'or une autre approche.

Exercice 1:
Que peut bien valoir le nombre obtenu par la recette suivante?

Premier pas : taper la touche [1]

Deuxième pas : taper la suite de touches [2nd] [x^{-1}] [+] [1] [ENTER]

Troisième pas : noter le résultat (mais sans l'effacer de la machine)

Répéter les deuxièmes et troisièmes pas.

Que remarquez-vous?

Donnez l'expression arithmétique, sans la simplifier, que vous venez de calculer à la machine après un pas, après deux pas, après trois pas.

Après avoir répété une infinité de fois la recette, voilà le nombre qu'on a cherché à calculer~:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}}$$

Exercice 2 :
Ramener sous forme de fractions les nombres obtenus en remplaçant ce qu'il y a après le premier ``+"
par 0, puis faire de même avec le deuxième ``+", puis avec le troisième, etc.

$$1+0=1 \qquad 1+\frac{1}{1+0}=2 \qquad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+0}}=\frac{3}{2}$$

Calculer les 10 premiers termes. Que remarquez-vous?

Question subsidiaire : Qu'elle est la valeur du nombre remplacé par
``0" à chaque étape?

Exercice 3 :

$$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}}$$

Pouvez-vous trouver, en vous aidant de l'exercice précédent, une équation que doit satisfaire Φ. Résoudre cette équation.

Commentaires pour le maître

(activité *fractionner les racines, le nombre d'or, 8CO-13PO*)

Analyse à priori de l'activité (enjeux de l'activité, démarches possibles, difficultés, relances, mise en commun)	Au début de l'activité, deux difficultés peuvent apparaître. La première est d'ordre théorique, puisqu'il y a une infinité de calculs à faire. Les élèves ne sauront pas comment gérer les « ... » Ils devraient néanmoins réussir à imaginer de s'arrêter après un certain nombre de barres de fractions. La seconde d'ordre technique est d'arriver à calculer efficacement ces approximations successives avec une machine. En effet pour éviter des parenthésages successifs, il faut commencer par calculer le dernier dénominateur. Dans le deuxième exercice, il faut insister sur l'exigence d'obtenir une fraction.
Proposition(s) de déroulement	Toute l'activité se déroule en classe par groupe de 2 à 3.
Prolongements possibles	L'idée de limite de suite et de fraction continue.

Corrigé (activité ***Le nombre d'or,*** *8CO-13PO*)

Enjeux de l'activité :

Le but de cette page d'exercices est de faire découvrir un lien entre les nombres de Fibonacci et le nombre d'or. Plus précisément de permettre à l'élève de se convaincre, par des manipulations arithmétiques, que la limite du rapport entre deux nombres de Fibonacci successifs est égale au nombre d'or. Il est important d'avoir présenté auparavant la suite de Fibonacci ainsi que le nombre d'or soit par des activités introductives, soit par une présentation préalable pouvant contenir des informations non seulement mathématiques, mais aussi culturelles.

Éléments de réponses

Le but du premier exercice est de se convaincre numériquement que la suite obtenue en tronquant après un certain nombre d'étapes converge.

$x_1 = 1 + 0$; $x_2 = 1 + \frac{1}{1+0}$; $x_3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+0}}$; $x_4 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+0}}}$; … Cette suite converge.

L'exemple ci-dessus est un exemple de troncature, c'est-à-dire le fait de remplacer la fin d'une expression arithmétique par zéro.

Pour ce faire, il faut être capable d'employer sa machine efficacement pour calculer ces approximations.

Une alternative : La deuxième feuille de données est une entrée alternative dans le problème.
On a remplacé l'exercice 1 par un exercice inversé.
Le but de cet exercice est de faire découvrir à l'élève la fraction continue

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\dots}}}}}}}}}$$

Dans cette approche alternative, il est impératif de mettre en commun le travail des élèves après le premier exercice pour pouvoir dégager la formule précédente avant de commencer les exercices 2 et 3. Il faut aussi faire apparaître le fait que les calculs faits sur machine approchent le nombre en question.

Le deuxième exercice doit permettre de voir que les troncatures successives sont des quotients de nombres de Fibonacci successifs par calcul (on peut même le démontrer avec des élèves plus âgés en faisant une induction plus ou moins formelle).
Essayer de faire remarquer qu'il n'est pas nécessaire de refaire tous les calculs à chaque pas.
En effet ce que l'on trouve sous la première barre de fraction est exactement le terme que l'on a calculé précédemment.

Si

$x_1 = 1 + 0$; $x_2 = 1 + \frac{1}{1+0}$; $x_3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+0}}$; $x_4 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+0}}}$; $x_5 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+0}}}}$; …

On peut remarquer que

$x_1 = 1 + 0$; $x_2 = 1 + \frac{1}{x_1}$; $x_3 = 1 + \frac{1}{x_2}$; $x_4 = 1 + \frac{1}{x_3}$; $x_5 = 1 + \frac{1}{x_4}$; …

En faisant les calculs on obtient

$x_1 = 1 = \frac{1}{1}$; $x_2 = 2 = \frac{2}{1}$; $x_3 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $x_4 = 1 + \frac{1}{x_3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$; $x_5 = 1 + \frac{1}{x_4} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$; …

On remarque que x_i est le quotient de F_{i+1} par F_i.

La preuve de cette remarque se fait par induction, puisque, par hypothèse d'induction, $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}.$$

La question subsidiaire est là pour faire prendre conscience que la partie négligée est toujours la même et est égale au nombre cherché.

En utilisant la même idée que celle des calculs réutilisables du deuxième exercice ainsi que la réponse à la question subsidiaire, le troisième exercice permet d'arriver à la formule $\Phi = 1 + 1/\Phi$ et de résoudre cette équation.

La question intermédiaire

En multipliant par Φ on obtient l'équation $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, qui est l'équation dont les deux solutions sont

$$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Reste à mettre les choses ensemble : Le nombre représenté Φ par l'expression de départ est égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, puisque $\Phi > 1$, la nième troncature de l'expression de départ est égale à $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ et numériquement on voit que ces troncatures tendent vers Φ.

Un seul point resterait à développer : peut-on montrer la convergence facilement? Une preuve de cela est donnée dans l'activité « limite de F_{n+1} / F_n ». Néanmoins une preuve formelle de la convergence de cette suite n'est pas utile à ce niveau.

Cela peut déboucher sur une explication sur la notion de fractions continues.

Rappelons brièvement ce qu'est une fraction continue.

Pour cela rappelons deux notations.

Pour un nombre positif s, notons [s] le plus grand entier plus petit que s et {s} la partie fractionnaire de s.

Par exemple pour s = 2,345, [s] = 2 et {s} = 0,345.

Il est clair que s = [s] + {s}. De plus dans le cas où s est une fraction s = p/q, [s] est le résultat de la division entière de p par q et {s} est le reste de cette même division entière.

On appelle fraction continue d'un nombre s l'expression finie ou infinie obtenue par le procédé suivant :

Comme $s = [s] + \{s\}$ et que $0 \leq \{s\} < 1$, si $\{s\} = 0$, on s'arrête, sinon on peut écrire $s = [s] + 1/\{s\}^{-1}$ avec maintenant $1/\{s\}^{-1} > 1$. On peut donc répéter pour $1/\{s\}^{-1}$ la même décomposition $1/\{s\}^{-1} = [1/\{s\}^{-1}] + \{1/\{s\}^{-1}\}$.

