Mettre à zéro – 6P

Fiche de présentation

Titre de l'activité	Mettre à zéro
Sous-titre	Introduction au concept de division euclidienne et aux critères de divisibilité
Degré(s) concerné(s)	6P
Durée estimée	2 périodes de 45 minutes
Résumé	A partir d'un nombre rationnel donné, soustraire toujours le même nombre … jusqu'à obtenir 0.
Contexte d'utilisation de la calculatrice	APPROFONDIR
Contenus et compétences mathématiques	Multiplication, division euclidienne Ensemble des diviseurs d'un nombre entier Opérations Nombres rationnels
Pré requis	Connaitre les opérations Avoir quelques notions de numération décimale
Lien(s) avec les plans d'études et moyens d'enseignement	OA[1] : Lire, écrire, décomposer des nombres entiers PE[2] : OFL Traduire des calculs en écritures multiplicatives et divisives ME[3] : Thèmes 4 et 6
Mots-clé	Décomposition d'un nombre rationnel, division euclidienne, ensemble de diviseurs
Source	Concepteurs de la 3e semaine des mathématiques Adaptation de l'activité FanTan

1 OA : objectifs d'apprentissage de l'école primaire genevoise
2 PE : plan d'études romand de mathématiques – degrés 1-6
3 ME : moyens d'enseignement

Mettre à zéro 6P – Énoncé élève

Sur ta calculatrice, écris le nombre 2,4.

Choisis un nombre et soustrais-le jusqu'à ce que tu obtiennes 0.

Note tous tes essais ainsi que les opérations que tu as effectuées (même celles qui ne font pas 0).

Commentaires pour le maitre

Analyse à priori de l'activité (enjeux de l'activité, démarches possibles, difficultés, relances, mise en commun)	<u>Intentions</u> Par cette activité, c'est la notion de division d'un nombre rationnel, de division euclidienne ainsi que celle d'ensembles de diviseurs que l'on cherche à introduire voire à consolider <u>Démarches possibles</u> – faire des essais en notant les résultats obtenus – passer directement à 0 en soustrayant le nombre de départ – ne pas soustraire toujours le même nombre afin d'obtenir 0 – ne pas s'arrêter lorsqu'un nombre négatif est obtenu – ... <u>Relances</u> – inciter l'élève à notre ce qu'il fait – proposer de commencer par des petits nombres – imposer un nombre de départ (par exemple 0,2, puis 1,2) – une mise en commun intermédiaire peut être proposée après quelques minutes afin d'aider les élèves en difficulté : le maitre notera au tableau noir toutes les propositions faites par les élèves, qu'elles soient correctes ou non. Il fera débattre les élèves sur la pertinence et la validité des diverses propositions. Il peut montre qu'il n'y a pas de solution avec des nombres naturels – ... <u>Mise en commun finale</u> Lors de la mise en commun, les élèves expriment et comparent leurs démarches, rapportent les observations et les constats qu'ils ont faits. Le maitre prend soin de noter toutes les propositions, qu'elles soient correctes ou non, afin de pouvoir en débattre par la suite. Cela permet de répertorier la totalité des diviseurs. C'est aussi l'occasion de discuter : – du passage de l'addition à la multiplication ($2,4 = 0,8 + 0,8 + 0,8 = 3 \times 0,8$) – de la notion de commutativité de la multiplication ($0,8 \times 3 = 3 \times 0,8$) – de l'écriture sous forme de division ($2,4 : 0,8 = 3$ ou $2,4 : 3 = 0,8$) – de certains critères de divisibilité <u>Variables didactiques</u>

	En fonction du niveau des élèves, il est possible de modifier l'ordre de grandeur des nombres proposés. On peut proposer un autre nombre rationnel de départ (par exemple 0,2 voire 2,16)
Proposition(s) de déroulement	Les élèves prennent connaissance individuellement de la consigne. Ils engagent le travail en fonction de ce qu'ils ont compris. Une mise en commun intermédiaire portant sur la compréhension de la consigne peut être proposée par l'enseignant si nécessaire (cf. Relances de l'analyse a priori) Les élèves poursuivent leur travail en notant non seulement leurs résultats mais également leurs constats et découvertes. La mise en commun finale porte sur les observations faites par les élèves, le passage de l'addition à la multiplication, de la soustraction à la division ainsi que l'institutionnalisation de certains termes. Le listing d'un certain nombre de solutions est effectué. On établira alors le lien avec la recherche des diviseurs de 24, de 240, de 2400, ... On peut poursuivre avec d'autres nombres (2,5 ou 0,5).
Prolongements possibles	Activités du thème 4 et du thème 6.

Éléments pour la synthèse

Ensemble des nombres ayant 1 chiffre après la virgule qui permettent d'obtenir 0 :
{0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 ; 1,2 ; 2,4}
On retrouve ici, divisé par 10 l'ensemble des diviseurs de 24.

