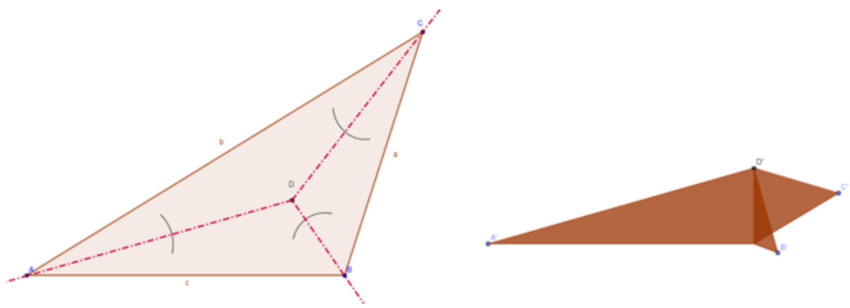
En un coup de ciseau 3

Résumé	Un polygone est dessiné sur une feuille. Comment plier cette feuille pour pouvoir découper le polygone en un coup de ciseau rectiligne.
Degrés concernés	7CO – 4PO
Matériel	La feuille d’énoncé et une paire de ciseaux. Règle et compas peuvent s’avérer utiles.
Durée	
Propositions de déroulement	Les élèves commencent par travailler soit seuls soit en petits groupes de deux ou trois. La mise en commun se fera lorsqu’une bonne partie de la classe aura réussi.
Analyse préalable de l’activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l’enseignant)	<u>Intentions</u> Savoir utiliser diverses connaissances géométriques pour résoudre un problème. <u>Démarches possibles</u> Commencer par les Activités « Coup de ciseau 1 et 2 » Commencer par le triangle quelconque. L’élève commence par plier le long des trois bissectrices (application des activités précédentes). Une erreur commune est de vouloir plier sur toute la longueur d'une bissectrice. Or, ainsi, un côté de l'angle ne se superpose à aucun autre côté. Il faut donc plier sur les bissectrices jusqu'au point d'intersection des bissectrices. Comme l’objet ainsi obtenu n’est pas plan, il doit trouver un nouveau pli. Il existe pour cela au moins deux techniques : 1. « écraser » la forme pliée 2. Plier de telle manière que chaque point du bord soit superposé à exactement un autre point du bord. On obtient ainsi un objet qui comporte trois « ailettes » (voir figure). On rabat finalement l’une des ailettes sur les deux autres.  Il a ainsi ramené tous les côtés de son triangle sur un seul et peut maintenant couper. Continuer avec le quadrilatère. Après avoir effectué les plis appris, l’élève est confronté à un nouvel obstacle, qu’il peut résoudre de la

	même manière. <u>Relance</u> Dès le début un élève peut ne pas comprendre quel est le lien entre le coup de ciseau rectiligne et son polygone. Une reformulation du problème est alors la suivante : quels sont les plis qui ramènent tous les côtés d'un polygone sur un seul (qui « alignent » tous les côtés ?). Cette relance peut être utile tout au long des essais. <u>Mise en commun</u> Une fois que beaucoup ont réussi le triangle quelconque, leur faire décrire les plis qu'ils ont fait, quels sont les côtés qui sont ramenés les uns sur les autres par leur pli. Déplier les polygones découpés et regarder les droites tracées par leurs plis ; outre les trois bissectrices, on voit apparaître, suivant la méthode utilisée une (méthode 1.) ou trois (méthode 2.), perpendiculaires à l'un des côtés passant par le point d'intersection des bissectrices. Ce nouveau pli peut être interprété comme bissectrice de l'angle plat et permet d'obtenir un objet plan. Remarquer que ce nouveau pli ne se fait pas dans le même sens que les autres (vallée au lieu de montagne). Passer au quadrilatère quelconque. Lorsqu'une bonne partie de la classe réussit (ou bloque), passer à la seconde mise en commun. Le nouveau pli obtenu permet de ramener deux côtés opposés l'un sur l'autre, il s'agit de la bissectrice de l'angle formé par le prolongement des deux côtés opposé (à démontrer par les élèves). Les élèves ont maintenant à leur disposition tous les plis nécessaires à plier tout polygone convexe. On a maintenant deux possibilités suivant le but recherché : • **utilisation de connaissances mathématiques pour résoudre un problème particulier :** on peut explorer le cas des polygones non convexes. Faire alors remarquer que les plis ne se font pas dans le même sens si l'angle est convexe ou concave. • **modéliser et montrer :** généraliser à tout polygone convexe et essayer de trouver une démonstration. Défi : découper le cygne (à donner aux élèves seulement lorsqu'ils auront découvert et compris tous les types des plis). <u>Variables didactiques</u> Suivant le choix de polygones ayant plus ou moins de symétries, on peut simplifier le pliage. On peut aussi donner des formes où certains points d'intersection entre les bissectrices coïncident.

Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Utilisation des axes de symétrie, des bissectrices, des hauteurs d'un triangle. Savoir utiliser diverses connaissances géométriques pour résoudre un problème. Modélisation.
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	Notion d'axe de symétrie, de bissectrice ; modélisation
Développements possibles	On peut se demander si c'est vraiment possible pour tous les polygones et donner des pistes pour une éventuelle démonstration.

En un coup de ciseau – Énoncé de l'élève

1. *Sur une feuille, dessine un triangle quelconque. Peux-tu plier la feuille pour pouvoir ensuite découper le triangle en un seul coup de ciseau rectiligne ?*
2. *Essaye ensuite avec un quadrilatère quelconque.*
3. *Et avec un polygone convexe avec plus que quatre côtés ?*

Éléments pour la synthèse

Introduction

Cette activité est tirée d'un article d'Erik D. Demaine, Martin L. Demaine et Anna Lubiw, Folding and Cutting Paper publié en 2000. C'est une occasion de montrer que la recherche en mathématiques ne s'est pas arrêtée pas au Théorème de Pythagore ou au calcul intégral et qu'elle peut s'intéresser à des sujets qui paraissent loin des calculs algébriques auquel les élèves sont habituellement confrontés et répondre à des questions parfaitement intelligibles pour chacun.

Les auteurs ont démontré que *tout graphe peut être plié et coupé en un seul coup de ciseau rectiligne*. Ici, le mot graphe représente une collection de segments de droites du plan (qui peuvent éventuellement s'intersecter). Autrement dit, avec un coup de ciseau rectiligne nous pouvons couper n'importe quel polygone ou ensemble de polygones ou encore des polygones avec des trous polygonaux et ce, en coupant uniquement les côtés des polygones et rien d'autre.

Pour cette activité, nous nous restreindrons aux polygones convexes.

Cette activité peut être utilisée avec deux buts distincts :

1. **utiliser de notions mathématiques connues pour résoudre un problème particulier :** autrement dit, trouver les plis nécessaires pour couper une forme donnée et pouvoir expliquer pourquoi ces plis résolvent ce problème particulier.
2. **modéliser et démontrer :** autrement dit, démonter qu'une méthode trouvée sur des formes données peut être appliquée à tous les polygones (convexes).

Utilisation de notions mathématiques pour résoudre un problème.

Solutions des pliages

Pour les pliages du triangle quelconque, du quadrilatère (Méthode1.) et du cygne, voir ce fichier.

Notions nécessaires

Cas d'égalité de triangles : trois triangles sont égaux si l'une des trois propriétés suivantes est vérifiée :

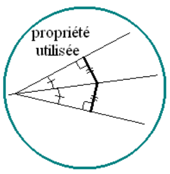
(CCC) : si les trois côtés sont égaux

(CAC) : si deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés sont égaux.

(ACA) : si deux angles et le côté compris entre ces angles sont égaux

Remarque 1. Puisque la somme des angles d'un triangle vaut 180°, la connaissance de deux angles permet de calculer le troisième. Ainsi, le cas (AAC) est aussi un cas d'égalité de triangles.

Définition 1. La *bissectrice* de l'angle $\widehat{AOB}$ est la demi-droite b_O contenue dans le secteur défini par l'angle $\widehat{AOB}$ qui sépare l'angle $\widehat{AOB}$ en deux angles égaux.



Propriété 1. La bissectrice b_O est l'ensemble des points contenus dans le secteur défini par l'angle $\widehat{AOB}$ qui sont à égale distance des demi-droites [OA et [OB.

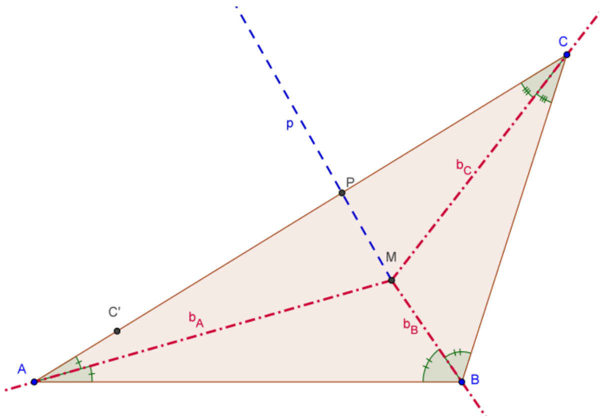
Conséquence générale : la symétrie dont l'axe contient la bissectrice b_O envoie la demi-droite [OA sur la demi-droite [OB et réciproquement.

Définition 2. Une *isométrie* est une application bijective d'un espace euclidien dans un autre qui préserve les distances.

Remarque 1. L'image par symétrie axiale d'une droite perpendiculaire à l'axe de symétrie est la droite elle-même.

LE TRIANGLE QUELCONQUE

Méthode 1.
Il s'agit tout d'abord de montrer que le pli effectué est effectivement perpendiculaire à l'un des côtés. Ensuite, il faut montrer que les plis permettent effectivement de trouver un objet plat.