$s = [s] + 1/([\{s\}^{-1}] + \{1/\{s\}^{-1}\})$ avec à nouveau $0 \leq \{1/\{s\}^{-1}\} < 1$. Rien n'empêche de continuer ce

procédé tant que la partie fractionnaire obtenue au pas précédent est non nulle.
Exemples : 96/67 = 1 + 29/67 = 1 + 1/(67/29) = 1 + 1/(2+9/29) = 1 + 1/(2+1/(29/9))
= 1+1/(2+1/(3+2/9))
= 1 + 1/(2+1/(3+1/(9/2))) = 1 + 1/(2+1/(3+1/(4 + 1/2))); on obtient donc

$$\frac{96}{67} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}$$

Pour 2,345 on obtient :
2,345 = 2 + 0,345 = 2 + 1/(1000/345) = 2 + 1/(2 +310/ 345) = 2 + 1/(2 + 1/ (345/ 310))
= 2 + 1/(2 + 1/ (1 + 35/ 310)) = 2 + 1/(2 + 1/ (1 + 1/(310/ 35))) = 2 + 1/(2 + 1/ (1 + 1/(8 + 30/ 35)))
= 2 + 1/(2 + 1/ (1 + 1/(8 + 1/(35/ 30)))) = 2 + 1/(2 + 1/ (1 + 1/(8 + 1/(1 + 5/ 30))))
= 2 + 1/(2 + 1/ (1 + 1/(8 + 1/(1 + 1/ 6)))).

Il est assez facile de voir que ce procédé se termine après un nombre fini d'étapes si et seulement si le nombre dont on est parti est une fraction.

Dans le cas de 1< $\Phi < 2$, sa décomposition en fraction continue est
$\Phi = [\Phi] + \{\Phi\} = 1 + (\Phi-1) = 1 + 1/(\Phi-1)^{-1} = 1 + 1/(\Phi^{-1})^{-1} = 1 + 1/\Phi$; puisque $\Phi-1 = 1/\Phi$.

En réitérant ce calcul, on obtient bien l'expression

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ldots}}}}}}}}}$$

«Fractionner les racines_fractions continues 9CO »
fichier : sm07_flr_fc_9CO.pdf

Fiche de présentation

Titre de l'activité	Fractions en escaliers
Sous-titre	Des fractions pour approcher $\sqrt{3}$
Degré(s) concerné(s)	9 CO
Durée estimée	3h
Résumé	Ces activités veulent montrer les racines sous différentes formes et familiariser l'élève avec l'utilisation de certaines fonctions de la calculatrice (fraction-décimal, programmation).
Contexte d'usage de la calculatrice	RECHERCHER/EXPLORER : l'élève aborde des notions mathématiques nouvelles ou les travaille sous un angle qu'il ne connaît pas encore ; la calculatrice permet de découvrir, de conjecturer, de produire et d'effectuer des calculs à interpréter
Contenus et compétences mathématiques visées	Recherche de valeurs approchées. Utilisation d'un algorithme
Pré requis	Théorème de Pythagore, calculs avec des fractions, PGCD et calcul algébrique élémentaire.
Lien(s) avec les plans d'études et moyens d'enseignement	789CO Nombres et Opérations: "...On leur fera découvrir graduellement les différentes écritures des nombres : ... et autres écritures à l'aide d'opérations non effectuées... et constater qu'un même nombre peut toujours avoir plusieurs écritures..." 9CO : Technique et Savoir-faire "Calculer une image à partir de l'expression algébrique d'une fonction" 9CO Usage de la calculatrice "Aprendre à utiliser les différentes touches et fonctions de la calculatrice"
Mots-clé	Fraction continue -
Source	Malices du Kangourou collèges 2003

Énoncé élève (activité *Fractionner les racines_fc 9CO*)

A) Le dessin de $\sqrt{3}$

1. Tracer un triangle ABC isocèle en A, qui a ses trois sommets sur les points du quadrillage, dont le côté BC mesure 8 et dont la hauteur issue de A mesure 7.

   Ce triangle semble équilatéral ! Mesurer les trois côtés du triangle.

2. Pour ceux qui connaissent le théorème de Pythagore montrer que :
   « Dans un triangle équilatéral le rapport de la hauteur au demi-côté est égal à $\sqrt{3}$ »

3. En utilisant les questions précédentes, donner une valeur approchée de $\sqrt{3}$.
   Utiliser la calculatrice pour valider cette approximation, et indiquer la précision de cette valeur approchée.

Ce dessin a permis de trouver une approximation sous la forme d'une fraction.
Cette activité propose une méthode (très ancienne) pour écrire les nombres réels(tous ?) sous la forme de « fractions en escaliers ».

B) L'idée de la méthode

Dans certaines régions du monde, on écrit $\frac{3}{2}$ sous la forme $1\frac{1}{2}$.

Cela signifie : $\frac{3}{2} = 1{,}5 = 1 + \frac{1}{2}$; on a extrait l'entier !

Recommençons avec un deuxième exemple : $\frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}$ *car* $4 = \frac{12}{3}$;
quand on a soustrait les entiers (ici 4 entiers) il reste un nombre, $2/3$ plus petit que 1.

L'idée est décrire le reste comme l'inverse d'un nombre plus grand que 1 : ici $\frac{3}{2}$ car

$$\frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3} = 4 + \frac{1}{3/2}$$

et de recommencer à extraire les entiers de ce nombre . On obtient ici :

$$\mathbf{\frac{14}{3}} = 4 + \frac{2}{3} = 4 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \mathbf{4} + \frac{1}{\mathbf{1} + \frac{1}{\mathbf{2}}}$$

On écrira plus simplement :

$\mathbf{\frac{14}{3} = [\,4\ ;\ 1\ ,\ 2\,]}$ (4, 1 et 2 sont des nombres entiers ; remarquer le point virgule !)

4. Écrire les nombres suivants sous la forme d'une fraction en escalier :
[1 ; 1,2] [2 ; 1,2] [1 ; 2] [2 ; 0,1,2] [2 ; 1,1,1]

Remarque : plusieurs fractions en escalier correspondent au même nombre.
On appelle fonction continue la fraction en escalier où tous **les numérateurs sont égaux à 1**, les nombres entiers sont différents de zéro (sauf le premier éventuellement) et où le dernier nombre est différent de 1. Par exemple [2 ; 0,1,2] n'est pas acceptée, ni [2 ; 1,1,1].
Pour trouver cette écriture on va utiliser une méthode répétitive : un algorithme

C) L'algorithme utilisé

1. Choisir un nombre de départ (ici ce sera 14 / 3)
2. Retenir sa partie entière (ici 4).
3. Soustraire la partie entière au nombre (c'est trouver la partie décimale du nombre) et prendre l'inverse du résultat.
4. Recommencer à l'étape 1, en choisissant l'inverse comme nombre de départ.
   - Retenir la partie entière …
   - Soustraire et prendre l'inverse…

Recommencer ……….Et le programme s'arrête quand on trouve un nombre entier car, après soustraction de la partie entière on obtiendra zéro et la calculatrice indiquera « erreur » pour le calcul de l'inverse. Taper alors $\boxed{\text{CLEAR}}\boxed{\text{CLEAR}}\boxed{\text{CLEAR}}$ pour continuer à utiliser la calculatrice.

D) Programmer les touches $\boxed{\text{OP1}}$ et $\boxed{\text{OP2}}$ en tapant les séquences de touches

Attention : certaines touches nécessite l'utilisation de la touche $\boxed{\text{2nd}}$ pour être activées: elles sont notées entre crochets et non dans un cadre.
Exemple 1 : pour la touche [▸OP1] on appuiera sur la touche $\boxed{\text{2nd}}$ puis sur la touche OP1.
Exemple 2 : pour la touche $\boxed{\text{OP1}}$ on appuiera seulement sur la touche OP1.
La touche $\boxed{\text{2nd}}$, en activant une deuxième fonction pour les touches, permet d'avoir un nombre réduit de touches sur la calculatrice.