Si l'on soustrait des nombres ayant 1 ou 2 chiffres après la virgule, le nombre de solutions augmente : {0,01 ; 0,02 ; 0,03 ; 0,04 ; 0,05 ; 0,06 ; 0,08 ; 0,1 ; 0,12 ; 0,15 ; 0,16 ; 0,2 ; 0,24 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,48 ; 0,6 ; 0,8 ; 1,2 ; 2,4} qui sont, divisés par 100, les diviseurs de 240.

De même, les nombres ayant 3 chiffres après la virgule peuvent être trouvés en divisant les multiples de 2400 par 1000.

Pour en savoir plus :
Gagnebin A., Guignard N., Jaquet F. (1998) *Apprentissage et enseignement des mathématiques, Commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire*. COROME, chapitre 6

LM : partie « introduction » des thèmes 4 et 6.

Afficher zéro – 3P-6P

Fiche de présentation

Titre de l'activité	Afficher zéro
Degré(s) concerné(s)	3P – 4P – 5P – 6P
Durée estimée	1 période de 45 minutes
Résumé	A partir d'un nombre donné, soustraire des milliers, des unités, des centaines, des dizaines, … pour afficher 0.
Contexte d'utilisation de la calculatrice	APPROFONDIR
Contenus et compétences mathématiques	Système de numération Base 10
Pré requis	Avoir quelques notions de notre système de numération
Lien(s) avec les plans d'études et moyens d'enseignement	OA[1] : Lire, écrire, décomposer des nombres entiers PE[2] : NEN Produire un nombre plus grand ou plus petit qu'un nombre donné d'une unité, d'une centaine, d'une dizaine. ME[3] : 3P-4P, module 2, champ C
Mots-clé	Numération, unité, dizaine, centaine, …
Source	Secteur des Mathématiques de l'Enseignement Primaire

1 OA : objectifs d'apprentissage de l'école primaire genevoise
2 PE : plan d'études romand de mathématiques – degrés 1-6
3 ME : moyens d'enseignement

Afficher zéro – Énoncé élève

Sur ta calculatrice, écris un nombre de 4 chiffres dont tous les chiffres sont différents.

Effectue une seule opération de telle sorte que le plus grand chiffre soit remplacé par 0 (ou par un vide) mais que tous les autres chiffres restent les mêmes.

A nouveau, effectue une seule opération de sorte que le plus grand chiffre suivant soit remplacé par 0 (ou par un vide) mais que tous les autres chiffres restent les mêmes.

Continue de la même manière jusqu'à ce que tu obtiennes 0.

Note le nombre de départ, et à chaque fois l'opération effectuée et le résultat obtenu.

Commentaires pour le maitre

Analyse à priori de l'activité (enjeux de l'activité, démarches possibles, difficultés, relances, mise en commun)	Intentions Par cette activité, c'est le système de numération que l'on cherche à consolider et en particulier la décomposition de tout nombre en somme de puissances de 10. Démarches possibles – essayer d'autres opérations que la soustraction – faire des essais en notant les résultats obtenus – passer directement à 0 en soustrayant le nombre de départ – écrire un nombre commençant par 0 – ne pas tenir compte de l'ordre décroissant des chiffres – ne proposer que des nombres dont les chiffres sont consécutifs – … Relances – inciter l'élève à noter ce qu'il fait – proposer de commencer par des nombres ayant moins de chiffres – imposer un nombre de départ – … Mise en commun Lors de la mise en commun, les élèves expriment et comparent leurs démarches, rapportent les observations et constats qu'ils ont faits. C'est aussi l'occasion de discuter de : – la différence entre chiffre et nombre – faire le lien entre le nombre soustrait et la position du chiffre A la fin de la mise en commun, certains termes peuvent être institutionnalisés : unités, dizaines, centaines , … , chiffre, nombre, … Variables didactiques En fonction du niveau des élèves, il est possible de modifier l'ordre de grandeur des nombres (3 chiffres, 7 chiffres, …) Pour les élèves de 5P - 6P, cette activité peut être reprise avec des nombres décimaux.

Proposition(s) de déroulement	Les élèves prennent connaissance individuellement de la consigne. Ils engagent le travail en fonction de ce qu'ils ont compris. Une mise en commun intermédiaire portant sur la compréhension de la consigne peut être proposée par l'enseignant. Les élèves poursuivent leur travail en notant leurs résultats mais en notant également les constats et découvertes. La mise en commun finale porte sur les observations faites par les élèves et l'institutionnalisation de certains termes.
Prolongements possibles	Effectuer une seule opération de telle sorte qu'à chaque fois le plus petit chiffre soit remplacé par 9 mais que tous les autres chiffres restent les mêmes, jusqu'à n'obtenir que des 9. Effectuer une seule opération de telle sorte … – qu'un des chiffres augmente/diminue de 1 – que les chiffres inférieurs à 5 soient doublés – que les chiffres pairs soient diminués de moitié – … D'autres questions peuvent être posées : – Quelle opération permet d'augmenter de 1 chaque chiffre (9 devient alors 0) ? – Quelle opération permet de déplacer la virgule d'un cran vers la droite ou vers la gauche ? – Quelle opération permet d'intervertir deux chiffres consécutifs du nombre ? – Quelle opération permet d'intervertir deux chiffres non consécutifs du nombre ? 3P-4P : Activités du module 2, champ C

Éléments pour la synthèse

Dans notre système décimal de numération, tout nombre peut être exprimé comme somme de puissances de 10. Par exemple, 12504 est un nombre qui s’obtient par la séquence d'opérations :

$(1 \times 10000) + (2 \times 1000) + (5 \times 100) + 4$

ou encore $1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

L'activité proposée met bien en évidence cette valeur positionnelle des chiffres. Un 1 placé tout à droite n'a pas la même valeur qu'un 1 placé en 4^e^ position depuis la droite. Dans le premier cas, il représente une unité et vaut 1; dans le second cas, il représente un millier et vaut donc 1000.

