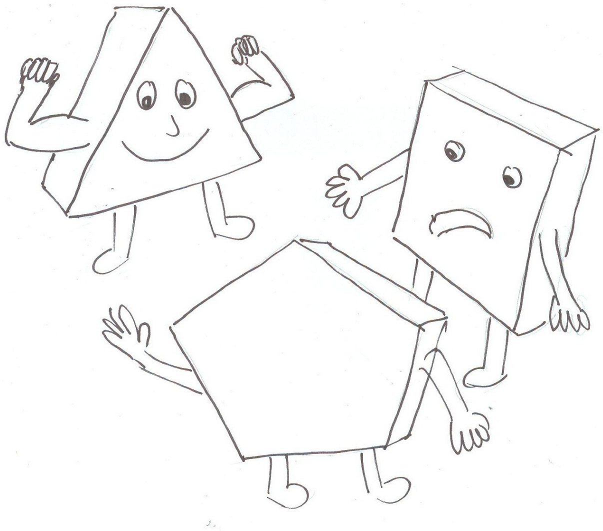
Numéro de la dernière page : 8

Titre : Comparer des aires à la grecque
Je suis plus grand ! Non, c'est moi...



Degrés : 9CO – 11C0
$1^{ère}$ – 4^{e} du Collège
PR, $1^{ère}$ – 3^{e} de l'ECG

Durée : 90 minutes

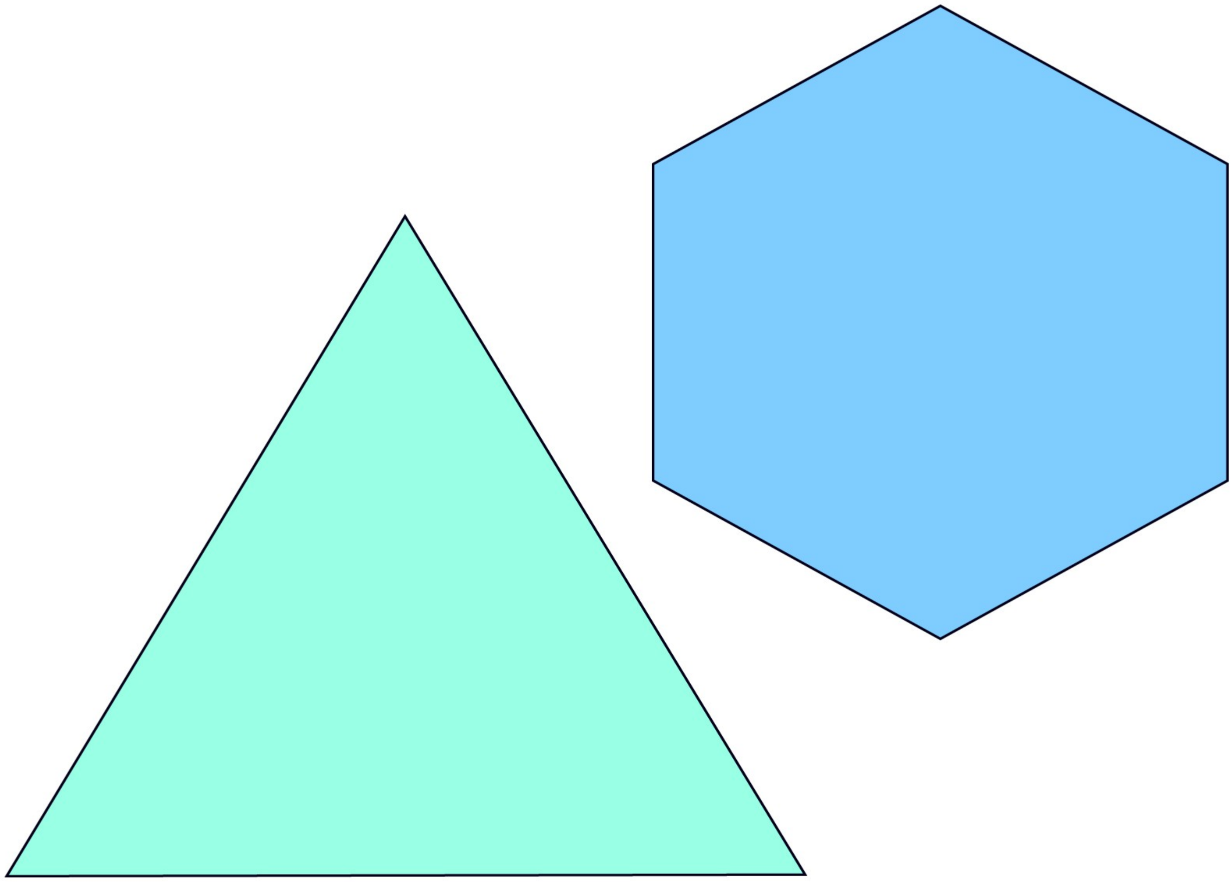
<u>Résumé</u> : Comparer des aires sans les calculer.
Le but est de permettre aux élèves de tous niveaux de se convaincre que chaque surface (qu'ils connaissent) peut se décomposer en pièces permettant de construire un carré.