Taper les deux séquences de touches
[▸OP1] {éventuellement effacer avec $\boxed{\text{CLEAR}}$} [MATH]▶▶$\boxed{\text{ENTER}}\boxed{\text{MEMVAR}}\boxed{\text{ENTER}}\boxed{)}\boxed{\text{ENTER}}\boxed{\text{ENTER}}$
(**iPart** affiche la partie entière (=extrait les entiers) du nombre qui est dans la mémoire A)

[▸OP2] {éventuellement effacer }$\boxed{(}$[MATH]▶▶▶$\boxed{\text{ENTER}}\boxed{\text{MEMVAR}}\boxed{\text{ENTER}}\boxed{)}\boxed{)}$[$x^{-1}$]$\boxed{\text{STO▸}}\boxed{\text{ENTER}}\boxed{\text{ENTER}}$
(**fPart** calcule la partie décimale du nombre qui est dans la mémoire A et place le résultat dans la mémoire A : on peut ainsi recommencer à utiliser OP1 et OP2 avec ce nouveau nombre)

E) Utilisation des touches $\boxed{\text{OP1}}$ et $\boxed{\text{OP2}}$

Avec 14 / 3.

	Consigne	**Séquence de touches**	**partie entière**	**nombre dans la mémoire A**
	Mettre 14 / 3 dans la mémoire A	$\boxed{1}\boxed{4}\boxed{/}\boxed{3}\boxed{\text{STO▸}}\boxed{\text{ENTER}}$ **Attention**: $\boxed{/}$ n'est pas la touche $\boxed{\div}$		$\frac{14}{3}$
1er tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	$\boxed{\text{OP1}}$	**4**	$\frac{14}{3}$
1er tour	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	$\boxed{\text{OP2}}$		$\frac{3}{2}$
2ème tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	$\boxed{\text{OP1}}$	**1**	$\frac{3}{2}$
2ème tour	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	$\boxed{\text{OP2}}$		$\frac{2}{1}$
3ème tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	$\boxed{\text{OP1}}$	**2**	$\frac{2}{1}$
3ème tour	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	$\boxed{\text{OP2}}$		

La calculatrice affiche « erreur ».
Taper alors $\boxed{\text{CLEAR}}\boxed{\text{CLEAR}}\boxed{\text{CLEAR}}$ pour continuer à utiliser la calculatrice.

Les 3 parties entières qui ont été trouvées permettent d'écrire le nombre 14/3 sous la forme:

$$\frac{14}{3} = 4 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = [\,4\ ;\ 1\ ,\ 2\,]$$

(fraction en escalier de 3 « marches »)

5. Quelles sont les fractions en escalier qui ont 1 « marche »?

6. Trouver, en utilisant la calculatrice, l'écriture en escalier des fractions suivantes:
13/8 19/7 11/7

F) Recherche de fractions en escaliers

7. Trouver, en utilisant la calculatrice, l'écriture en escalier des fractions suivantes:
3/2 5/3 8/5 13/8 21/13 ...Que peut-on remarquer ?

8. Trouver, en utilisant la calculatrice, l'écriture en escalier des fractions suivantes:
8/7 9/7 10/7 11/7 12/7 13/7 14/7 15/7 16/7 17/7 ...
Que peut-on affirmer?

9. Trouver, sans la calculatrice, l'écriture en escalier de 2007 / 2006.
Si on emploie les touches $\boxed{\text{OP1}}$ et $\boxed{\text{OP2}}$ obtient la même réponse? Expliquer.

10. À deux !
Choisir une fraction, dont le numérateur et le dénominateur sont inférieurs à 20. Demander à son voisin de prédire le nombre de marches de la fraction escalier (fraction continue). Le premier trouve, mentalement ou s'aidant d'un papier et d'un crayon, et l'autre utilise la calculatrice. Écrire les écritures trouvées.

G) Tous les nombres rationnels

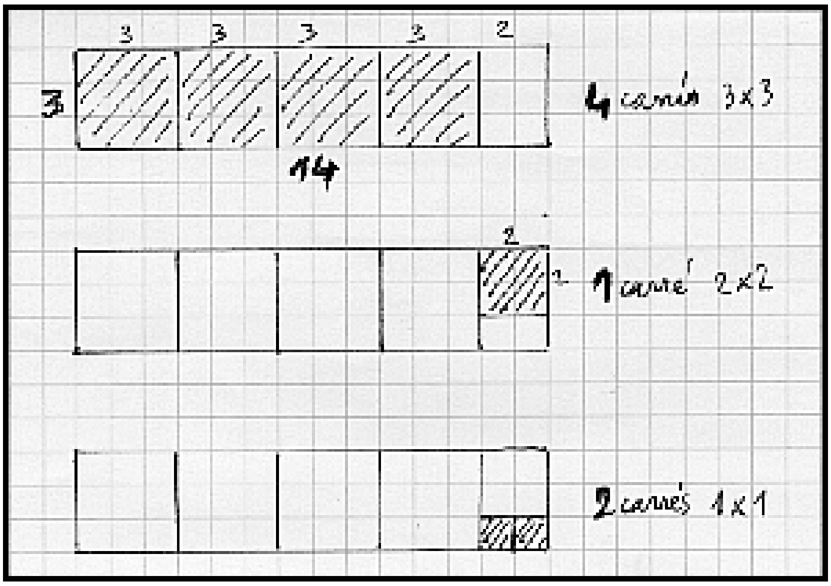
Avec cette méthode il est possible de trouver l'écriture d'une fraction plus grande que 1, sous la forme d'une fraction continue [(re)voir la définition à la remarque du paragraphe B)].

11. Trouver, en utilisant la calculatrice, l'écriture en escalier des fractions suivantes:
3/14 2/3 3/5 5/8.

12. Quelle conjecture peut-on faire sur l'écriture, sous la forme d'une fraction en escalier, d'une fraction comprise entre 0 et 1 ?

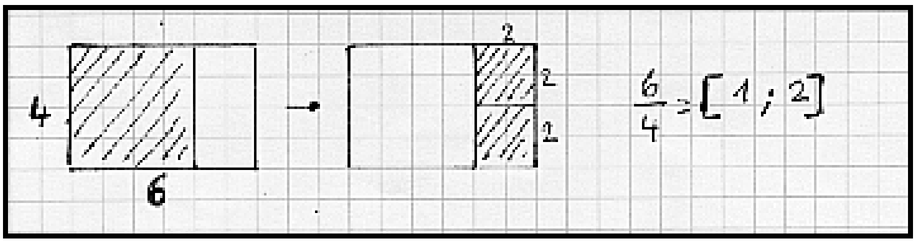
H) Carrés et fractions continues en images !

avec 14 / 3



et $\frac{14}{3}$ = [4 ; 1,2]

avec 6 / 4



13. Choisir des fractions et les dessiner selon le modèle.

14. Quelle conjecture peut-on faire sur la taille des derniers carrés ?

I) Avec l'irrationnel $\sqrt{3}$

Pour les nombres rationnels on arrive toujours à obtenir un nombre entier et l'algorithme va s'arrêter : ainsi le nombre de marches de la fraction en escalier sera fini.
Avec les irrationnels on peut généraliser cette écriture, mais le nombre de marches sera toujours infini, et c'est pour cela que ces fractions en escaliers sont appelés fractions continues. Pour certains nombres cette écriture sera périodique.
La calculatrice peut nous aider à trouver cette écriture : prenons pour exemple $\sqrt{3}$

15. Mettre $\sqrt{3}$ dans la mémoire A puis utiliser [OP1][OP2] , plusieurs fois de suite selon l'algorithme qui a été utilisé avec les nombres rationnels, tout en notant les parties entières trouvées.
$\sqrt{3}$ = [... ; ... , ... , ... , ... , ... , ... , ... , ... , ...]

16. deuxième procédé : compléter le tableau.