Pour en savoir plus :

Gagnebin A., Guignard N., Jaquet F. (1998) *Apprentissage et enseignement des mathématiques, Commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire.* COROME, chapitre 6.

Problèmes divisifs – 5P-6P

Fiche de présentation

Titre de l'activité	Problèmes divisifs
Sous-titre	Bouteilles de limonade à transporter et autres petits problèmes impliquant une division euclidienne
Degré(s) concerné(s)	5P – 6P
Durée estimée	10 – 90 minutes en fonction du nombre de problèmes proposés et de l'insertion ou non d'autres problèmes dont la résolution ne passe pas par une division.
Résumé	Résoudre des problèmes divisifs
Contexte d'utilisation de la calculatrice	EXECUTER APPROFFONDIR CONCEPTUALISER
Contenus et compétences mathématiques	Multiplication, division
Lien(s) avec les plans d'études et moyens d'enseignement	OA[1] : Traduire les données d'un problème en opérations arithmétiques PE[2] : OFL Résoudre des problèmes multiplicatifs et divisifs. Interpréter un résultat. Traduire des calculs en écriture divisive. ME[3] : 5P, thème 6 6P, thème 2
Mots-clé	Division, division euclidienne, interprétation d'un reste
Source	– Moyens d'enseignement 6P, Livre de l'élève p. 24 – Épreuves cantonales de maths 6e primaire – Secteur des Mathématiques de l'Enseignement Primaire

1 OA : objectifs d'apprentissage de l'école primaire genevoise
2 PE : plan d'études romand de mathématiques – degrés 1-6
3 ME : moyens d'enseignement

Problèmes divisifs – Énoncé élève

Bouteilles à transporter

Patrick et Christiane ont 1000 bouteilles de limonade à transporter.
Combien leur faudra-t-il de voyages s'ils mettent 36 bouteilles dans leur caisse ?
Patrick prétend qu'il faudrait moins de voyages en mettant une bouteille de plus par caisse.
Est-ce vrai ?

Multiples de 8

Entre 1 et 2004, combien y a-t-il de multiples de 8 ?

100^e jour

Cette année-là, le premier jour fut un jeudi, le deuxième jour fut donc un vendredi et le troisième jour un samedi.
Quel jour de la semaine fut le 100^e jour ?

Carrelage

Un carreleur doit recouvrir le sol d'une pièce rectangulaire de 3,25 m sur 4,10 m avec des catelles carrées de 12 cm de côté, vendues par paquets de 24.
Combien de paquets de catelles ce carreleur doit-il acheter ?

Anniversaire

Séraphine vient de fêter ses 10'000 jours.
Mais quel âge Séraphine aura-t-elle lors de son prochain anniversaire ?

119^e décimale

Lorsque l'on divise 126 par 37, quel est le chiffre de la 119^e décimale ?

Commentaires pour le maitre

Analyse à priori de l'activité (enjeux de l'activité, démarches possibles, difficultés, relances, mise en commun)

Intentions

Cette activité permet aux élèves :

- de consolider les concepts de multiplication et de division et d'expliciter les liens entre les deux opérations
- prendre conscience de la relation entre dividende, diviseur, quotient et reste dans une division euclidienne
- d'effectuer des divisions à l'aide de différents outils de calcul.

Démarches possibles

NB : on donne ici des indications pour le premier problème, à transposer pour les autres.

- répéter l'addition de 36 pour atteindre 1000 puis compter le nombre de fois que 36 a été additionné :
  36 + 36 + 36 + 36 + 36 + 36 … pour atteindre 1000.
  1 2 3 4 5 6 …
- soustraire un certain nombre de fois 36 à 1000 pour atteindre 0 puis compter le nombre de soustractions :
  1000 – 36 – 36 – 36 – 36 …
  1 2 3 4 … ou bien
  1000 – 360 – 360 – 36 – 36 …
  10 20 21 22 …
  puis de la même manière avec 37.
- faire plusieurs essais pour résoudre la multiplication lacunaire
  $36 \times ? = 1000$
  $36 \times 20 = 720$
  $36 \times 30 = 1080$
  $36 \times 27 = 972$
  $36 \times 28 = 1008$ donc 27 voyages
  puis de la même manière avec 37.
- résoudre la division par algorithme, avec quotient et reste :
  1000 : 36 = 27 reste 28
- résoudre la division par algorithme, avec partie décimale
  1000 : 36 = 27.777777…
- résoudre la division avec la calculatrice, sans utilisation de la division euclidienne
- résoudre la division avec la calculatrice, en utilisant la touche "division euclidienne"[1]
- interpréter correctement ou non le reste
- ...