Ceci doit leur permettre de comparer des surfaces en comparant les carrés associés.

Cette démarche est exactement celle des géomètres grecs qui comparaient des grandeurs sans y associer de mesure.

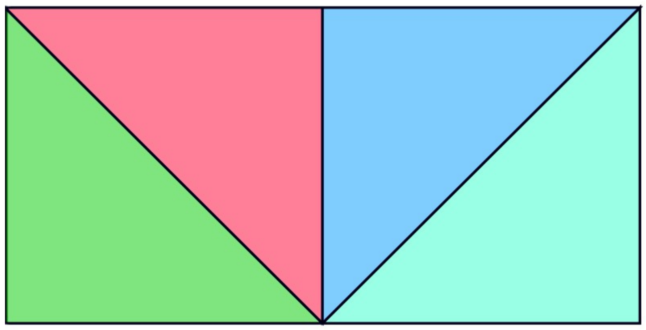
Pour ce faire, plusieurs puzzles polygonaux amenant à un carré sont proposés.

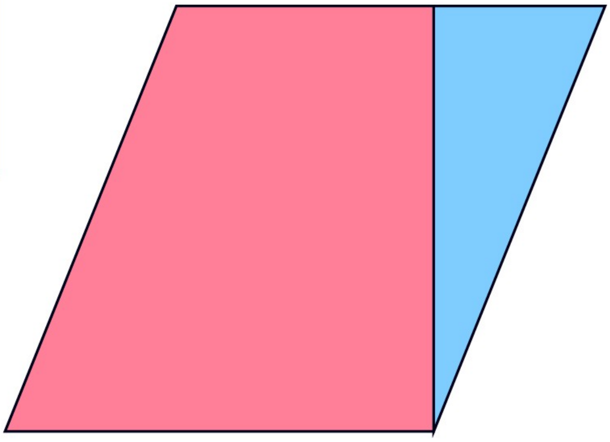
Peux-tu dire laquelle des deux figures suivantes est la plus grande?

