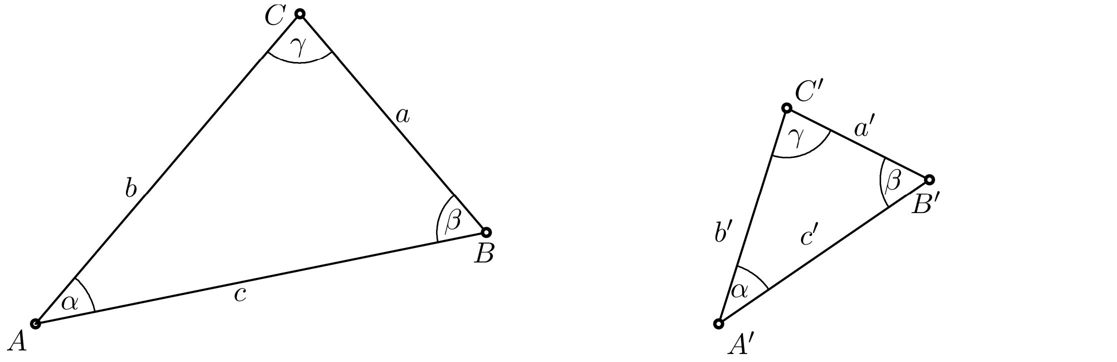
# Une preuve du théorème de Thalès par pavages.

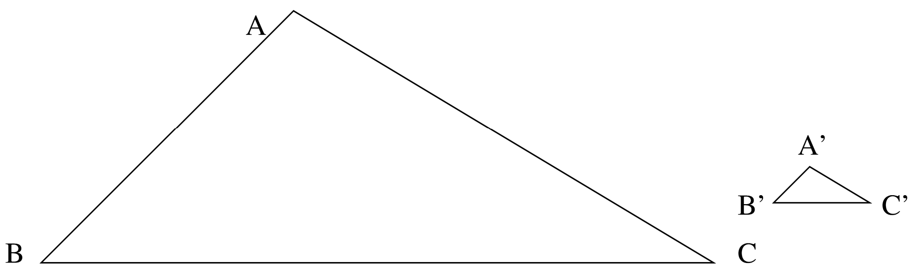
Le théorème de Thalès dit que deux triangles sont semblables (i.e. $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ et $\gamma = \gamma'$) si et seulement si les longueurs des côtés des triangles sont proportionnelles (i.e. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$).

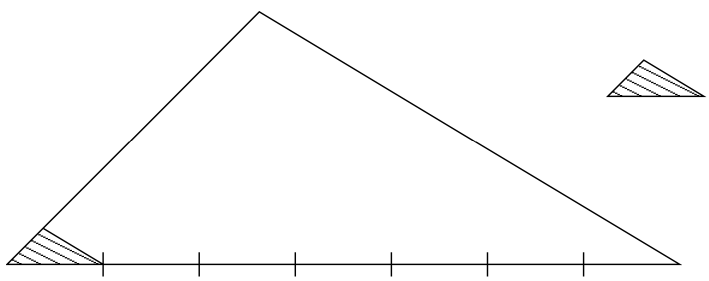



Démontrons tout d'abord Thales dans le cas d'un rapport entier. Enonçns tout d'abord le théorème.

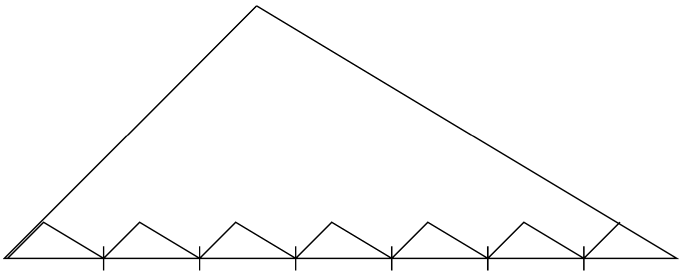
**Théorème.** *Soit $ABC$ et $A'B'C'$ deux triangles tels que $\frac{a}{a'} = n$, alors $ABC$ et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement si $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = n$.*

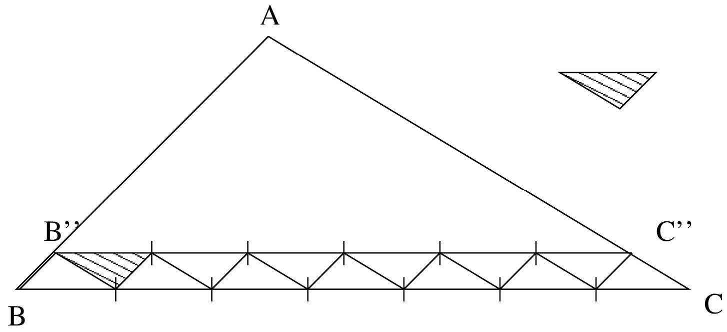
**preuve** Démontrons tout d'abord que si les angles sont isométriques, alors $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = n$. Nous démontrons cela par récurrence sur $n$. Si $n = 1$ alors les $a = a'$ et par le deuxième cas d'égalité des triangles (angle/côté/angle), les deux triangles sont isométriques. ce qui implique bien $b = b'$ et $c = c'$. Supposons que si deux triangles ont mêmes angles et une paire de côtés de rapport $n - 1$ alors le rapport des autres paires de côtés valent aussi $n - 1$.