1 Dans le cas où la calculatrice utilisée possède cette fonction.

	Difficultés potentielles – ne pas comprendre ce qui est demandé, ce que l'on doit chercher – effectuer des opérations avec les données numériques du problème mais sans leur donner de sens – ne pas parvenir interpréter le résultat d'un calcul – oublier le sens d'une opération après en avoir fait le calcul – réaliser que le résultat ne peut pas être non entier sans savoir qu'en faire – …
Proposition(s) de déroulement	Proposer ces problèmes divisifs avec des problèmes multiplicatifs ou additifs pour mettre en évidence les différentes opérations. L'emploi de la calculatrice doit être proposée aux élèves qui résolvent ces problèmes sans passer par la division avec comme relance : – Est-il possible de résoudre ce problème en faisant moins d'opérations ? – Comment trouver le résultat en ne faisant qu'une seule opération sur la calculatrice ? Inciter les élèves qui utilisent la calculatrice pour faire une division à se poser des questions sur le résultat, notamment sur la partie décimale. Monter également comment effectuer une division euclidienne sur la calculatrice[1] et faire le lien avec l'algorithme.
Prolongements possibles	Tout autre problème divisif.

1 Dans le cas où la calculatrice utilisée possède cette fonction.

Corrigé détaillé

Bouteilles à transporter

1000 : 36 = 27 reste 28
Patrick et Christiane devront donc faire 28 voyages en transportant par exemple 36 bouteilles lors des 27 premiers voyages et les 28 bouteilles restantes pour le dernier voyage.

Patrick a tort. S'ils suivaient son idée, Patrick et Christiane feraient 27 voyages avec 37 bouteilles ($27 \times 37 = 999$) et un 28e voyage pour transporter la dernière bouteille. En effet la division donne 1000 : 37 = 27 reste 1.

Multiples de 8

2004 : 8 = 250,5 ou 2004 : 8 = 250 reste 4. Le problème réside dans l'interprétation de la partie décimale du quotient ou dans l'interprétation du reste. La réponse ne pouvant être qu'un nombre entier, est-ce 250 ou 251 ?
Pour un nombre multiple de 8, par exemple 40, le nombre de multiples de 8 entre 1 et 40 est le résultat de la division de 40 par 8, donc 5 multiples (8, 16, 24, 32, 40).
Pour les nombres suivants 41, 42, 43, 44, … 47, le nombre de multiples reste inchangé puisqu'il n'y a pas de nouveau multiple de 8.
Entre 1 et 2004, il y donc le même nombre de multiples de 8 (ce sont d'ailleurs les mêmes) qu'entre 1 et 2000 (2000 est le plus grand multiple de 8 inférieur à 2004), c'est-à-dire 250.

100e jour

Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	…			

En observant ce tableau, on constate que dans la colonne mercredi il n'y a que des multiples de 7, que tous les multiples de 7 plus 1 sont des jeudis, que tous les multiples de 7 plus 2 sont des vendredis, …
100 est un multiple de 7 plus combien ? Répondre à cette question permet de déterminer la colonne dans laquelle se trouve 100. Pour cela l'outil le plus approprié est la division euclidienne : 100 : 7 = 14 reste 2. 100 est un multiple de 7 plus 2, ce sera donc un vendredi.

Anniversaire

L'outil de résolution le plus approprié pour résoudre ce problème est à nouveau la division euclidienne : 10000 : 365 = 27 reste 145 et 10000 : 366 = 27 reste 118. Que l'on compte avec des années de 365 ou de 366 jours, Séraphine aura 28 ans lors de son prochain anniversaire.
On peut aussi considérer qu'une année moyenne comporte 365,25 jours. 10000 : 365,25 = 27,3785… et une bonne interprétation de la partie décimale permet de donner le résultat.

Carrelage

Ce problème est un problème à tiroirs : pour déterminer le nombres de paquets, il s'agit d'abord de trouver le nombres de catelles. Mais pour cela, il faut comparer les dimensions de la pièce avec celles d'une catelle, ce qui implique un changement d'unités.
Ce problème comporte de plus deux implicites : les catelles sont posées parallèlement aux côtés de la pièce et elles sont posées bord à bord (il n'y a pas de joint entre elles).
Exprimées en centimètres, la largeur et la longueur de la pièce sont respectivement de 325 cm et de 410 cm. Combien de catelles peut-on placer en largeur, combien en longueur ?
La division ou la division euclidienne permet de répondre à cette question. 325 : 12 = 27 reste 1 ou 325 : 12 = 27,08333…, 410 : 12 = 34 reste 2 ou 410 : 12 = 34,1666…
En supposant que pour chaque fraction de catelle, le carreleur doit prendre une nouvelle catelle, il placera 28 catelles en largeur et 35 en longueur et aura donc besoin de 980 catelles.
En supposant que le carreleur parvienne à partager sans casse les catelles en 6 morceaux rectangulaires de 2 cm de large ou en 12 morceaux de 1 cm de large, il lui faudra exactement 926 catelles (918 catelles entières, 34 morceaux de 1×12 cm découpés dans 3 catelles et 27 morceaux de 2×12 cm et un morceau de 2×1 cm découpés dans 5 catelles).
Pour 980 catelles, le carreleur doit acheter au moins 41 paquets de 24 (980 : 24 = 40 reste 20).
Pour 926 catelles, le carreleur doit acheter au moins 39 paquets de 24 (926 : 24 = 38 reste 14).