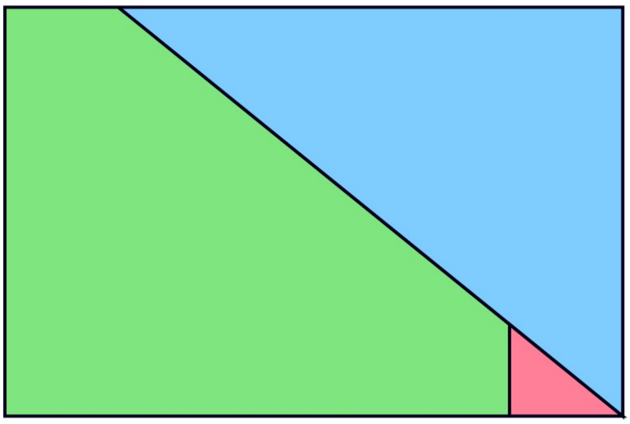


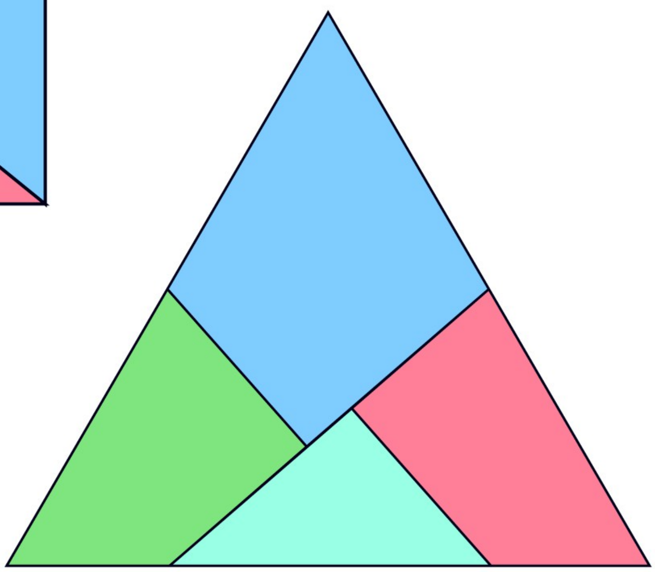
Montre comment tu fais.

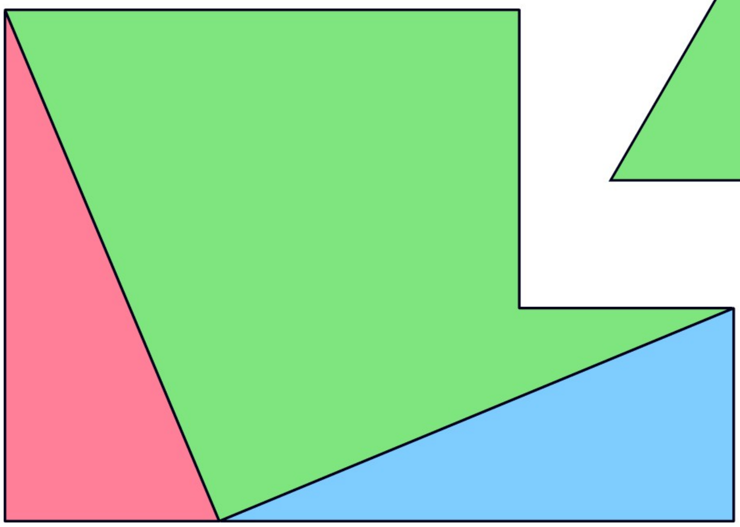
Annexe 1 : Des puzzles pour construire des carrés