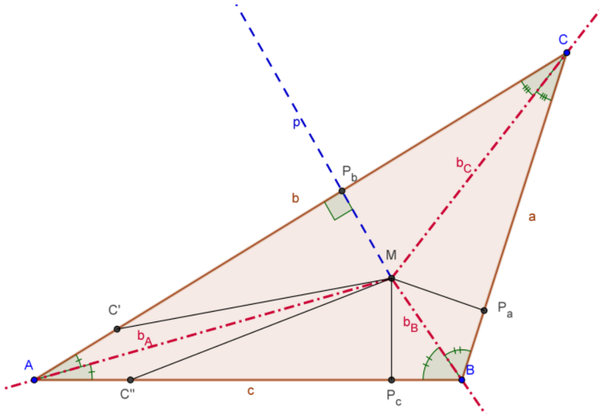
Soit un triangle ΔABC et notons M l'intersection des trois bissectrices.

Proposition 1. Soit P un point sur le segment AC et soit σ_{MP} la symétrie d'axe MP. On a alors que $\sigma_{MP}(C)$ est sur la droite AC si et seulement si la droite MP est perpendiculaire à la droite AC.

Preuve : Si la droite MP est perpendiculaire à la droite AC, par définition de la symétrie axiale, le point $\sigma_{MP}(C)$ est sur la droite AC.
Réciproquement, si le point $\sigma_{MP}(C)$ est sur la droite AC, ceci implique que les droites AC et $C\sigma_{MP}(C)$ sont les mêmes. Par définition de la symétrie axiale, la droite $C\sigma_{MP}(C)$ est perpendiculaire à la droite MP. Donc la droite AC est perpendiculaire à la droite MP.

Nommons maintenant p la perpendiculaire à AC passant par M et Pb l'intersection entre p et AC.
Il s'agit maintenant de montrer que l'objet obtenu à l'aide des plis b_A, b_B, b_C et p est plat. Nommons pour cela σ_A la symétrie d'axe la bissectrice b_A et σ_B la symétrie d'axe la bissectrice b_B.
Que se passe-t-il lorsqu'on plie sur les plis choisis ?
D'une part, lorsqu'on plie le long de b_B, on envoie le point C sur le point $\sigma_B(C)$ qui, par conséquence de la définition de la bissectrice, se trouve sur AB.
D'autre part, plier le long de p envoie le point C sur le point $\sigma_{MP}(C)$ qui se trouve sur le segment AC par la Proposition 1. Lorsqu'on plie le long de b_A, le point $\sigma_{MP}(C)$ est ensuite envoyé sur le point $\sigma_A\sigma_{MP}(C)$ qui, toujours par la conséquence de la définition de la bissectrice, se trouve sur AB.
Ainsi, lorsqu'on plie le long des plis choisis, le point C est envoyé d'une part sur $\sigma_A\sigma_{MP}(C)$ et d'autre part sur $\sigma_B(C)$. Il s'agit alors de montre que ces deux points sont les mêmes, autrement dit que :

$$\sigma_A\sigma_{MP}(C) = \sigma_B(C)$$



Remarquons tout d'abord que, par définition des bissectrices et du point M, on a

$$\sigma_B\sigma_C(P_b) = \sigma_A(P_b) \quad et \quad \sigma_A\sigma_B(P_b) = \sigma_C(P_b).$$

Nommons alors $P_a = \sigma_B\sigma_C(P_b)$ et $P_c = \sigma_A(P_b)$.
Puisque σ_{MP} et σ_C sont des isométries, on a

$$\overline{P_bC} = \overline{\sigma_A\sigma_{MP}(P_bC)} = \overline{P_c\sigma_A\sigma_{MP}(C)}$$

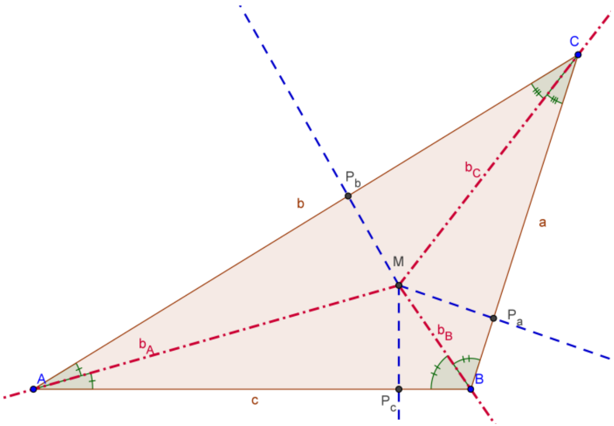
et les points P_c et $\sigma_A\sigma_{MP}(C)$ appartiennent à la droite AB.
D'autre part, puisque σ_C et σ_B sont des isométries, on a

$$\overline{P_bC} = \overline{P_aC} = \overline{\sigma_B(P_aC)} = \overline{P_c\,\sigma_B(C)}$$

et les points P_c et $\sigma_B(C)$ appartient à la demi-droite [BA.
Puisque $\overline{P_c\sigma_A\sigma_{MP}(C)} = \overline{P_c\,\sigma_B(C)}$ et que tous ces points appartiennent à la même droite, on peut conclure.