Consigne	Séquence de touches	affichage	partie entière
Choisir un nombre : On **affiche** $\sqrt{3}$	[√][3][)][ENTER]	1.732050808	
Retenir la partie entière			...
Soustraire la partie entière	[−][1][ENTER]	0.732050808	
Prendre l'inverse	[x^{-1}][ENTER]	...	
Retenir la partie entière			...
Soustraire la partie entière	[−][1][ENTER]	...	
Prendre l'inverse	[x^{-1}][ENTER]	...	
Retenir la partie entière			...
Soustraire la partie entière	[−][2][ENTER]	0.732050808	

Il y a répétition et $\sqrt{3}$ = [1 ; 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 , ...]

Seule une démonstration peut nous donner la bonne réponse à la question :
« Les chiffres 1 et 2 se répètent-ils à l'infini? »

J) Les approximations de $\sqrt{3}$

En tronquant la suite que l'on vient de trouver, on peut obtenir de bonnes approximations de la racine de 3.

$\sqrt{3}$ = [1 ; 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...]

1ère approximation: [1 ; 1]
2ème approximation: [1 ; 1 , 2]
3ème approximation: [1 ; 1 , 2 , 1]
4ème approximation: [1 ; 1 , 2 , 1 , 2]
5ème approximation: [1 ; 1 , 2 , 1 , 2 , 1] ...

Historiquement, les fractions continues ont été utilisées en astronomie dès le cinquième siècle.

17. Écrire la troisième approximation sous la forme d'une fraction réduite et dans l'écriture décimale. Reconnaître cette approximation !

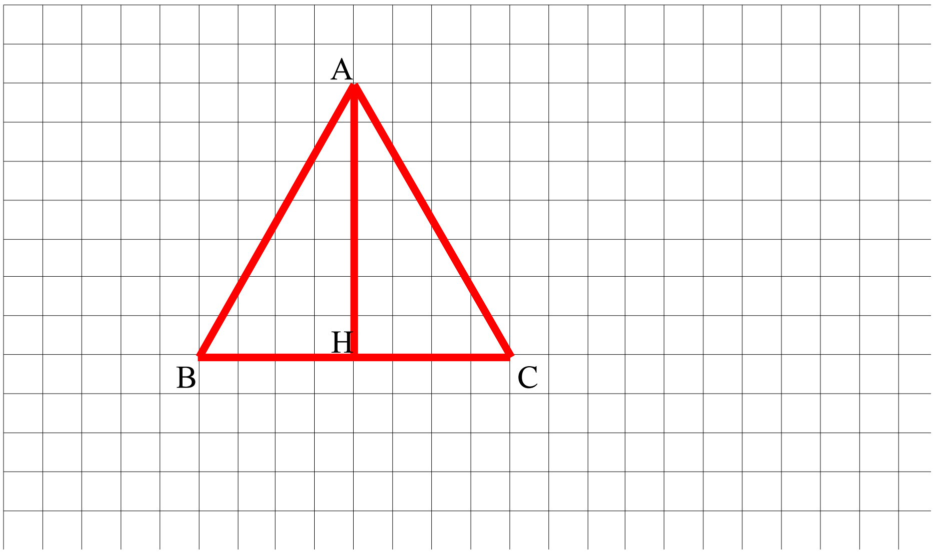
Commentaires pour le maître

(activité *Fractionner les racines_fc 9CO*)

Analyse à priori de l'activité (enjeux de l'activité, démarches possibles, difficultés, relances, mise en commun)	<u>Intentions</u> Sous le prétexte de la découverte d'une nouvelle notion (fractions continues) c'est l'occasion de travailler et de lier des parties importantes et « éloignées » du programme : théorème de Pythagore, calcul avec des fractions, recherche du PGCD, valeurs approchées d'une racine carrée. La calculatrice va permettre de faciliter les calculs nombreux et répétitifs: il est aussi possible de « programmer » certaines touches. Le document est complet: il peut être utilisé en autonomie, sans explication supplémentaire. <u>Démarches possibles</u> <u>Relances</u> - Utiliser l'activité de consolidation A) pour s'assurer que l'élève maîtrise la programmation des touches $\boxed{\text{OP}_1}$ et $\boxed{\text{OP}_2}$. <u>Mise en commun</u> <u>Variables didactiques</u> Les exemples de fractions choisis se veulent simples et avec l'intention de faire des liens avec d'autres notions ou nombres mathématiques (suite de Fibonacci, congruence, PGCD, ...) : attention à ne pas toujours prendre des fractions irréductibles!
Proposition(s) de déroulement	Toute l'activité se déroule en classe, par groupe de 2. Une fois la programmation des touches assimilée par l'élève, certaines parties peuvent de recherche peuvent être faites à la maison.
Prolongements possibles	• Activité sur la définition et l'approximation d'une racine carrée «*Fractionner les racines_ r* ». • Activité 08 de la brochure wwwedu.ge.ch/sm2007

Corrigé détaillé (activité *Fractionner les racines_fc 9CO*)

1.



2. Si ABC est un triangle équilatéral dont le côté a pour mesure d, alors dans le triangle rectangle AHC, le théorème de Pythagore permet d'écrire $AC^2 = AH^2 + HC^2$ soit $d^2 = (\frac{d}{2})^2 + AH^2$ et $d^2 = (\frac{1}{4}) d^2 + AH^2$. On a $(\frac{3}{4}) d^2 = AH^2$ qui est équivalent à $AH^2 = 3(d/2)^2$ soit $(\frac{AH}{d/2})^2 = 3$ ou $\frac{AH}{d/2} = \sqrt{3}$.

Conclusion:

Dans un triangle équilatéral le rapport de la hauteur au demi-côté est égal à $\sqrt{3}$.

3. Dans le triangle dessiné, qui semble équilatéral, le rapport de la hauteur au demi-côté est égal à $7/4 = 1{,}75$. La calculatrice affiche 1,732050808 comme valeur approchée de la racine de 3.

1,75 est une valeur approchée au 1/10 de $\sqrt{3}$.

4. $[1\ ;\ 1{,}2] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}$ $\quad [2\ ;\ 1{,}2] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}$ $\quad [1\ ;\ 2] = 1 + \cfrac{1}{2}$

$$[2\ ;\ 0{,}1{,}2] = 2 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = 2 + 1 + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} = [3\ ;\ 2],$$

$$[2\ ;\ 1{,}1{,}1] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = [2\ ;\ 1{,}2]$$

Deux fractions en escalier peuvent être égales au même nombre.

5. Les nombres entiers naturels s'écrivent sous la forme d'une fraction en escalier, quin'a qu'une seule marche : sa partie entière, c'est-à-dire lui-même.

6. $\frac{13}{8} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$ $\quad \frac{19}{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$ $\quad \frac{11}{7} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$

7. $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ $\quad \frac{5}{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}$ $\quad \frac{8}{5} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$ $\quad \frac{13}{8} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$

... On retrouve la suite de Fibonacci !
À chaque étape le nouveau numérateur est la somme du numérateur et du dénominateur de la dernière étape, et l'ancien numérateur 3 devient le dénominateur.
Par suite, il suffit d'ajouter un 1 à chaque nouvelle étape :
$\frac{3}{2} = [1\,;2]$ $\quad \frac{5}{3} = [1\,;1,2]$ $\quad \frac{8}{5} = [1\,;1,1,2]$ $\quad \frac{13}{8} = [1\,;1,1,1,2]$ $\quad ...$

8. $\frac{8}{7} = [\mathbf{1}\,;7]$ $\quad \frac{9}{7} = [\mathbf{1}\,;3,2]$ $\quad \frac{10}{7} = [\mathbf{1}\,;2,3]$ $\quad \frac{11}{7} = [\mathbf{1}\,;1,1,3]$ $\quad \frac{12}{7} = [\mathbf{1}\,;1,2,2]$ $\quad \frac{13}{7} = [\mathbf{1}\,;1,6]$

$\frac{14}{7} = [2\,]$

$\frac{15}{7} = [\mathbf{2}\,;7]$ $\quad \frac{16}{7} = [\mathbf{2}\,;3,2]$ $\quad \frac{17}{7} = [\mathbf{2}\,;1,2]$ $\quad \frac{18}{7} = [\mathbf{2}\,;1,1,3]$ $\quad \frac{19}{7} = [\mathbf{2}\,;1,2,2]$ $\quad \frac{20}{7} = [\mathbf{2}\,;1,6]$.