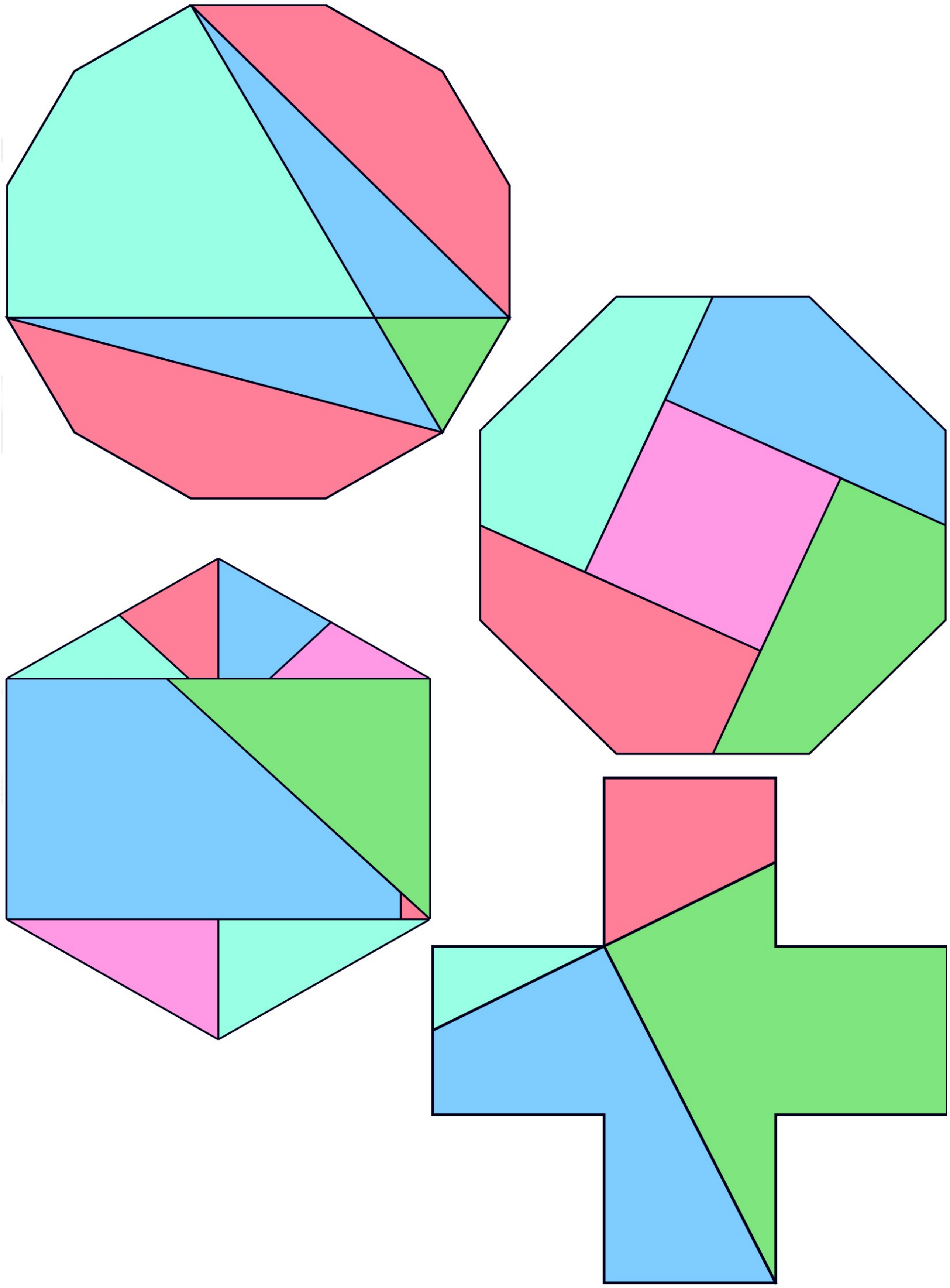




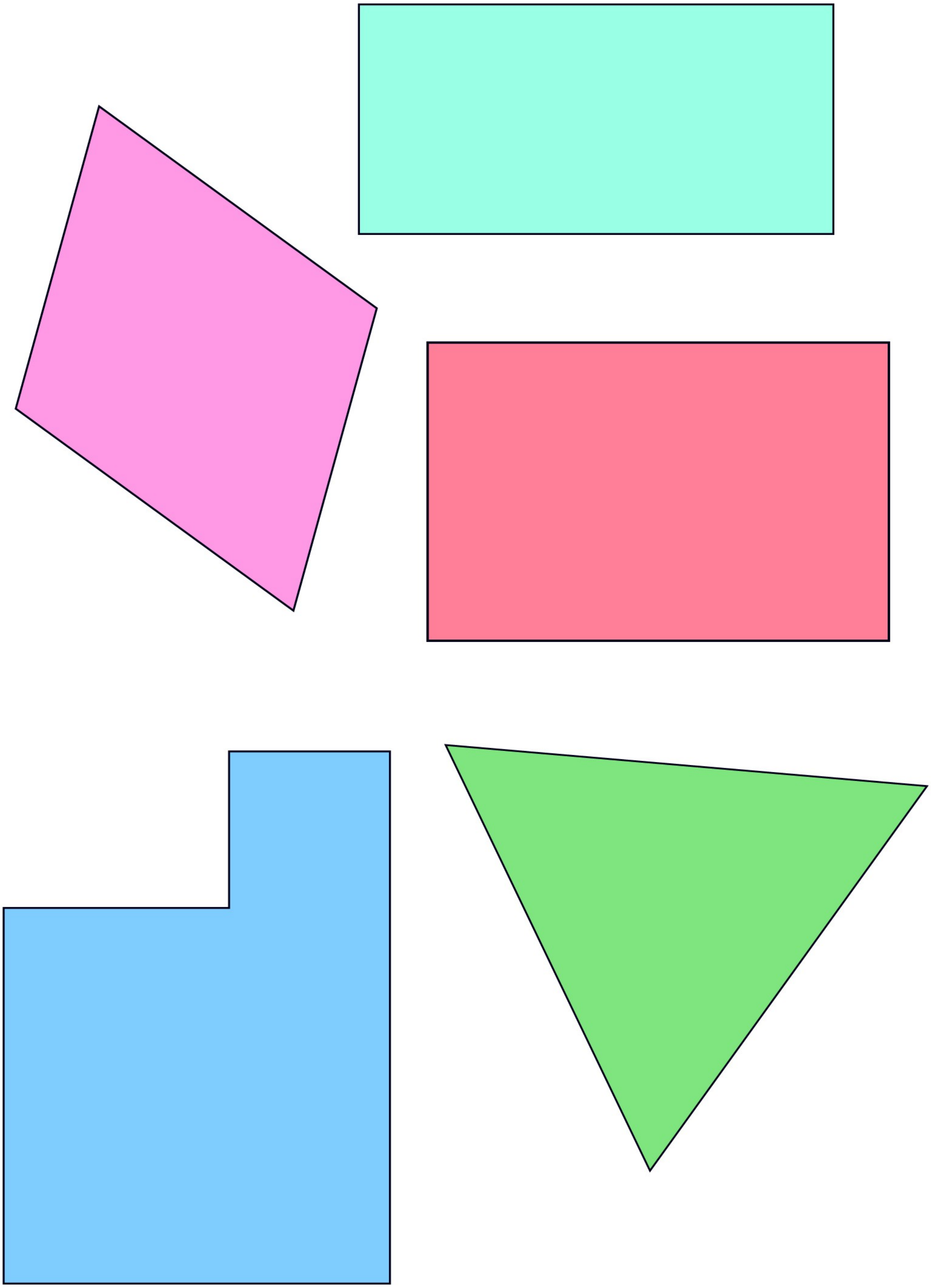