119ᵉ décimale

126 : 37 = 3,405405405… . Effectuer cette division à l'aide de l'algorithme par les échanges permet de comprendre la périodicité de la partie décimale.

$$
\begin{array}{cccccccccc|l}
 & 1 & 2 & 6 & & & & & & & 3\ 7 \\ \cline{11-11}
- & 1 & 1 & 1 & & & & & & & 3,\ 4\ 0\ 5\ 4\ 0\ 5\ \ldots \\ \cline{2-4}
 & & \mathbf{1} & \mathbf{5} & 0 & & & & & & \\
 & - & 1 & 4 & 8 & & & & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & 2 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & - & 1 & 8 & 5 & & & & \\ \cline{5-7}
 & & & & & \mathbf{1} & \mathbf{5} & 0 & & & \\
 & & & & - & 1 & 4 & 8 & & & \\ \cline{6-8}
 & & & & & & & 2 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & - & 1 & 8 & 5 & \\ \cline{8-10}
 & & & & & & & & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \\
 & & & & & & & & & \ldots &
\end{array}
$$

On constate d'abord que les chiffres des décimales se répètent avec une périodicité de 3. On observe que le chiffre des 1re, 4e, 7e, 10e, 13e … décimales est toujours 4, que le chiffre des 2e, 5e, 8e 11e 14e … décimales est toujours 0 et que le chiffre des 3e, 6e, 9e, 12e, 15e … décimales est toujours 5. Autrement dit, 5 est le chiffre de toutes les décimales dont la position est un multiple de 3, 4 est le chiffre de toutes les décimales dont la position est un multiple de 3 plus 1 et 0 est le chiffre de toutes les décimales dont la position est un multiple de 3 plus 2.
Comme 119 est un multiple de 3 plus 2 ($119 : 3 = 39$ reste 2 ou $3 \times 39 + 2 = 119$), le chiffre de la 119e décimale du quotient de 126 par 37 est un 0.

Éléments pour la synthèse

Parmi les diverses démarches pour résoudre ces problèmes, la division euclidienne est la plus efficace.
L'emploi de la calculatrice permet de découvrir et/ou donner du sens à une opération (la division) qui peut remplacer une suite d'opérations plus ou moins longues (additions ou soustractions répétées) ou aléatoires (multiplication lacunaire).
Ces problèmes sont aussi l'occasion montrer comment réaliser une division euclidienne sur la calculatrice TI-34II si les élèves l'ont à disposition (touches [2nd] [INT÷]).
Pour faire apparaitre le quotient et le reste avec une calculatrice n'ayant pas cette fonction (c'est le cas de la calculatrice TI-30XS MultiView), on commence par faire la division « exacte ». La partie entière du résultat exact est le quotient entier de la division euclidienne. Au résultat exact, on retranche cette partie entière puis on multiplie la différence par le diviseur pour obtenir le reste de la division euclidienne.

Exemple : 1234 : 4 = 308,5 (résultat « exact » dont la partie entière est 308)
308,5 – 308 = 0,5 (0,5 est la partie décimale du résultat « exact »)
0,5 × 4 = 2 (le reste est 2)
1234 : 4 = 308 reste 2

Pour rappel :

Division euclidienne

La division euclidienne est l'opération qui consiste, à partir de deux nombres naturels D (dividende) et d (diviseur), à déterminer deux nombres naturels q (quotient) et r (reste) tels que $D = q \times d + r$ *avec* $r < d$.
Par exemple, dans la division euclidienne de 23 par 4 : le quotient est 5 et le reste est 3.
En effet, $23 = 5 \times 4 + 3$ *et* $3 < 4$.

Estimation – 5P-6P

Fiche de présentation

Titre de l'activité	Estimation
Degré(s) concerné(s)	5P – 6P
Durée estimée	Une première période de 45 minutes, puis plusieurs moments d'une quinzaine de minutes.
Résumé	Estimer le diviseur en fonction du dividende et du quotient
Contexte d'utilisation de la calculatrice	VÉRIFIER
Contenus et compétences mathématiques	Division Estimation
Pré requis	Connaitre le concept de division
Lien(s) avec les plans d'études et moyens d'enseignement	OA[1] : Utiliser des propriétés des opérations et les règles du système de numération pour effectuer des calculs de façon efficace PE[2] : OFL Utiliser des propriétés des opérations et les règles du système de numération pour effectuer des calculs de façon efficace. ME[3] : 5P, thème 6 6P, thème 2
Mots-clé	Division, diviseur, dividende, quotient, estimation,
Source	Secteur des Mathématiques de l'Enseignement Primaire

1 OA : objectifs d'apprentissage de l'école primaire genevoise
2 PE : plan d'études romand de mathématiques – degrés 1-6
3 ME : moyens d'enseignement

Estimation – Enoncé élève

Règle du jeu pour deux joueurs

Matériel : une calculatrice
papier, crayons

Le premier joueur choisit :

1. un nombre entre 200 et 400 qu'il tape sur la calculatrice suivi de la touche division $\boxed{\div}$.