Méthode 2.
Il faut vérifier que les trois « ailettes » se rejoignent sur un unique segment qui est perpendiculaire à chacun des trois côtés. La Remarque 1. permettra ensuite de conclure.

Il s'agit donc de montrer la Proposition suivante :



Proposition 2. on a les égalités suivantes :

$$\overline{P_bC} = \overline{P_aC} \;,\; \overline{P_bA} = \overline{P_cA} \;,\quad \overline{P_cB} = \overline{P_aB}$$

si et seulement si

MP_b est perpendiculaire à AC,
MP_a est perpendiculaire à BC
et MP_c est perpendiculaire à AB.

Preuve : Supposons qu'on a les trois égalités, alors par (CAC) on a que

$$\Delta APM = \Delta AP_cM \;,$$
$$\Delta CP_bM = \Delta CP_aM \quad et \quad \Delta BP_cM = \Delta BP_aM.$$

Par conséquent,

$$\widehat{AP_cM} = \widehat{AP_bM}\,,$$
$$\widehat{CP_bM} = \widehat{CP_aM} \quad et \quad \widehat{BP_cM} = \widehat{BP_aM}$$

De plus,

$$\widehat{CP_bM} + \widehat{AP_bM} = 180°$$
$$\widehat{CP_aM} + \widehat{BP_aM} = 180°$$
$$et \quad \widehat{BP_cM} + \widehat{AP_cM} = 180°$$

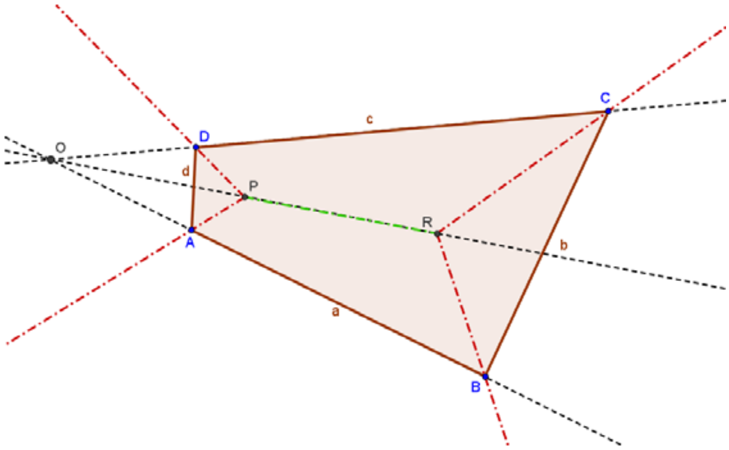
On peut ainsi résoudre et on obtient que tous ces angles sont égaux à 90°, ce qui permet de conclure.

Supposons maintenant que les droites sont perpendiculaires. Considérons les triangles ΔAP_bM et ΔAP_cM. Puisque [AM] est la bissectrice de l'angle en A, ces deux triangles sont égaux par (AAC) ; en particulier $\overline{P_bA} = \overline{P_cA}$. Le raisonnement est le même pour les autres égalités.

Remarque : la méthode des « ailettes » est la plus efficace pour faire des démonstrations. De plus, c'est la méthode choisie pour généraliser la construction.

LE QUADRILATERE

Dans le quadrilatère, apparaît un nouveau pli qui est en fait sur la bissectrice de l'angle formé par deux côtés opposés. C'est ce que nous allons démontrer.



Quitte à renommer les points, supposons que les bissectrices des angles du quadrilatère s'intersectent comme sur la figure. Nommons

b_A la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$

b_B la bissectrice de l'angle $\widehat{CBA}$

b_C la bissectrice de l'angle $\widehat{DCB}$

b_D la bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$

Nommons aussi P l'intersection de b_A et b_D et R l'intersection de b_B et b_C.

Proposition 3. Soit O le point d'intersection entre les droites AB et DC. Alors la droite PR est la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{BOC}}$.

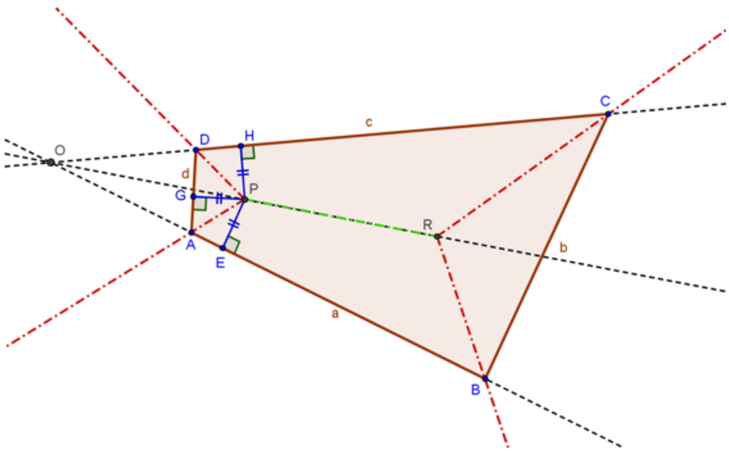
Corollaire : plier sur le segment (PR) permet de superposer les côtés (AB) et (CD).