Comme $\frac{a}{a'} = n$, on peut diviser le segment $[B, C]$ en $n$ parties égales de longueur $a'$. et comme les deux triangles ont les mêmes angles, on peut construire sur $[B, C]$ $n$ triangles isométriques





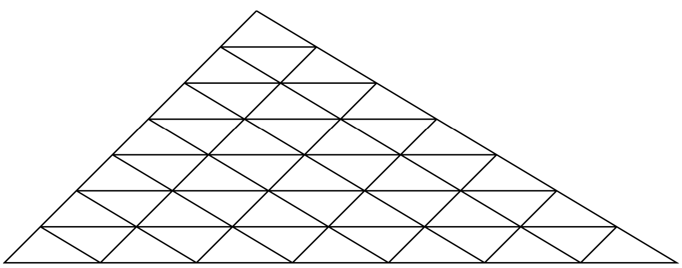

à $A'B'C'$. Sur ces $n$ triangles isométriques, on peut construire $n-1$ triangles isométriques aux précédents (comme dans le cas du pavage par des triangles en bandes).

Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés, les base de ces $n-1$ triangles sont alignées. Le reste du triangle $ABC$ (auquel on enlève cette bande de $2n-1$ triangles) est un triangle, noté $AB''C''$ ayant mêmes angles que $A'B'C'$ et $\frac{a''}{a'} = n-1$.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence sur les triangles $A'B'C'$ et $AB''C''$. Comme de plus $b = b' + \overline{B''A}$ et que $\overline{B''A}/b' = n-1$ par hypothèse de récurrence, on obtient

$$\frac{b}{b'} = \frac{b' + (n-1)b'}{b'} = n.$$

Le raisonnement est identique pour $\frac{c}{c'} = n$. Remarquons que si on réitère cette découpe par bande du triangle $ABC$, on obtient un pavage de $ABC$ par des translatés du triangle $A'B'C'$.



Démontrons l'autre implication. Supposons que $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = n$ et démontrons que $\alpha = alpha'$, $\beta = \beta'$ et $\gamma = \gamma'$.

De nouveau par récurrence sur $n$. Si $n = 1$, par le troisième cas d'égalité des triangles, les deux triangles sont isométriques et donc ont les même angles.

Si $n > 1$, on veut montrer que l'on peut paver comme précdemment le triangle $ABC$ par des copies du triangle $A'B'C'$.

On peut construire le même pavage par bande que dans l'implication réciproque. Tout d'abord on construit par le deuxième cas d'égalité des triangles (angle/côté/angle) un triangle ayant comme angle $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ et le côté entre $\beta$ et $\gamma$ isométrique à $[B', C']$. Par l'implication déjà prouvée et le fait que ce triangle a les mêmes angles que $ABC$ et une paire de côté avec un rapport entier, il a aussi ces autres côtés dans le même rapport entier. Ces autres côtés sont donc isométriques aux côtés du triangle $A'B'C'$. Par le troisième cas d'égalité des triangles (côté/côté/côté), il sont isométrqiues et ont donc les mêmes angles. Donc les triangles $ABC$ et $A'B'C'$ sont semblables.

Ceci finit la démonstration de Thalès dans le cas d'un rapport entier.

Pour le cas où $\frac{a}{a'} = \frac{m}{n}$ est rationnel, il suffit de construire un troisième triangle $A''B''C''$ dont les côtés valent $a/n$, $b/n$ et $c/n$. Ce nouveau triangle est à rapport entier avec chacun des deux triangles (de rapport $n$ avec $ABC$ et de rapport $m$ avec $A'B'C'$). On peut donc appliquer Thalès entier sur entre $ABC$ et $A''B''C''$ et entre $A'B'C'$ et $A''B''C''$. Si les angles des trois triangles sont les mêmes et que par construction,

$$\frac{a}{a'} = \frac{\frac{a}{a''}}{\frac{a'}{a''}} = \frac{m}{n}.$$

On obtient

$$\frac{b}{b'} = \frac{\frac{b}{b''}}{\frac{b'}{b''}} = \frac{m}{n}.$$

et de même pour $c/c'$.

Le cas où le rapport est irrationnel est plus délicat (c'est d'ailleurs là que les grecs avaient un problème). Il faut en effet approcher le rapport irrationnel $\rho$, par une suite de rationnels $r_n$, ensuite construire une suite de triangles $T_n$ ayant comme rapport avec un des triangles la suite des rationnel$r_n$ approchant $\rho$, démontrer que les constructions et les résultats cherchés dépendent continuement de la dimension des triangles et conclure par un passage à la limite.

Une dernière remarque.

Il est intéressant de voir que la preuve de Thales entier par pavage nous permet de déduire l'identité numérique suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} (2 * i - 1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

En effet la décomposition en pavages nous permet d'obtenir, par additivité de l'aire, que la somme des aires des petits triangles est égal à l'aire du grand. De plus, comme tous les petits triangles sont isométriques, leur aire est toujours la même. Il faut donc voir combien de petits triangles sont utilisés pour couvrir le grand. Comme les côtés sont de l'un sont $n$ fois plus petits que ceux de l'autre, il est facile de voir que l'on doit avoir $n^2$ petits triangles (l'aire d'un triangle étant la base fois la hauteur divisée par deux et la hauteur étant donnée par un des autres côtés fois le sinus d'un angle qui est identique pour les deux triangles. On obtient deux facteurs n (correspondant aux deux côtés) entre l'aire du petit et l'aire du grand triangle. D'autre part, sur le pavage par bande, on voit qu'un côté d'un triangle de rapport $n$ avec un plus petit triangle, on construit une bande de petits triangles qui en contient exactement $2n - 1$ et le reste du triangle (moins cette bande) est de rapport (n-1). En sommant sur toutes les bandes, on obtient bien la formule voulue.