La partie entière augmente de 1, tous les 7 nombres; les écritures en fractions en escalier se répètent à l'exception du premier entier.

9. $\frac{2007}{2006} = \frac{2006}{2006} + \frac{1}{2006} = 1 + \frac{1}{2006} = [\,1\,;2006\,]$
En utilisant les touches $\boxed{\text{OP1}}$ et $\boxed{\text{OP2}}$, la calculatrice arrondit les nombres et on obtient :
$\frac{2007}{2006} = [\,1\,;2006\,,510\,,1\,,2\,,1\,,1\,,1\,,3\,,2\,,2\,,4\,,...]$, résultat inexact.

10.

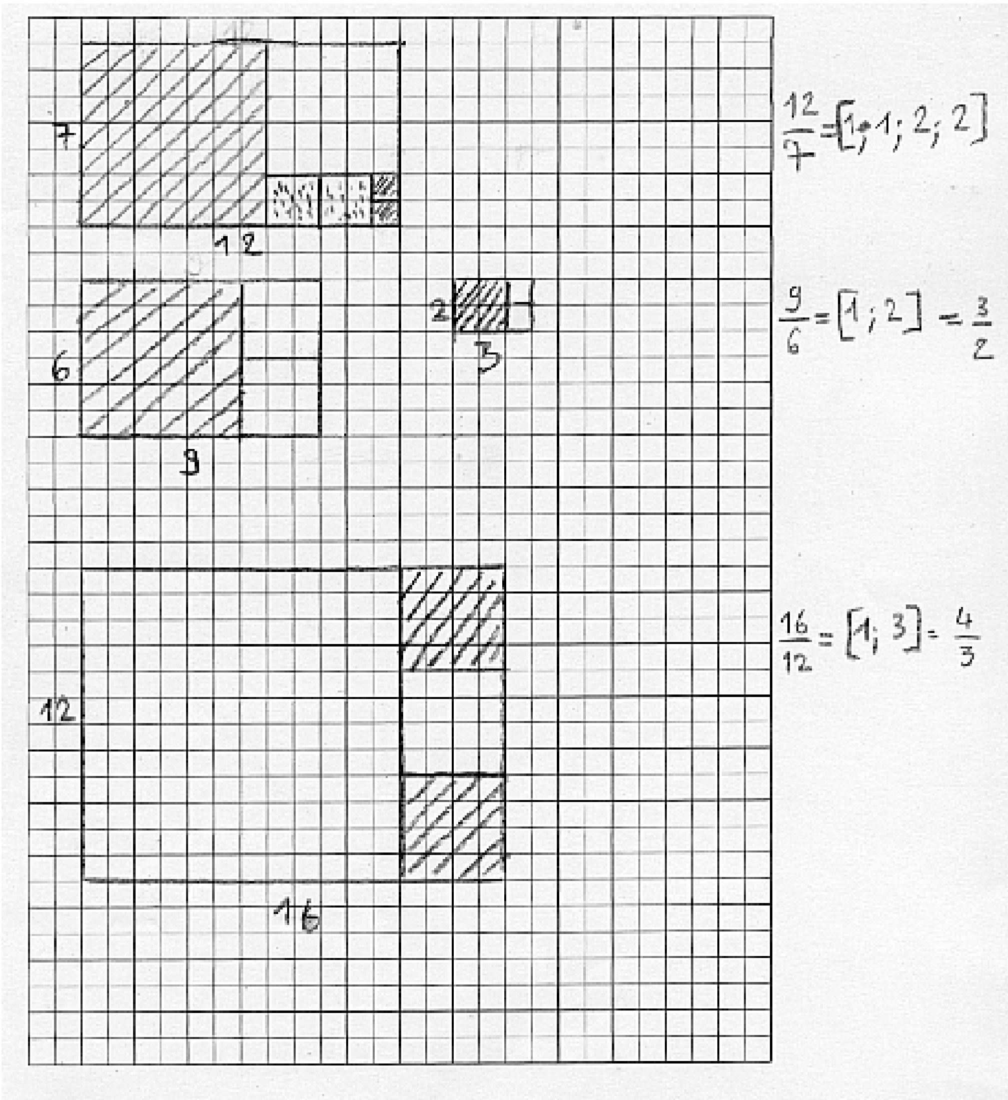
11. $\frac{3}{14} = 0 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = [\,0\,;4\,,1\,,2\,]$ $\qquad \frac{2}{3} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = [\,0\,;\;1\,,2\,]$

$\frac{3}{5} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = [\,0\,;\;1\,,1\,,2\,]$ $\qquad \frac{5}{8} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = [\,0\,;\;1\,,1\,,1\,,2\,]$

12. L'écriture, sous la forme d'une fraction continue, d'un nombre compris entre 0 et 1 commence toujours par 0 et la suite des nombres correspond à l'écriture, sous la forme de fraction continue, de son inverse.

$\frac{5}{8} = [\,0\,;\;\mathbf{1\,,1\,,1\,,2}\,]$ $\qquad \frac{8}{5} = [\,\mathbf{1;\;1\,,1\,,2}\,]$ $\qquad$ car $\qquad \frac{5}{8} = 1 + \frac{1}{8/5}$

13.



14. La taille des derniers carrés est égal au PGDC du numérateur et du dénominateur.

15. $\sqrt{3}$ = [1 ; 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 , 1 ...] Les chiffres 1 et 2 se répètent.
Si on continue le 17ème chiffre n'est pas 2 mais 3. Les approximations successives ne sont pas exactes.

16. <u>deuxième procédé</u>

Consigne	**Séquence de touches**	**affichage**	**partie entière**
Choisir un nombre : On **affiche** $\sqrt{3}$	$\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{3}\boxed{)}\boxed{\text{ENTER}}$	1.732050808	
Retenir la partie entière			1
Soustraire la partie entière	$\boxed{-}\boxed{1}\boxed{\text{ENTER}}$	0.732050808	
Prendre l'inverse	$\boxed{x^{-1}}\boxed{\text{ENTER}}$	1.366025404	
Retenir la partie entière			1
Soustraire la partie entière	$\boxed{-}\boxed{1}\boxed{\text{ENTER}}$	0.366025404	
Prendre l'inverse	$\boxed{x^{-1}}\boxed{\text{ENTER}}$	2.732050808	
Retenir la partie entière			2
Soustraire la partie entière	$\boxed{-}\boxed{2}\boxed{\text{ENTER}}$	0.732050808	

Il y a répétition et $\sqrt{3}$ = [1 ; 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 , ...]

Les nombres intermédiaires ne correspondent pas à ceux trouvés, lors du premier procédé, avec les touches $\boxed{\text{OP1}}\boxed{\text{OP2}}$ (1,366025403 et 2,732050813 puis 1,366025394 et 2,732050881 puis 1,366025267 et 2,732051829 ...)