Preuve de la Proposition : Nommons

E le pied de la perpendiculaire à CD passant par P,

G le pied de la perpendiculaire à AD passant par P,

H le pied de la perpendiculaire à AB passant par P,



P appartient à b_A donc, par la Propriété 1, on a PH = PG.
De même, P est sur b_d donc, par la Propriété 1, on a PG = PE.
Donc PH = PE et P appartient à la bissectrice de l'angle formé par les côtés (AB) et (CD).
De la même façon, on démontre que R est sur cette bissectrice.
Donc la droite (PR) est la bissectrice de l'angle formé par les côtés (AB) et (CD).
Les côtés (AB) et (CD) se superposent donc lorsqu'on plie le long de (PR).

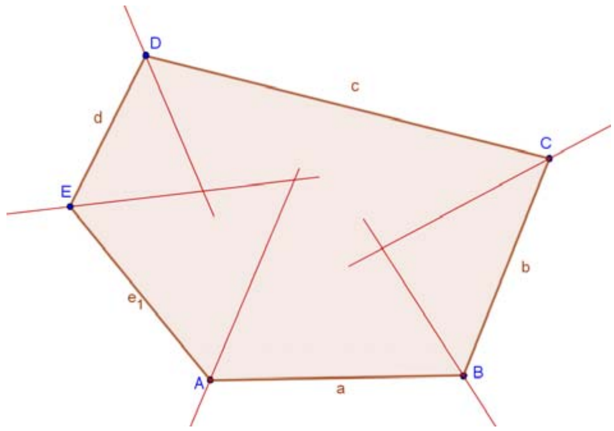
SYNTHESE DES PLIS

On remarque maintenant que, outre les axes de symétrie, il existe deux sortes de plis :

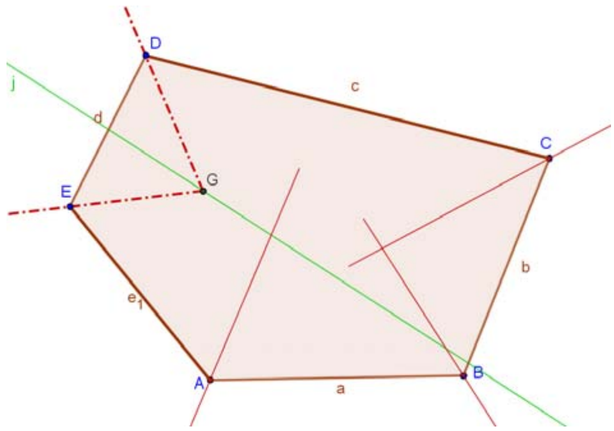
- les bissectrices (de deux côtés adjacents ou de deux côtés opposés)
- les perpendiculaires aux côtés issues des points d'intersection entre bissectrices.

Nous appellerons *squelette* la réunion des plis effectués sur les bissectrices.
Le squelette permet de ramener les côtés les uns sur les autres, tandis que les perpendiculaires permettent d'obtenir un objet plié plat.

UNE TECHNIQUE POUR OBTENIR LE SQUELETTE D'UN POLYGONE CONVEXE

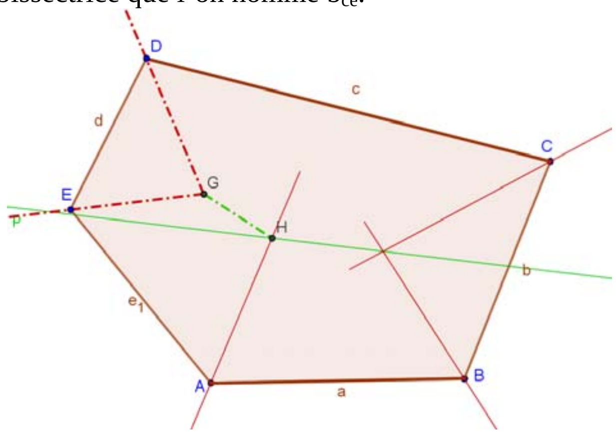


On trace tout d'abord toutes les bissectrices des angles du polygone.