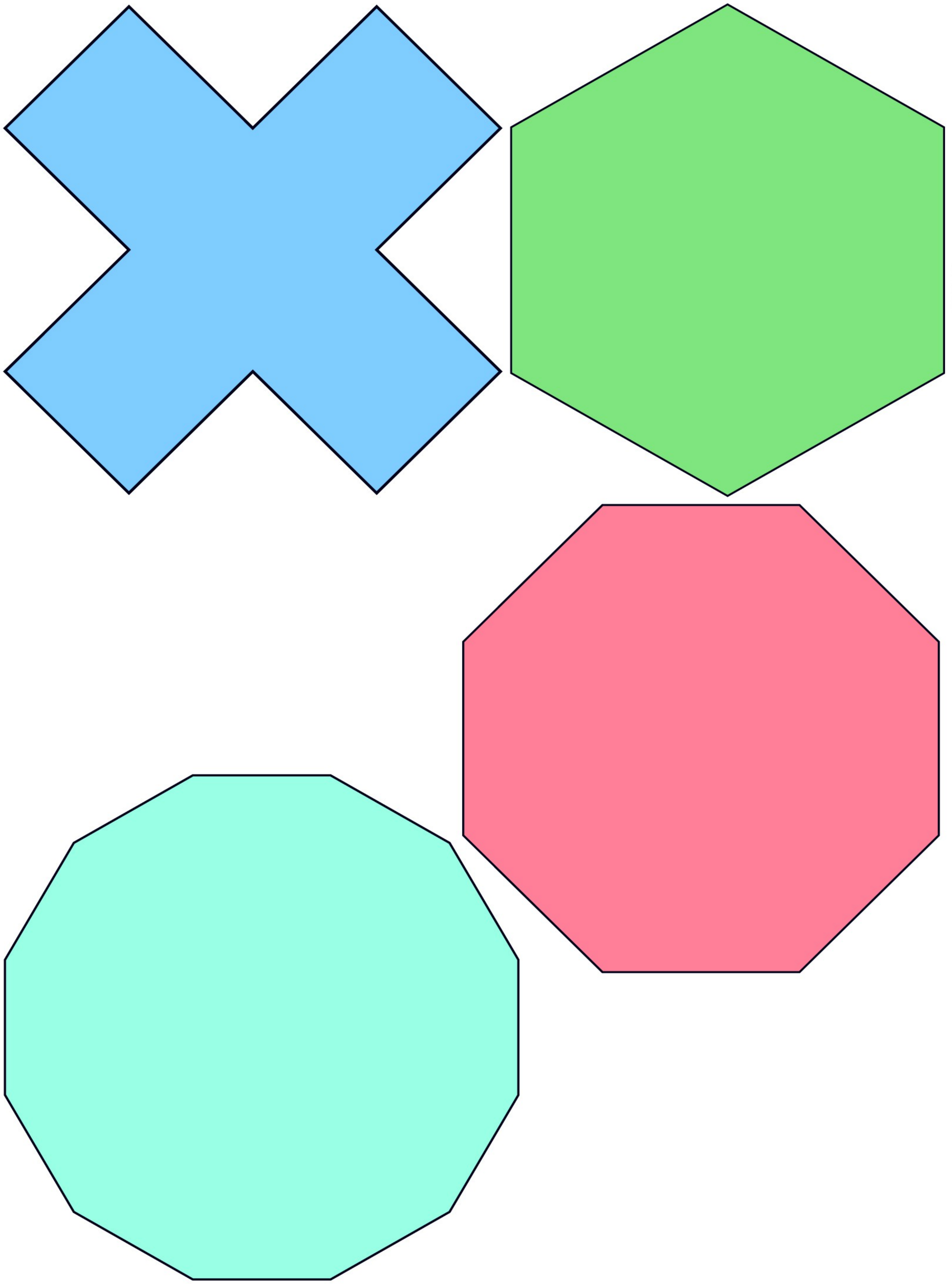
Annexe 2 : Des puzzles pour construire des carrés