2. une des cibles suivantes :
   - entre 10 et 15
   - entre 11 et 16
   - entre 12 et 17
   - entre 13 et 18
   - entre 14 et 19
   - entre 15 et 20

Le second joueur doit introduire un nombre tel que le résultat de le quotient soit dans la cible. Il a droit à plusieurs essais mais tous les résultats obtenus sont écrits.
Ensuite, les joueurs changent de rôle.

Le but est d'atteindre la cible avec le moins possibles d'essais.

Exemple :

327 ÷ …….. = ……… Cible : entre 13 et 18

327 ÷ …….. = ………

327 ÷ …….. = ………

…

Commentaires pour le maitre

Analyse à priori de l'activité (enjeux de l'activité, démarches possibles, difficultés, relances, mise en commun)	Intentions Cette activité permet : – de travailler l'estimation de multiplications ou de divisions – de revoir le concept de division – de jouer avec l'ordre de grandeur des nombres Démarches possibles – essayer des nombres au hasard – essayer des nombres en tenant compte des résultats précédents – chercher un nombre qui, multiplié par un nombre compris dans la cible donne le nombre de départ – diviser le nombre de départ par un nombre compris dans la cible – faire des opérations approchées – utiliser des procédures de calcul réfléchi – utiliser les algorithmes pour effectuer des multiplications ou des divisions – … Mise en commun La mise en commun est l'occasion pour les élèves – de faire part de leur démarches – d'établir le rapport de réciprocité entre multiplication et division – de faire le lien entre dividende, diviseur et quotient – de mettre à plat les démarches personnelles de calcul réfléchi, d'en discuter et de les comparer – …

Proposition(s) de déroulement	Nombre d'élèves Toute la classe, par groupes de 2 Matériel Calculatrice personnelle Cette activité peut faire l'objet d'un atelier, être à disposition dans le coin mathématique ou faire l'objet d'un concours. Dans un premier temps cependant, il est nécessaire de proposer l'activité de manière collective de manière à ce que chaque élève puisse s'approprier les règles du jeu et que les démarches des élèves puissent être mises en commun. Comme beaucoup de jeux dans lesquels des compétences calculatoires sont visées, ce jeu doit être répété à de nombreuses reprises. Cette activité peut être différenciée en jouant sur l'ordre de grandeur des nombres. Il est évident que cette activité est plus intéressante si les élèves sont appelés à utiliser des procédures de calcul réfléchi. La calculatrice ne devrait donc être utilisées que pour vérifier les opérations proposées. Elle peut cependant permettre à certains élèves de mieux concevoir la tâche et les inciter à faire des divisions plutôt que des multiplications.
Prolongements possibles	Cf. tableau des changements de variables ci-dessous

Changement de variables

Cette activité peut être proposée avec d'autres valeurs numériques.

Nombre de départ	Cibles possibles		
entre 400 et 700	entre 15 et 20 entre 16 et 21	entre 17 et 22 entre 18 et 23	entre 19 et 24 entre 20 et 25
entre 600 et 1000	entre 20 et 25 entre 21 et 26	entre 22 et 27 entre 23 et 28	entre 24 et 29 entre 25 et 30
entre 850 et 1500	entre 25 et 30 entre 26 et 31	entre 27 et 32 entre 28 et 33	entre 29 et 34 entre 30 et 35
entre 1200 et 2000	entre 30 et 35 entre 31 et 36	entre 32 et 37 entre 33 et 38	entre 34 et 39 entre 35 et 40
entre 1500 et 2500	entre 35 et 40 entre 36 et 41	entre 37 et 42 entre 38 et 43	entre 39 et 44 entre 40 et 45
entre 1800 et 3000	entre 40 et 45 entre 41 et 46	entre 42 et 47 entre 43 et 48	entre 44 et 49 entre 45 et 50
entre 2500 et 4000	entre 45 et 50 entre 46 et 51	entre 47 et 52 entre 48 et 53	entre 49 et 54 entre 50 et 55

Corrigé détaillé

Soit N un nombre donné, c_1 la valeur inférieure de la cible et c_2 la valeur supérieure de la cible. L'ensemble des solutions est compris entre les valeurs N / c_2 et N / c_1

Si l'on se limite aux nombres entiers, les solutions sont comprises entre la valeur arrondie par excès de N / c_2 et la valeur arrondie par défaut de N / c_1.

