

Activité « Les quadrilatères pavent »

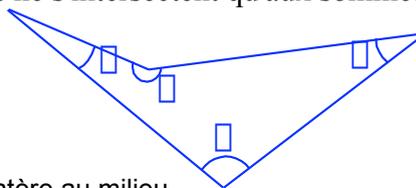
Titre de l'activité	Quels quadrilatères pavent le plan?
Type d'activité	Situation problème ouvert. Activité déductive avec justification. Cette activité devrait suivre une activité de découverte des pavages.
Degrés scolaires indicatifs	8-9-10-11
Enoncé destiné aux élèves	Quels types de quadrilatères pavent le plan?
Connaissances mathématiques nécessaires	La somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés. La notion de quadrilatère simple. La somme des angles d'un quadrilatère simple vaut 360 degrés.
Matériel	Papier blanc ou quadrillé, règle graduée
Durée	45mn-70h
Propositions de déroulement	Laisser les élèves en petits groupes, demander d'essayer de paver le plan avec plusieurs quadrilatères et de dire quels types de quadrilatère pavent le plan. Après 30 minutes, confronter les résultats, puis donner une preuve si cela n'a pas encore été fait par les élèves.
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	La somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés. Détermination et propriétés des quadrilatères.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Une preuve du fait que tout quadrilatère pave le plan devrait être donnée à la fin de l'activité.
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	La somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés. Le théorème des angles alternes-internes.
Développements possibles	Pavages par bandes (ligne brisée ou courbe) Périodicité.
Liens interdisciplinaires	Mouvement ondulatoire.

Annexe à l'activité « Les quadrilatères pavent »

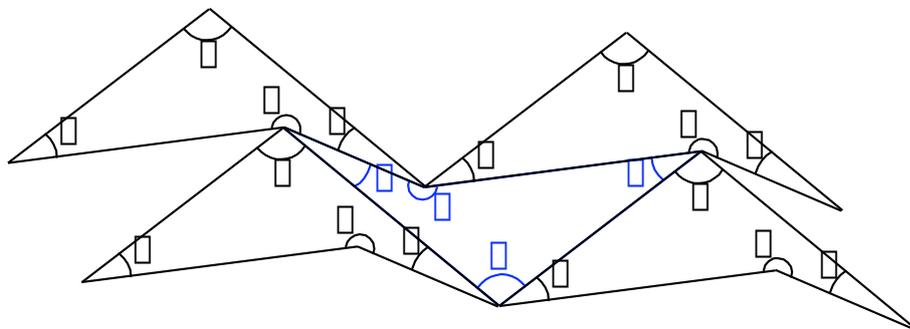
Démonstration que les quadrilatères dont les côtés ne s'intersectent qu'aux sommets pavent le plan.

Soit Q un quadrilatère simple.

Appelons ces angles : α , β , γ et δ .



Faisons une rotation de 180° d'une copie de ce quadrilatère au milieu de chacun de ses côtés, il faut donc quatre copies. Nous obtenons :



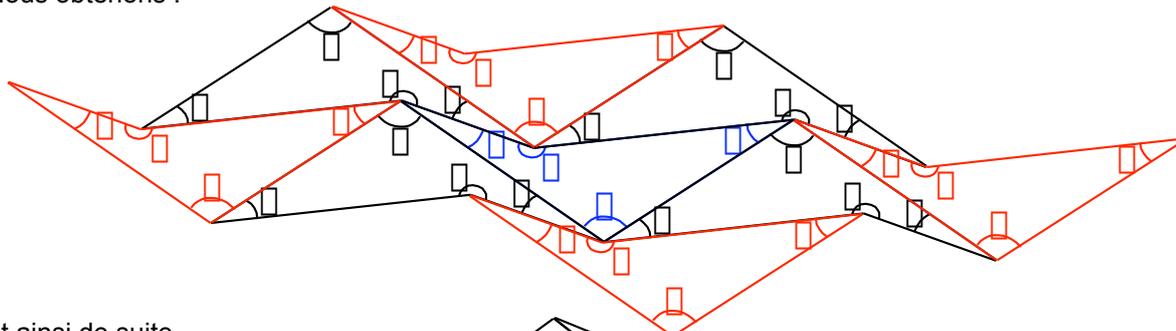
Les côtés se confondent, car chacun des sommets d'un côté est se retrouve sur l'autre sommet du même côté. En chaque sommet du quadrilatère de départ, il y a maintenant trois angles.

Chacun est isométrique à un des angles de Q .