Annexe 3 : Classe les pièces de la plus grande à la plus petite



Annexe 4 : Classe les pièces de la plus grande à la plus petite



Numéro de la dernière page : 8

Titre : Comparer des aires à la grecque
Je suis plus grand ! Non, c'est moi...

Degrés : 9CO – 11C0
1ère – 4e du Collège
PR, 1ère – 3e de l'ECG

Prérequis : aucun

Objectifs

- Permettre aux élèves de se convaincre que l'aire ne change pas par découpe et déplacement.
- Réussir à construire une équidécomposition de certains polygones en carré et l'utiliser pour comparer les surfaces sans en calculer la mesure, puisque comparer l'aire de deux carrés reviens à comparer leur côté (ou à la superposer pour voir lequel est le plus grand).

Matériel :ciseaux, feuilles de papier sur lesquelles sont imprimés les diverse formes, éventuellement du ruban adhésif

Durée estimée 90 minutes

Proposition de déroulement

- Distribuer les énoncés
- Dans le cas probable où les élèves restent bloqués, vous pouvez leur proposer la question « Pouvez-vous fabriquer un carré à partir des pièces suivantes? » sur les formes à découper des pages 2 et 3.
  Pour chacune de ces formes, faire former aux élèves un carré avec les pièces obtenues.
- Distribuer les pages 5 et 6 et demander aux élèves de classer les pièces par ordre de grandeur. Si l'idée de comparer les carrés n'apparaît pas, il est possible d'avoir une famille de carrés de tailles différentes (voir la même activité pour l'école primaire) et de leur demander de comparer ces carrés. Ceci devrait les aider.
- Faire remarquer aux élèves que si toute forme (polygonale) peut se découper en pièces formant un carré (on dit que la surface est carrable), alors on peut facilement comparer deux surfaces entre elles.
- Leur proposer la dernière question de l'énoncé, pour qu'ils essayent par eux mêmes.
- L'étape suivante serait de se convaincre que tout triangle est carrable (soit sur des exemples) soit en montrant que tout triangle est équidécomposable à un rectangle. Puis que tout rectangle s'équidécompose en un carré (voir dans le deuxième exemple de l'annexe 1 pour des rectangles pas trop applatis). On peut se rappeler que pour trouver à la règle et au compas un carré de même aire qu'un rectangle donné, on peut utiliser le théorème de la hauteur. On termine par le théorème de Pythagore (ou une découpe le démontrant comme la dernière découpe de l'annexe 1).

Analyse a priori de l'activité
Les élèves arrivent certainement à classer les carrés, en les superposant au besoin.
Par contre, comparer d'autres surfaces est plus difficile.

Il n'est pas facile de trouver les puzzles des pièces données (il est, à plus forte raison, certainement plus complexe de trouver ces découpes). Mais une fois ceci fait, on peut espérer que les élèves utilisent les deux activités précédentes pour répondre à la troisième à savoir les comparaisons de surfaces. Si cette étape n'apparaît pas, il faut l'induire en les faisant par exemple comparer les puzzles de la deuxième activités aux formes à comparer de la troisième. Elles sont identiques. Cela devrait permettre aux élèves de conclure.