Par exemple, si le nombre de départ est 327 et la cible comprise entre 13 et 18, (N = 327, c_1 = 13 et c_2 = 18), les solutions seront comprises entre 327/18 et 327/13, c'est-à-dire, en valeurs entières, supérieures ou égales à 19 et inférieures ou égales à 25.

Éléments pour la synthèse

Dans cette activité, la tâche consiste à déterminer approximativement un diviseur tel que le quotient soit dans la cible. Pour ce faire, la démarche la plus efficace consiste à diviser le nombre de départ par un des nombres compris dans la cible.

Pour éviter des calculs algorithmiques fastidieux, inutiles d'ailleurs puisque des calculs exacts ne sont pas nécessaires vu la largeur de la cible, les élèves doivent déterminer une opération voisine, à la fois plus simple de manière à être calculée par calcul réfléchi, mais aussi suffisamment proche pour atteindre la cible.
Par exemple, si le nombre de départ est 327 et la cible entre 13 et 18.
On pourrait calculer exactement 327 : 15,5, ou 327: 16, 16 étant encore relativement au milieu de la cible. Mais des opérations proches, comme 320 : 16 ou 330 : 15, voire même 300 : 15 que l'on peut aisément calculer, suffisent pour déterminer un diviseur qui atteint la cible.

Si un nombre ne permet pas d'atteindre la cible, la question à se poser est de savoir s'il faut proposer ensuite un autre plus petit ou plus grand.
Par exemple, si le nombre de départ est 2704 et la cible entre 40 et 45, on peut proposer 60 (2700 : 45 = 60 semble être une bonne approximation). Mais 2704 : 60 > 45. Faut-il alors essayer 61 ou 59 ? Il est souhaitable qu'un débat puisse avoir lieu entre les élèves.
Il devrait en ressortir que plus le diviseur est grand, plus le quotient est petit et inversement.

Combien de pas à zéro ? – 5P-6P

Fiche de présentation

Titre de l'activité	Combien de pas à zéro ?
Sous-titre	Propriétés des nombres entiers
Degré(s) concerné(s)	5P – 6P
Durée estimée	3 périodes de 45 minutes
Résumé	En un minimum de pas, ramener un nombre à zéro en utilisant les quatre opérations de base appliquées aux nombres de 1 à 9 seulement.
Contexte d'utilisation de la calculatrice	RECHERCHER APPROFFONDIR
Contenus et compétences mathématiques	Critères de divisibilité Nombres premiers Décomposition d'un nombre entier en facteurs premiers
Pré requis	Connaissance de la multiplication
Lien(s) avec les plans d'études et moyens d'enseignement	OA[1] : Lire, écrire, décomposer des nombres entiers PE[2] : OFL Traduire des calculs en écritures multiplicatives et divisives Calcul réfléchi Répertoires mémorisés ME[3] : 5P, thèmes 5 et 6 6P, thème 4
Mots-clé	Calcul, multiplication, diviseurs, nombres premiers
Source	- Williams D., Stephens M. (1992). Activity 1: Five steps to zero. In J.T. Fey (Ed.), *Calculators in mathematics education* (pp. 233-234). Reston VA: NCTM. - Présentation d'une expérimentation dasn Kieram C:, Guzman J. (2007) Interaction entre calculatrice, technique et théorie : émergence des structures numériques chez les élèves de 12 à 15 ans... In Floris R., Conne F (Eds.), *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques*. Bruxelles : De Boeck

1 OA : objectifs d'apprentissage de l'école primaire genevoise
2 PE : plan d'études romand de mathématiques – degrés 1-6
3 ME : moyens d'enseignement

Combien de pas à zéro ? – Énoncé élève

Prends n'importe quel nombre entier entre 19 et 99 et essaie de le ramener à zéro en trois pas ou moins, en utilisant seulement les nombres de 1 à 9 et les quatre opérations : **+**, **–** , ×, **:**

Le même nombre peut être utilisé plusieurs fois, mais tu dois écrire seulement une opération par ligne.

Exemple, en partant de 67 :

67 – 3 = 64
64 : 8 = 8
8 – 8 = 0

Est-ce toujours possible ?

Quelles sont les meilleures stratégies pour ramener des nombres à zéro ?

Énonce les découvertes que tu as faites.