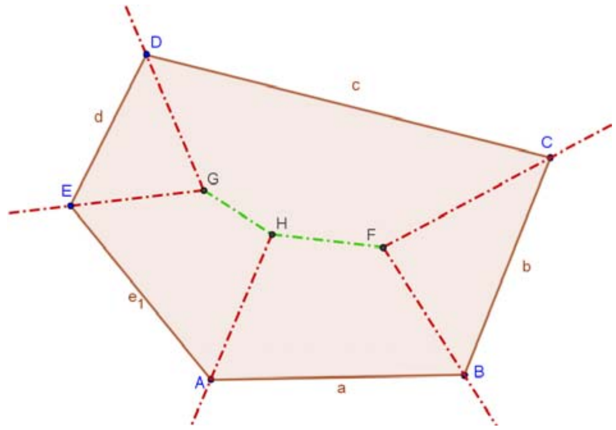


On choisit une bissectrice (ici celle de l'angle en E) et considère b_D et b_A, les bissectrices des deux angles adjacents. On note G le point d'intersection avec b_A ou b_D tel que le segment [EG] n'intersecte pas l'autre bissectrice (ici, G est sur b_D).

Par la Proposition 3, par le point G passe aussi la bissectrice des côtés CD et EA ; on trace alors cette bissectrice que l'on nomme b_{ce}.



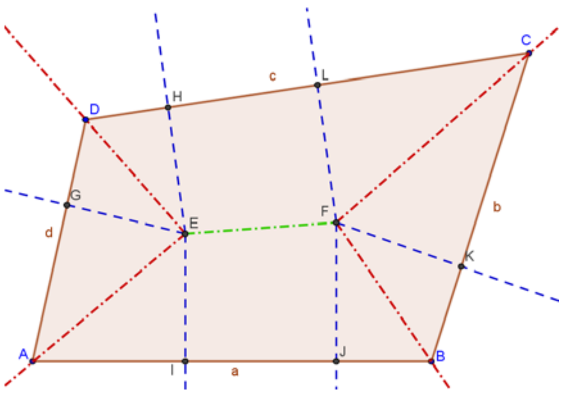
On note H l'intersection entre la bissectrice b_{ce} et la bissectrice b_A et on trace b_{ca}, la bissectrice des côtés c et a.



On continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait relié toutes les bissectrices.

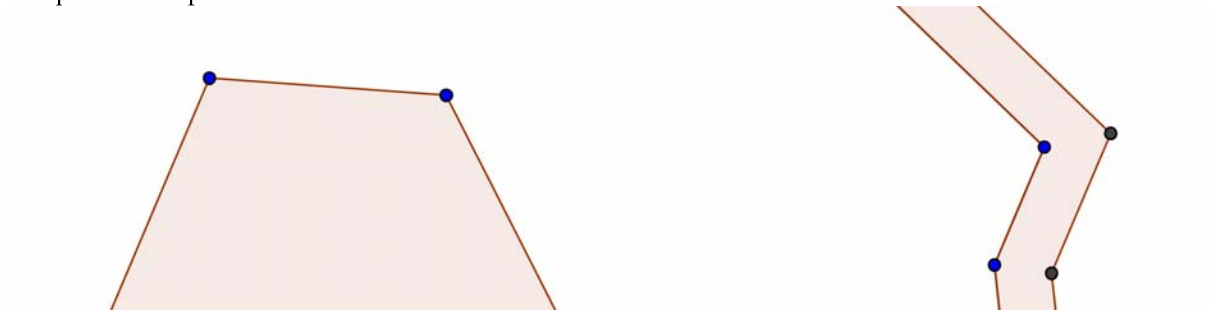
Modéliser et démontrer.

VERS LA DEMONSTRATION



On observe que les perpendiculaires partitionnent le quadrilatère en cinq zones qui, dans le cas des polygones convexes, correspondent chacune à une ailette ; nous appellerons ces zones des *couloirs*.

Chaque couloir peut être de l'une des deux formes suivantes :

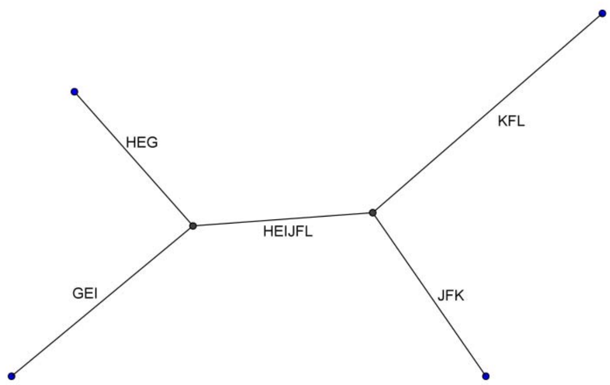


Couloir avec un mur — Couloir avec deux murs

Lorsqu'on plie avec la méthode des ailettes, on obtient un objet qui n'a pas de volume. L'idée est de construire le *graphe de recollement* des ailettes. On procède de la manière suivante :

- Chaque couloir est représenté par une arête,
- Deux arêtes incidentes représentent deux couloirs adjacents

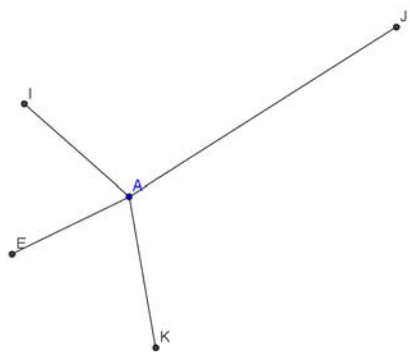
Par exemple, pour le quadrilatère ci-dessus, on obtient le graphe suivant:



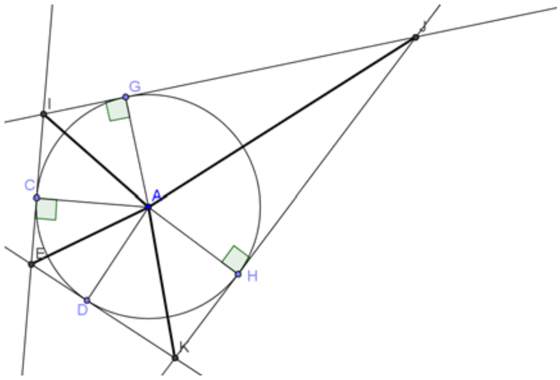
Il est maintenant évident que ce graphe admet une configuration pliée à plat.

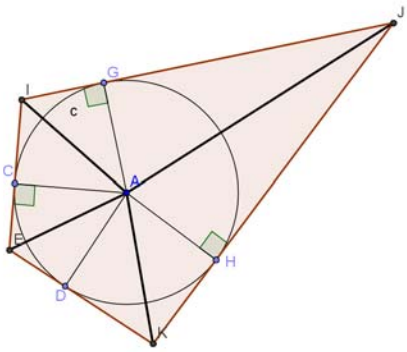
Quelques remarques sur ce graphe :

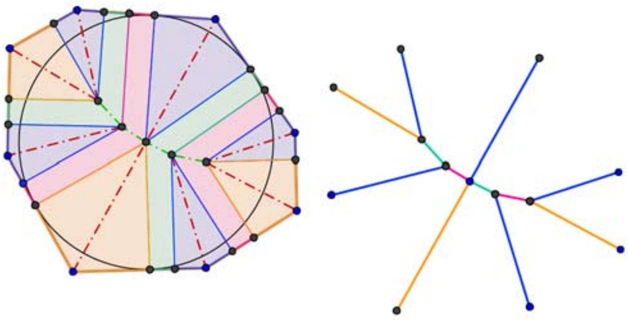
- Ce graphe est un arbre. En fait, ce genre de graphe sera toujours un arbre. En effet, une propriété d'un arbre est que, si on enlève une arête, on déconnecte le graphe. Or, dans le cas des polygones, si on enlève un couloir, l'objet se sépare en deux parties. Donc, le graphe est un arbre.
- Dans le cas des polygones convexes, cet arbre est identique au squelette.
- On remarque que les sommets intérieurs sont de valence 3. On pourrait se demander si c'est toujours le cas pour un polygone convexe. Par exemple, est-ce que le graphe suivant correspond à un polygone convexe ?

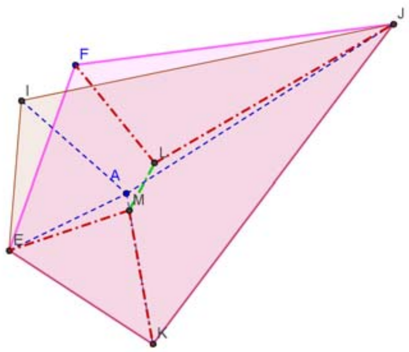


On se convainc que le graphe d'un polygone convexe possède un sommet intérieur de valence supérieure à 3 si ce sommet est le centre d'un cercle tangent à au moins trois côtés du polygone. En particulier, si un polygone possède un axe de symétrie, il possèdera un sommet intérieur de valence supérieure à 3.



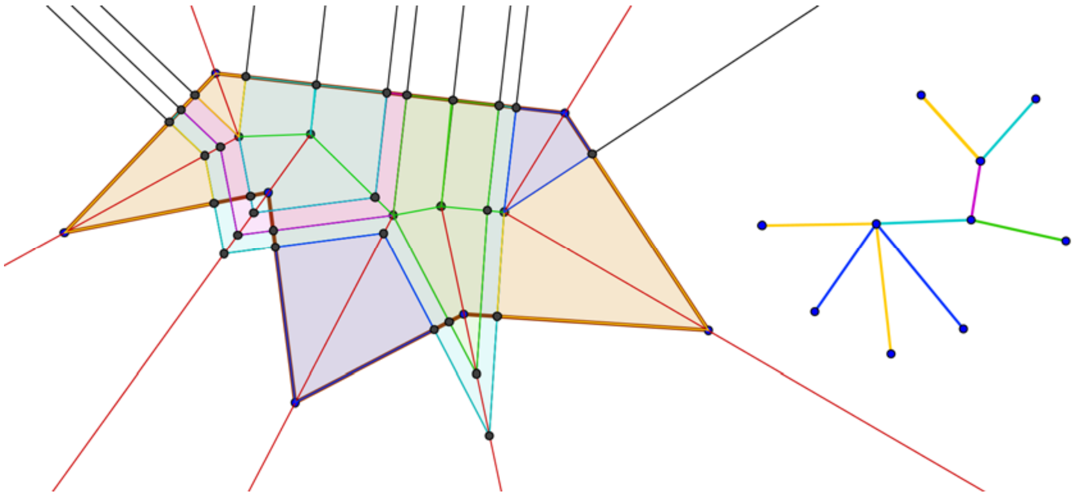






Cependant, si on perturbe un point, alors le sommet redevient de valence 3.