Seule une démonstration peut nous donner la bonne réponse à la question :
« Les chiffres 1 et 2 se répètent-ils à l'infini? » En voici une:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x} \quad \textit{donc} \quad x = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

<u>**et l'idée** est de remplacer</u> $\sqrt{3}$ <u>par</u> $1 + \dfrac{1}{x}$

<u>**d'où**</u>

$$x = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{1+\frac{1}{x}+1}{2} = \frac{2+\frac{1}{x}}{2} = 1+\frac{1}{2x}$$ -

<u>et on recommence en remplaçant x par ...</u>

$$x = 1+\frac{1}{2x} = 1+\frac{1}{2\bullet\left(1+\frac{1}{2x}\right)} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{x}}$$ -

<u>...</u>

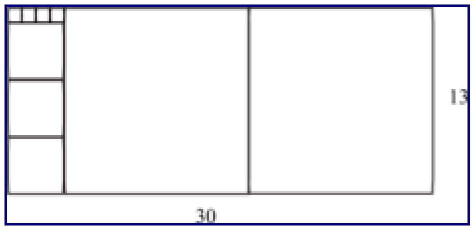
17. On retrouve l'approximation du début de l'activité, à savoir $\frac{7}{4}=1{,}75$ car

$$[1;1,2,1]=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{4/3} = 1+\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

Éléments pour la synthèse (activité *Fractionner les racines_fc 9CO*)

1 Une visualisation par un pavage de rectangle (tiré de wikipédia)

Un moyen simple de comprendre et visualiser une fraction continue consiste à imaginer un rectangle de dimension $L \times l$ tel que $\frac{L}{l} = x$ et de paver le rectangle par des carrés de côté l.



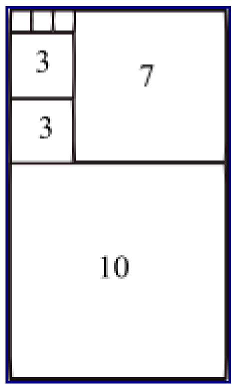
Si *x* est entier alors le pavage comporte exactement x carrés

Sinon, il reste une bande de dimension $l \times l_1$, que l'on cherche alors à paver avec des carrés de côté l_1 et ainsi de suite.

30/13=[2 , 3, 4]

Si x est rationnel - Euclide aurait dit : *si L et l sont des longueurs commensurables* - alors le processus va s'arrêter et il existe une unité de longueur l_n qui permet de mesurer *L* et *l*. Le nombre de carrés de chaque taille donne alors la suite des entiers du développement en fraction continue.

Ainsi, dans l'image ci-dessus, on pave le rectangle 30 x 13 par deux carrés de côtés 13, la bande restante de largeur 4 est pavée de 3 carrés de côté 4, et la bande restante de largeur 1 est pavée de 4 carrés de côté 1.

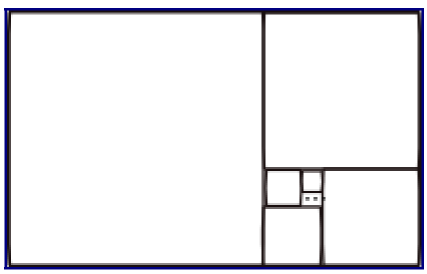


De plus la présentation du pavage pour un rationnel donne un moyen rapide de le déterminer, puisque l'on connait l'unité de longueur permettant de *mesurer* L et l.

Ainsi dans l'image ci-contre on peut retrouver le rationnel dont le développement est [1, 1, 2, 3]. Les trois petits carrés donnent la taille du carré suivant (3). Les deux carrés moyens et le petit carré donnent la taille du carré plus grand (7), le carré plus grand et le carré moyen donnent le dernier carré (10) et les deux derniers carrés donne la longueur du rectangle (17).
[1 ; 1 , 2 , 3]=17/10

Si *x* n'est pas rationnel - Euclide aurait dit : *si L et l sont des longueurs non commensurables*, le processus se déroule à l'infini.

C'est le cas par exemple dans un rectangle d'or, pour $x = \varphi$ (nombre d'or) où l'on remarque que l'on ne peut placer qu'un carré dans chaque bande et confirme que $\varphi = [1, 1, 1, \cdots]$



Activités de consolidation (activité *Fractionner les racines_fc 9CO*)

A) Utiliser la programmation des touches OP1 OP2 pour remplir un tableau de valeurs d'une fonction:

x							
f(x) = 2/3 x -1							

x							
f(x) = x^3 - x-1							

x							
f(x) = π x							

x							
f(x) = $\frac{x-2}{x+5}$							

x							
f(x) = $\sqrt{1+\frac{1}{x}}$							

B) Calculer, à l'aide de la calculatrice, le plus simplement possible les nombres suivants

$F_0 = 1 \quad F_1 = 1+\frac{1}{1} =$

$$F_2 = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}} =$$

$$F_3 = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}} =$$

$$F_4 = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}} =$$

$$F_5 = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}}} =$$

$$F_6 = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}} =$$

C) Trouver à l'aide de la calculatrice, l'écriture en fraction continue du nombre π. Calculer les premières approximations que l'on peut déduire :indiquer l'erreur commise.

Activités de consolidation :aide

(activité *Fractionner les racines_fc 9CO)*

A) Une fois que les touches [OP1][OP2] ont été programmées, on peut les **tester** en prenant une valeur « simple de x: par exemple x=0 quand la fonction est un polynôme

Les fonctions **linéaires** (du type y=ax, par exemple $y = \pi x$) peuvent être programmées simplement par la séquence de touches : [×][π] et on utilisera directement la touche [OP1] ou [OP2] pour calculer l'image d'un nombre.
Quand il n'y a qu'une opération il n'est pas nécessaire d'utiliser la touche [MEMVAR]

Utiliser la touche [/] pour la fraction 2 / 3.

B) Pour calculer une fraction continue, on doit commencer par le « bas » puis utiliser alternativement les touches [x^{-1}]et [+][1]

Par exemple on calculera $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$ en tapant les séquences de touches

[2][x^{-1}][+][1][ENTER][x^{-1}][+][2][ENTER][x^{-1}][+][1][ENTER][x^{-1}][+][1][ENTER] et

[Ab/c↔d/e ▸D][▸Simp][Ab/c↔d/e ▸D] pour une écriture sous forme de fraction.

Réponse : $F_4 = \frac{19}{11}$

C)

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, ...] = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}}}}$$

$$\pi \approx [3; 7] = 3+\frac{1}{7} = \mathbf{\frac{22}{7}} \approx \mathbf{3{,}14}2857143$$

$$\pi \approx [3; 7, 15] = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}} = 3+\cfrac{1}{\frac{106}{15}} = 3+\frac{15}{106} = \mathbf{\frac{333}{106}} \approx \mathbf{3{,}14159}09434$$

$$\pi \approx [3; 7, 15, 1] = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}} = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16}} = [3; 7, 16] = 3+\cfrac{1}{\frac{113}{16}} = 3+\frac{16}{113} = \mathbf{\frac{355}{113}} \approx \mathbf{3{,}1415929}2$$

« Découvrir le code de logdeu »

Fichier : sm07_dcl_log_9co11po.pdf

Fiche de présentation

Titre de l'activité	Découvrir le code.
Sous-titre	Logdeu
Degré(s) concerné(s)	9CO-11PO
Durée estimée	2h
Résumé	Découvrir les propriétés du log en base 2. En particulier, les relations : logdeu(ab) = logdeu(a) + logdeu(b). logdeu(2^n) = n. Essayer de justifier ces relations, en s'intéressant à la fonction f(r) = 2^r.
Type d'usage de la calculatrice	Programmer une fonction, puis utiliser la fonction programmée. Éventuellement utilisation des mémoires.
Contenus mathématiques visés	Fonction réciproque de la fonction exponentielle de base 2, et en prolongement de base 10 et de base a >0. Découverte des logarithmes et de leur graphe.
Pré requis	Les propriétés de a^x pour a >0 et x réel a^x a^y = a^{x+y} pour tout x et y réels
Liens avec le plan d'études et moyens d'enseignement	Voir contenus mathématiques visés et pré requis.
Mot-clé	Puissance, réciproque, logarithme.
Source	

Énoncé élève : Découvrir le code de logdeu.