Commentaires pour le maitre

Analyse à priori de l'activité (enjeux de l'activité, démarches possibles, difficultés, relances, mise en commun)	Intentions Développer l'utilisation en situation des propriétés multiplicatives et divisives des nombres naturels. Démarches possibles – rechercher au hasard ou systématiquement en essayant de diviser (à la calculatrice) par les nombres de 1 à 9 – exploiter les critères de divisibilité connus – ajouter ou soustraire un nombre pour obtenir un multiple d'un nombre entre 2 et 9 – essayer des produits de 2 ou 3 nombres inférieurs à 10 en se rapprochant du nombre de départ choisi – utiliser la décomposition des nombres en produits de nombres premiers. Difficultés Les élèves peuvent rester à des recherches au hasard. Une organisation en groupes, avec une seule calculatrice par groupe, peut favoriser la formulation de règles entre élèves. Relances – Proposer un nombre (72 ou 79) et demander de rechercher plusieurs façons d'arriver à zéro, en essayant d'utiliser le moins de pas possible. – Faire rechercher une autre façon en utilisant moins de pas. – Faire noter et expliciter les démarches. – Demander si une stratégie élaborée fonctionne toujours, et pourquoi. – Faire chercher à ramener 91 ou 92 à zéro en trois pas Mise en commun Il peut être intéressant de demander aux élèves ou groupes d'élèves de proposer à la classe des nombres « défis », qui leur semble difficile à mettre à zéro. Lors de la mise en commun, les élèves comparent les différentes solutions trouvées, expriment et comparent leurs démarches, rapportent les observations et constats qu'ils ont faits. Ils peuvent élaborer des raisonnements validant les propriétés constatées (cf. Éléments pour la synthèse)

	C'est aussi l'occasion de discuter de : – multiples, diviseurs, critères de divisibilité – nombres premiers <u>Variables didactiques</u> Les stratégies varient en fonction des relances proposées et des connaissances de des élèves sur les critères de divisibilité.
Proposition(s) de déroulement	Après une période de travail individuel (15-20 minutes), former des groupes. Des mises en commun intermédiaires peuvent se révéler nécessaires afin de favoriser la formulation de règles. Les élèves poursuivent leur travail en notant les résultats. La mise en commun finale porte sur les observations faites par les élèves, leur validation ou non, et l'institutionnalisation de certains termes.
Prolongements possibles	– Quels sont tous les nombres que l'on ne peut pas ramener à zéro en trois pas ou moins ? Pourquoi ? – Prends n'importe quel nombre enter entre 19 et 499 et essaie de le ramener à zéro en quatre pas ou moins, en utilisant seulement les nombres de 1 à 9 et les quatre opérations : +, – , ×, **:** Quels sont les nombres que l'on ne peut pas ramener à zéro en quatre pas ou moins ? Pourquoi ? – Prends n'importe quel nombre enter entre 19 et 999 et essaie de le ramener à zéro en cinq pas ou moins, en utilisant seulement les nombres de 1 à 9 et les quatre opérations : +, – , ×, **:** Quels sont les nombres que l'on ne peut pas ramener à zéro en cinq pas ou moins ? Pourquoi ?

Éléments pour la synthèse

A utiliser et reformuler selon les découvertes des élèves.

Pour les nombres produits de deux nombres à un chiffre, il est est facile de se rendre compte que l'on peut les ramener à zéro en deux pas. Par exemple 72 : $72 : 9 = 8$ / $8 - 8 = 0$.
Pour les autres nombres , il faut d'abord ajouter ou soustraire un nombre à un chiffre afin d'atteindre un de ces nombres. Par exemple 90 : $90 - 9 = 81$ / $81 : 9 = 9$ / $9 - 9 = 0$ (Il y aussi d'autres possibilité comme : $90 : 9 = 10$ / $10 - 1 = 9$ / $9 - 9 = 0$).

Ainsi, on peut en tous cas ramener à zéro tous les nombres de 1 à 90 en trois pas ou moins.
Et 91 ? Oui, en le divisant d'abord par 7 ($91 : 7 = 13$ / $13 - 7 = 6$ / $6 - 6 = 0$)
Et 92 ? Dans l'intervalle entre $92 - 9$ et $92 + 9$, il n'y a pas de produit de deux nombres à un chiffre, il faudra de toutes façons effectuer 4 pas au moins ($92 + 4 = 96$ / $96 : 8 = 12$ / $12 - 3 = 9$ / $9 - 9 = 0$ ou $92 : 4 = 23$ / $23 - 2 = 21$ / $21 : 3 = 7$ / $7 - 7 = 0$)

<u>En quatre pas</u> :

Pour les prolongements, il est clair que l'on peut ramener à zéro en trois pas tous les nombres produits de trois nombres à un chiffre. Par exemple $392 = 7 \times 7 \times 8$ ($392 : 7 = 56$ / $56 : 7 = 8$ / $8 - 8 = 0$). Par conséquent, on peut ramener à zéro en quatre pas tous les nombres qui sont dans un intervalle entre $n - 9$ et $n + 9$, n étant un produit de trois nombres à un chiffre. On peut donc ramener à zéro tous les nombres jusqu'à $738 = 9 \times 9 \times 9 + 9$ en quatre pas ou moins.
Y a-t-il d'autres nombres que l'on peut ramener à zéro en quatre pas ?

851 et 853 ont besoin de six pas pour être ramenés à 0. En effet, 851 est le produit de deux nombres premiers, 23 et 37, et 853 est lui-même un nombre premier et tous les nombres dans un intervalle de de + ou – 9 de ces deux nombres ont besoin de cinq pas au moins pour être ramenés à zéro.

La décomposition des nombres en produits de nombres premiers est donc un outil mathématique important pour aller plus loin. Une calculatrice est ici très utile . Il est également possible de proposer une table des facteurs premiers pour les nombres de 1 à 999.