- Dans le cas des polygones non convexes, les hauteurs peuvent intersecter une bissectrice. Dans ce cas, on prend le symétrique par rapport à la bissectrice et ainsi de suite. Les couloirs ne représentent donc plus des ailettes mais des accordéons qui, une fois repliés forment une bande. Le graphe n'est alors plus identique au squelette. De plus, si deux arêtes du graphe sont incidentes les deux couloirs correspondant ne sont pas nécessairement adjacents comme dans le cas des polygones convexes. Dans le cas des polygones non convexes, si deux arêtes du graphe sont incidentes alors le bord des couloirs correspondants se replient sur une même droite. Par exemple :



Dans chacun des cas particuliers étudiés, on a donc construit le squelette, puis les couloirs et enfin le graphe de recollement. Et on a montré que l'objet obtenu pouvait être pliable à plat. Il faudrait maintenant le faire en général et c'est ce qu'on fait E. Demaine et al. avec la démarche suivante qui est exactement celle que l'on a utilisée dans nos cas particuliers :

- Pour tout polygone, on peut construire un squelette.
- Les perpendiculaires issues des sommets du squelette partitionnent le polygone en zones appelées couloirs
- Chacun de ces couloirs se plie en un accordéon dont les bords sont parallèles et orthogonaux au bord du polygone
- On construit le graphe de recollement pour les couloirs. Ce graphe est un arbre.
- Tout arbre admet une configuration pliée à plat. Il suffit pour cela de choisir une feuille de l'arbre, de l'orienter verticalement et plier toutes les autres feuilles selon cette même orientation. Ainsi, tout polygone peut se plier à plat et être découpé en un seul coup de ciseau.

Annexes

Historique du problème

(Traduction libre du texte de E. Demaine dont on peut trouver l'original en anglais sur http://erikdemaine.org/foldcut/)

La première référence publiée parlant de « pliage et découpe » que nous connaissons est un livre japonais, *Wakoku Chiyekurabe* (concours de mathématiques), par Kan Chu Sen, publié en 1721. Ce livre contient une variété de problèmes pour les tests d'intelligence mathématique. Un des problèmes demande de plier un morceau de papier rectangulaire plat et faire une découpe droite, de manière à produire un motif typiquement japonais appelé *sangaibisi*, qui se traduit par «trois losanges pliés". L'auteur en donne une solution (voir http://erikdemaine.org/foldcut/sen_book.html).

Une des premières références occidentales est un article de juillet 1873 "Normes et emblèmes nationaux" dans le magazine Harper's New Monthly, volume 47, numéro 278. Cet article raconte l'histoire de Betsy Ross et sa relation avec le drapeau américain. Il raconte qu'en 1777, George Washington et un comité du Congrès ont montré à Betsy Ross les plans pour le drapeau américain comportant treize étoiles à six branches. Le comité lui a demandé si elle pouvait faire un tel drapeau. Elle a répondu qu'elle serait prête à essayer, mais a suggéré que les étoiles aient cinq branches ; pour étayer son argument, elle a montré avec quelle facilité une telle étoile peut être faite, par pliage d'une feuille de papier suivie d'une découpe avec des ciseaux (pour savoir comment elle a fait voir sur cette page). Le comité a décidé d'accepter ses changements, et George Washington a fait un nouveau dessin, que Betsy Ross a suivi pour faire le premier drapeau américain.

Houdini aurait utilisé le « pliage et découpage » pour un tour de magie avant de devenir l'artiste célèbre pour ses évasions. En 1922, son livre *Papier magique* (EP Dutton & Company, pages 176-177) décrit un procédé de fabrication d'une étoile à cinq branches. Selon David Lister, ce livre semble avoir été écrit par un autre magicien, Walter Gibson, qui aurait servi de nègre à Houdini.

Un autre magicien, Gerald Loe, a étudié en détail l'idée du coup de ciseau; dans son livre de 1955 *papier Capers* (Magic, Inc, Chicago) décrit comment découper des arrangements de différents objets géométriques, comme par exemple une chaîne circulaire des étoiles.

Martin Gardner a écrit sur le problème du coup de ciseau dans sa célèbre série de la revue *Scientific American* ("Paper cutting", chapitre 5 de *New Mathematical Diversions* (édition révisée), Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1995.). Gardner a été particulièrement impressionnés par la capacité de Loe à découper n'importe quelle lettre de l'alphabet. Il a également été le premier à poser le problème de découpage des polygones complexes comme un problème ouvert.