Après avoir programmé dans sa machine la fonction logdeu comme décrit dans la page annexe.

I) Esquisser l'allure de cette fonction. Pour cela calculer l'image des nombres suivants :

les entiers 1 à 16, 32, 64, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 2/3, 0, -1, -3. Que remarquez-vous ? Que se passe-t-il pour les nombres négatifs ?

II) Y a-t-il une relation entre logdeu(2^n) et logdeu(2), si oui laquel ?

Y-a-t-il une relation entre logdeu(6), logdeu(3) et logdeu(2) ?

Pouvez-vous induire une relation entre logdeu(ab), logdeu(a) et logdeu(b) ?

III) Peut-on justifier une telle relation. Connaissez-vous des relations similaires pour d'autres fonctions ? Que vaut logdeu(2^r) ? Existe-t-il une relation entre les fonctions logdeu et f(r) = 2^r, si oui laquelle ? Ceci permet-il de justifier la relation observée en II) ?

IV) Comment calculer logdeu(10'000'000'000) ?

V) Un biologiste découvre dans une boîte de Petri une colonie d'environ 10'000'000'000 de bactéries. Connaissant ce type de bactéries, le biologiste sait qu'elles doublent leur population en 20 minutes. Depuis combien de temps cette boîte a-t-elle été infectée ?

Programmer la fonction logdeu avec la calculatrice

Voici deux méthodes pour programmer la fonction logdeu avec la calculatrice TI34 II.

[4][1] Programmer les touches [OP1] et [OP2]

Attention : certaines touches nécessite l'utilisation de la touche [2nd] pour être activées: elles sont notées entre crochets et non dans un cadre.
Exemple 1 : pour la touche [▸OP1] on appuiera sur la touche [2nd] puis sur la touche OP1.
Exemple 2 : pour la touche [OP1] on appuiera seulement sur la touche OP1.
La touche [2nd] , en activant une deuxième fonction pour les touches, permet d'avoir un nombre réduit de touches sur la calculatrice.

- **Taper la séquence de touches, pour la première méthode « [MEMVAR] »**

[▸OP1] {éventuellement effacer avec [CLEAR]}

[LOG][ENTER][MEMVAR][ENTER][)][÷][LOG][ENTER][2][)][ENTER][ENTER]

(On utilise le nombre qui est dans la mémoire A comme variable de la fonction programmée.)

- **Taper la séquence de touches, pour la seconde méthode « [ANS] »**

[▸OP2] {éventuellement effacer avec [CLEAR]} [LOG][ENTER][ANS][)][÷][LOG][ENTER][2][)][ENTER][ENTER]

(On utilise le dernier nombre qui a été affichée à l'écran comme variable de la fonction programmée.)

2. Utiliser les touches programmées

Ici, pour calculer la valeur de la fonction on choisit comme exemple le nombre 7.

- **Avec la première méthode « [MEMVAR]** », taper la séquence de touches:

7[STO▸][ENTER][OP1]

- **Avec la seconde méthode « [ANS]** », taper la séquence de touches:

[7][ENTER][OP2]

3. Pour aller plus loin

- Méthode **«** [MEMVAR] » : remplacer la séquence de touches par la suivante,

[▸OP1] {éventuellement effacer} [LOG][ENTER][MEMVAR][ENTER][)][÷][LOG][ENTER][MEMVAR][▸][ENTER][)][ENTER][ENTER]

(On utilise le nombre qui est dans la mémoire A comme variable de la fonction programmée, et le nombre qui est dans la mémoire B pour la base du logarithme.) Pour utiliser la fonction programmée, il faut mettre la base dans la mémoire B, puis on calcule la valeur du logarithme du nombre que l'on met dans la mémoire A. Ceci permet de programmer loga ou même logdix pour comprendre explicitement ce qui se fait.

Prolongement possible : logdix, loga.

Programmez maintenant la fonction logdix et loga comme décrit dans la page annexe.

I) Calculer logdix pour les valeurs entières de 1 à 10; 100; 1000; 0,1; 0,01; 0; -1.

   Remarquez-vous des relations analogues à celles découvertes pour logdeu ? En particulier, existe-t-il une relation entre logdix et la fonction $g(x) = 10^x$.

II) Pour un nombre a >0 fixé différent de 1, on connaît la fonction $h(x) = a^x$, comment définiriez-vous loga ?

Commentaires pour le maître
(activité *Découvrir le code de logdeu, 9CO-11PO*)

Analyse à priori de l'activité (enjeux de l'activité, démarches possibles, difficultés, relances, mise en commun)	<u>Intentions</u> Programmer une fonction, découvrir le logarithme, manipuler des fonctions réciproques non élémentaires. <u>Variables didactiques</u> Choix d'une des deux manières de programmer la fonction. L'une permettant (la découverte et) l'usage des mémoires. Le désavantage de cette méthode est qu'il faut mettre chaque valeur dans la mémoire choisie, ce qui nécessite plus de frappe, mais qui entraîne la mise en mémoire d'un nombre. L'autre manière est plus rapide et met en évidence la possibilité d'utiliser le dernier résultat, ce qui est plus efficace dans le cas d'itérations. Pour la question V), il est possible de préciser qu' « infecter » signifie : apparition de la première bactérie.
Proposition(s) de déroulement	Par petits groupes (2 à 3 personnes)
Prolongements possibles	Ceux proposés dans la feuille de l'élève. Il est possible d'utiliser la programmation du log en base a de x pour faire comprendre la formule de changement de base des log.

Corrigé (activité *Découvrir le code de logdeu, 9CO-11PO*)

Comme, en essayant, on remarque que logdeu et la fonction $f(x) = 2^x$ sont des fonctions réciproques, et que l'on sait que $2^{x+y} = 2^x•2^y$, on déduit que

$$\text{logdeu}(x) + \text{logdeu}(y) = \text{logdeu}(x•y).$$

On peut supposer que la boîte a été infectée par une unique bactérie, après 20 minutes, il y a 2 bactéries, après 40 = 2 fois 20 minutes, il y a $4 = 2^2$ bactéries, après 60 = 3 fois 20 minutes, il y a $8=2^3$ bactéries, on voit donc qu'après x fois 20 minutes, il y a 2^x bactéries. Il faut donc résoudre l'équation $2^x = 10\,000\,000\,000$, c'est-à-dire appliquer logdeu des deux côtés de l'égalité.

Comme $\text{logdeu}(10000000000) = \text{logdeu}(10^{10}) = 10\ \text{logdeu}(10) = 10\ \text{logdeu}(5•2) = 10(\text{logdeu}(5) + \text{logdeu}(2)) = 10\ (\text{logdeu}(5) + 1) = 33{,}22$, ceci implique que $x = 33{,}22$.

Il faut donc $33{,}22•20 = 664{,}4$ minutes, c'est-à-dire 11h 4 minutes et 24 secondes. ☺ ☺

Est-il pertinent de donner les secondes ?

« Mettre racine de trois à zéro, 9CO-13PO-LME »

Fichier : sm07_racinedetroisazero_9co13po.pdf

Fiche de présentation

Titre de l'activité	Mettre racine de trois à zéro
Sous-titre	Non décimalité[1] de la racine carrée de trois.
Degré(s) concerné(s)	9CO-13PO
Durée estimée	2 périodes
Résumé	Quel nombre décimal faut-il soustraire à la racine de trois pour obtenir zéro ?
Contexte d'usage de la calculatrice	APPROFONDIR RECHERCHER
Contenus et compétences mathématiques visées	Nombres non décimaux[1] et non rationnels. Approximation décimale de nombres irrationnels. Représentation des nombres irrationnels avec la calculatrice. Notion de limite
Prérequis	Définition de racine carrée d'un nombre, calcul dans D et Q.
Liens avec les plans d'études et moyens d'enseignement	789CO Nombres et Opérations: « *Décomposition en facteurs premiers, diviseurs, multiples, critères* » Usage de la calculatrice CO & PO apprentissage du raisonnement. encadrer une racine définition d'un nombre irrationnel savoir mobiliser et utiliser l'écriture scientifique fonction racine carrée (PO) se familiariser avec le calcul infinitésimal, les nombres réels : limites, suites (PO).
Mots-clé	Racine carrée, irrationnel, approximation décimale, limite.
Source	IUFM Paris (http://maths.creteil.iufm.fr => second_degré => Mathématiques et TICE => La calculatrice au collège) - adaptations Jean-Marie Delley et Ruhal Floris après expérimentations en 1ère collège pour la brochure calculatrice (« à la recherche de racine de huit » ici version un peu différente).