Faire comprendre aux élèves que cette façon de faire fut la première façon de comparer des aires de manières exacte (dans la Grèce antique) permet peut-être pour les élèves d'intégrer pour la première fois les mathématiques dans l'histoire humaine.

La même activité peut se décliner jusqu'au post-obligatoire, mais en changeant la deuxième tâche. On peut essayer de laisser les élèves trouver les découpes, et, pour les plus grands, trouver une approche systématique pour carrer toute surface polygonale, pour ce faire les élèves devront se souvenir des théorèmes de la hauteur et de Pythagore.

Le fait qu'autant le théorème de la hauteur que celui de Pythagore représentent chacun des relations d'aires et non de longueurs est une difficulté importante qui doit être anticipée.

Dans les premières découpes, il y aura certainement des erreurs et les élèves voudront recommencer, prévoir plus de feuilles de découpes que d'élèves.

Remarquez que si on considère des polygones réguliers avec un grand nombre de côtés à ramener sur un carré, ceci amène naturellement à la question de la quadrature du cercle (possibilité d'anecdotes historiques).

Réponse à la première question :

Le triangle a une aire légèrement inférieure à celle de l'hexagone.

Éléments théoriques et/ou historiques

Les grecs ayant un système de numération insuffisant pour décrire exactement toutes les longueurs et les aires qu'ils étudiaient en géométrie, ils contournèrent la difficulté en utilisant non pas la longueur ou l'aire pour comparer des segments ou des surfaces, mais la superposition.
Si la superposition de segments ne pose pas de problème, celle des surfaces est plus délicate. Cela amène à l'idée d'équidécomposition.
Deux surfaces sont équidécomposables s'il existe une découpe finie de l'une permettant de recouvrir l'autre avec tous les morceaux, sans chevauchement ni trous.
Même s'il est peu probable de pouvoir réussir à obtenir même de la part des élèves des grands degrés, une preuve du théorème général suivant. Il est tout de même intéressant de garder ce but à l'esprit.

Théorème 1 : Toute surface polygonale simple est équidécomposable à un carré.

L'idée de la preuve est assez simple.

La surface peut être triangulée en un certain nombres de triangles, disons n. Chacun de ces n triangles peut être ensuite découpé pour obtenir un carré.
Comme le théorème de Pythagore permet d'équidécomposer deux carrés en un troisième (voir la dernière figure de l'annexe).
Il ne reste plus qu'à utiliser le théorème de Pythagore (n-1) fois pour reconstruire un carré à partir des n carrés.

Il est intéressant de remarquer que c'est la première étape de triangulation, qui n'est jamais remise en cause, qui est de loin la plus difficile à justifier dans le cas général.

Si cette démarche est conceptuellement efficace, les découpes qu'elle engendre sont mauvaises, car elles contiennent un nombre très important de pièces. Il s'agit donc d'une preuve de pensée, mais qui n'est pas suffisante pour obtenir des algorithmes efficaces de découpes.

Ce théorème explique aussi la naturalité de la question de la quadrature du cercle.
En fait on devrait dire du disque, mais l'expression est venue des grecs et est restée.
En effet, carrer une surface est l'équidécomposer avec un carré. Comme toute surface polygonale est carrable, et que les polygones réguliers ressemblent très fortement à des cercles, il est naturel de se poser la question de la quadrature du cercle, c'est-à-dire de l'équidécomposition du disque sur un carré. Il faudra attendre la fin du 19ème siècle pour que Lindemann démontre l'impossibilité d'une telle construction en démontrant la transcendance du nombre π.

On déduit du théorème 1, un second résultat

Théorème 2 : Deux surfaces polygonales simples de même aire sont équidécomposables.

Il suffit d'appliquer le théorème 1 aux deux surfaces pour obtenir pour chacune d'elles une équidécomposition avec un carré. Les surfaces ayant la même aire, les deux carrés sont isométriques. On peut donc les superposer. Ce faisant on superpose les découpes passant d'une surface au carré, puis du carré à l'autre. Ce qui donne une preuve d'existence d'une telle découpe.

Comme pour le théorème 1, le théorème 2 est inefficace pour donner des découpes explicites.