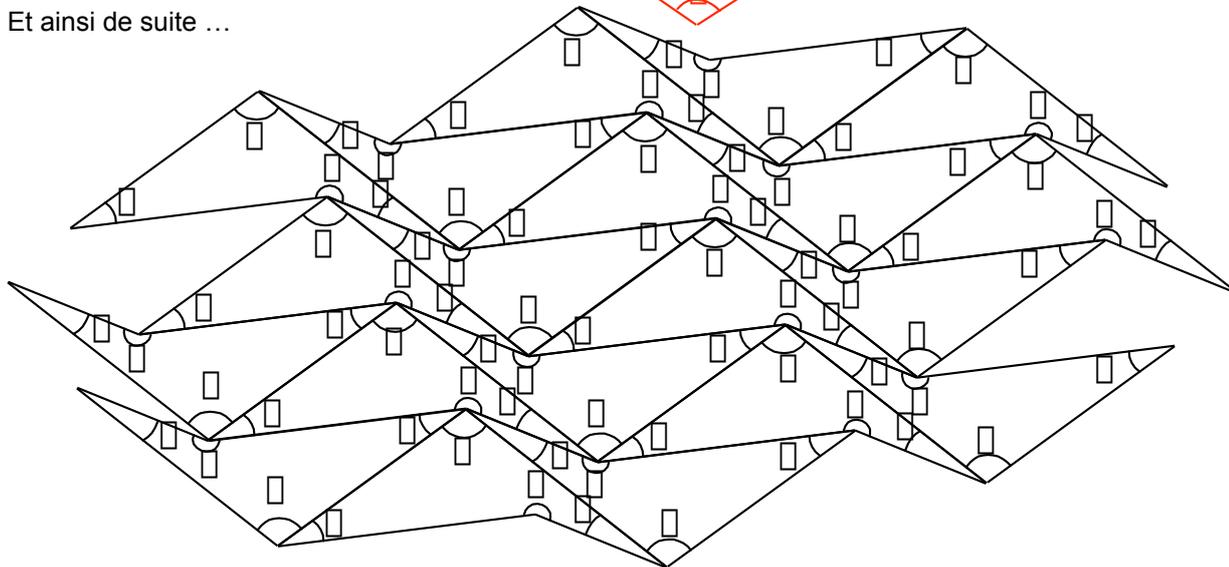
En chacun de ces quatre sommets, l'angle que forme la partie non pavée du plan est isométrique au quatrième angle de Q , car la somme des angles d'un quadrilatère simple vaut un angle plein (360°).

Il suffit donc d'y "mettre" une copie de Q . Pour la même raison que ci-dessus, les côtés se confondent.

Nous obtenons :



Et ainsi de suite ...



Annexe à l'activité « Les quadrilatères pavent le plan »

Démonstration que les quadrilatères dont les côtés ne s'intersectent qu'aux sommets pavent le plan.

Soit Q un quadrilatère simple.

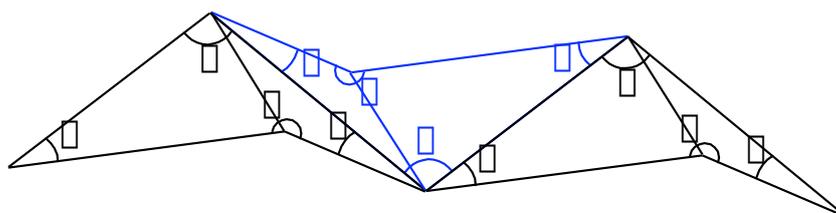
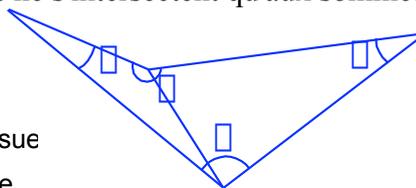
Appelons ces angles : α , β , γ et δ .

Construisons la diagonale (ou une des diagonales) issue du (d'un des) sommet(s) ayant le plus grand angle, elle est obligatoirement à l'intérieur du quadrilatère.

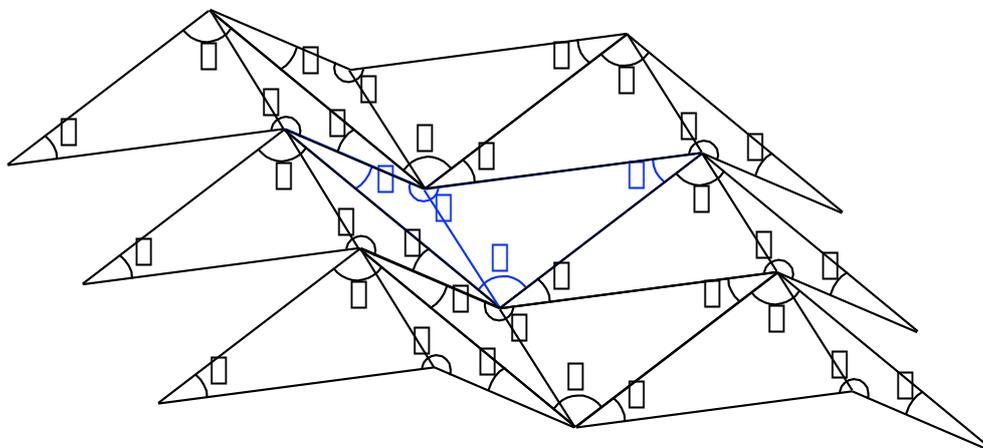
Dans notre exemple : $[BD]$

Cela donne deux triangles.

La même démarche que le pavage par un pavé de forme triangulaire donnera un pavage du plan.



Puis



Etc ...