[1] Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire avec un nombre fini de décimales.

Énoncé élève : racine de trois à zéro

a) Calculer $\sqrt{3}$ avec votre machine et **noter le résultat sur une feuille**.
Appelons x le nombre que vous avez noté. Taper [CLEAR].

b) Taper $\sqrt{3}$ - x. Que pensez-vous du résultat ?

c) Le carré du nombre x est-il égal à 3? Justifier (faire le calcul avec et sans calculatrice)

d) Puisque $\sqrt{3}$ - x. est négatif, remplacer x par un nombre plus petit. Trouve-t-on zéro cette fois ?

e) Quel nombre décimal faut-il soustraire à $\sqrt{3}$ pour obtenir 0 ? Le carré du nombre trouvé est-il vraiment égal à 3 ? Y a-t-il plusieurs solutions ?

f) Est-il possible de trouver un nombre décimal x (qui a un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule) tel que $\sqrt{3}$ -x soit parfaitement égal à zéro ?

g) La suite d'opérations suivante permet de faire afficher le nombre qu'utilise la calculatrice à la place de $\sqrt{3}$:

[2nd] [x^2] [3] [)] [STO▸] [ENTER] [2nd] [STO▸]

Comparer les deux lignes d'affichage !

h) Taper la suite d'opération suivantes :

[2nd] [x^2] [3] [)] [ENTER] puis, immédiatement sans effacer [x^2] [ENTER]

Qu'en conclure ?

i) Finalement, que vaut $\sqrt{3}$?

j) Trouver un encadrement de $\sqrt{3}$ au millième près à l'aide de votre calculatrice.

k) Quel est l'encadrement le plus précis possible que fournit votre machine ?

Commentaires pour le maître

activité *Mettre racine de trois à zéro, 5P-11PO*

Analyse à priori de l'activité (enjeux de l'activité, démarches possibles, difficultés, relances, mise en commun)	<u>Intentions</u> Clarifier les connaissances des élèves sur les nombres irrationnels et leurs approximations décimales et clarifier également la manière dont calculatrices (et ordinateurs) traitent ces nombres. Dans le curriculum, les nombres irrationnels sont introduits à travers le nombre π (calcul de l'aire et du périmètre d'un cercle) et la racine carrée (théorème de Pythagore) et confondus avec l'emploi des touches correspondantes de la calculatrice. Il s'agit de (re)mathématiser ces objets. <u>Difficultés et démarches possibles</u> Il est important que les élèves respectent les consignes et en particulier qu'ils prennent note du résultat affiché par la calculatrice pour $\sqrt{3}$ et le retapent complètement (pas d'utilisation de mémoire, par exemple). Pour la partie c), refuser de calculer sans calculatrice le carré du nombre x. Il est très important de le faire (éventuellement au tableau noir) car tout le raisonnement s'appuie sur ce qui se passe avec la dernière décimale de x. La partie e) qui exige un peu d'initiative de la part des élèves qui ne vont pas forcément penser à rajouter une décimale, mais plutôt à modifier la dernière décimale. En ce qui concerne f), il est probable que pour certains élèves, $\sqrt{3}$ -x soit uniquement associé à un calcul à faire avec une calculatrice et non à un nombre existant en tant que tel, sans le calcul. Pour ces élèves, le fait d'obtenir zéro à la calculatrice est alors suffisant pour donner une réponse. D'où le « parfaitement » dans la question qui doit inciter à imaginer que le zéro soit vraiment zéro ($0,\overline{0}$). Le terme encadrement au millième ne sera peut-être pas compris. <u>Relances</u> Préciser que zéro est seulement $0,\overline{0}$ et non 0,00000000000001 ni même 0,000000000000000000000000000000000001… Définir encadrement à 10^{-n}. <u>Mises en commun</u> (voir sous déroulement ci-dessous) <u>Variables didactiques</u> Testé uniquement sur la TI34II. Le choix de $\sqrt{3}$ est très stratégique : nous n'avons pas trouvé d'autre nombre pour lequel à la fois la calculatrice n'affiche pas 0 pour $\sqrt{3}$ -x et le carré de x à la calculatrice ne soit pas 3.

Proposition(s) de déroulement	Après une période de travail individuel sur a) à d), effectuer une mise en commun puis faire travailler en groupes pour la suite. La mise en commun finale porte sur la non décimalité de $\sqrt{3}$ et sur le traitement des racines carrées par la calculatrice (arrondis) ainsi que sur la différence entre valeur exacte et valeur arrondie ou tronquée à 10^{-n}.
Prolongements possibles (au CO et PO)	(I) Peut-on trouver une fraction $\frac{p}{q}$ (p et q entiers !) telle que $\sqrt{3}-(\frac{p}{q})$ soit égal à zéro ? Préparation à la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{3}$. Lien avec le thème fractionner les racines, cf par exemple les activités intitulées : « Les fractions continues pour approcher les nombres » (II) Calculer avec votre machine $(\sqrt{3}+\sqrt{2})\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. • Peut-on être sûr de ce résultat ? • Quelle conjecture peut-on tirer de ces calculs ? • Peut-on démontrer cette conjecture ? Généraliser la conjecture établie et la démontrer.
Éventuels commentaires après les avoir testées (du maître, des élèves, …)	
Productions d'élèves	

Éléments pour la synthèse

a) Le nombre x affiché est 1.732050808

b) Le calcul $\sqrt{3}$ - x affiche : -4.31×10^{-10} qui est égal à -0,000000000431. Ce n'est pas zéro comme on pourrait s'y attendre. Le nombre calculé par la machine pour $\sqrt{3}$ n'est pas exact.

c) Le carré du nombre x ne peut pas être 3. La calculatrice obtient 3,000000001 et en effectuant un calcul écrit posé (ou en utilisant une calculatrice symbolique) on obtient 3,000000001493452864.

d) Avec 1.732050807, on obtient un nombre positif non nul. Il faut essayer avec des nombres compris entre 732050807 et 1.732050808, par exemple x = 1.7320508075. On obtient zéro pour $\sqrt{3}$ - x et là, surprise ! On obtient zéro aussi pour x = 1.7320508073, x = 1.7320508074, x = 1.7320508076, x = 1.7320508077, x = 1.7320508078.

e) Voir ci-dessus.

f) Aucun de ces nombres n'a son carré égal à trois ! Il est facile de s'en rendre compte en pensant à la manière d'effectuer la multiplication posée : le dernier chiffre sera forcément 9, 6, 5 ou 4. On peut éventuellement utiliser un logiciel de calcul symbolique.

g) La calculatrice en sait plus qu'elle ne nous montre. On s'en rend compte en effectuant les manipulations proposées.

h) Il y a des chiffres cachés qui lui permettent d'obtenir ce résultat qui est donc un arrondi..

i) $\sqrt{3}$ ne peut pas être un nombre décimal fini, on peut toujours rajouter des décimales. On n'obtiendra toujours que des approximations.

j) $1.732 < \sqrt{3} < 1.733$

k) à 10^{-11}, soit au cent-milliardième…