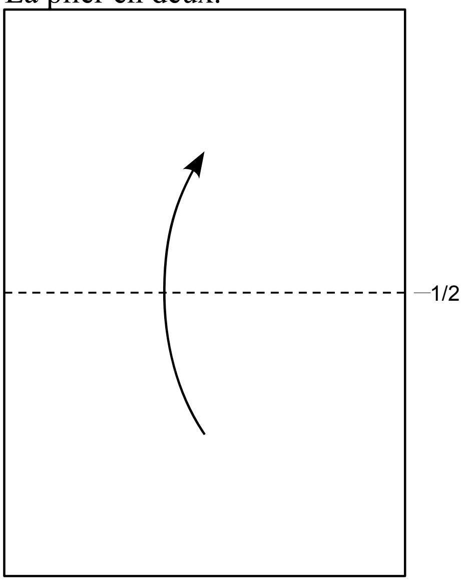
Construire une boîte rectangulaire

Résumé	Construire par pliage une boîte rectangulaire et exprimer son volume
Degrés concernés	7CO-13PO
Matériel	Des feuilles cartonnées
Durée	1 période
Propositions de déroulement	Les élèves commencent par travailler soit seuls soit en petits groupes de deux ou trois. La mise en commun se fera à la fin de l'activité.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	<u>Remarque préalable</u> La Question 7 nécessite la connaissance de la notion de dérivée. <u>Intentions</u> Modéliser une construction et mettre en équation des problèmes physiques. <u>Démarches possibles</u> Voir les éléments pour la synthèse pour les démarches possible et les relances. <u>Mise en commun</u> A la fin de l'activité, faire une mise en commun pour que les élèves puissent comparer et expliquer leurs démarches et leurs solutions.
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Capacité à lire, comprendre et appliquer une marche à suivre. Modélisation, mise en équations pour le volume
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	Volume d'un parallélépipède rectangle

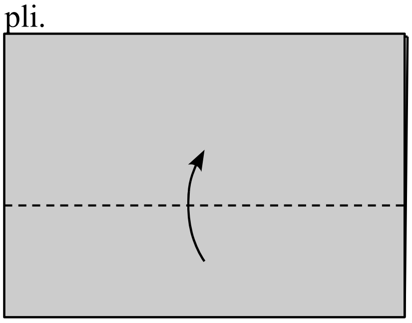
Construire une boîte rectangulaire – Énoncé de l'élève

Voici la marche à suivre pour construire une boîte rectangulaire.

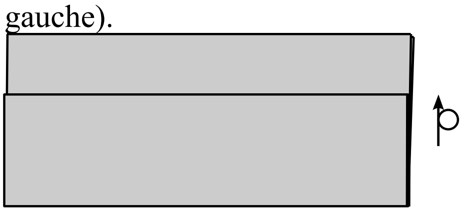
1. Prendre une feuille rectangulaire.
   La plier en deux.



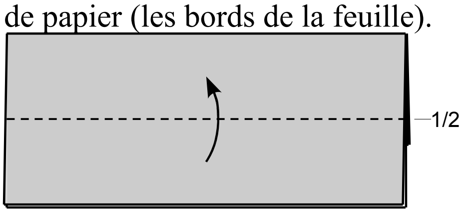
2. Plier à nouveau de manière à ce que le pli ainsi formé soit parallèle au premier pli.



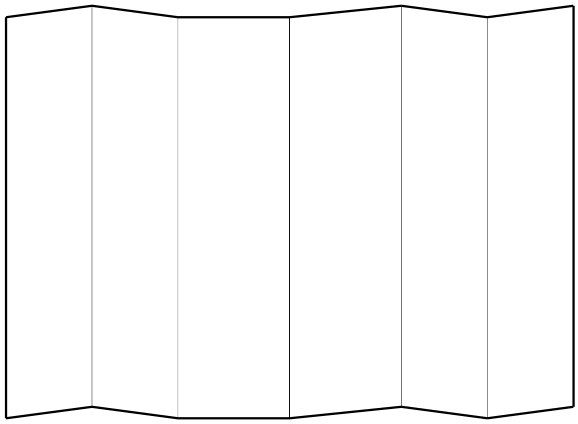
3. Retourner le modèle comme l'indique la flèche (ce qui est à gauche doit rester à gauche).



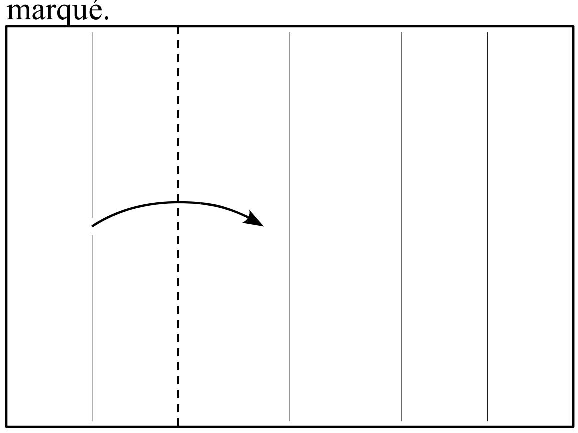
4. Plier en deux les deux premières couches de papier (les bords de la feuille).



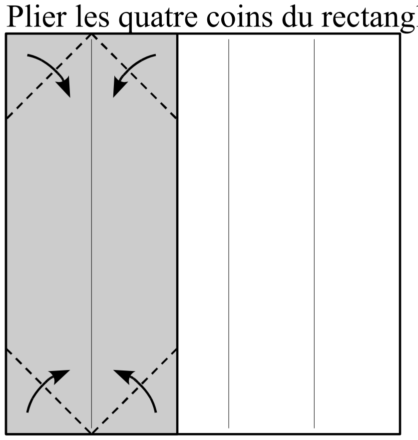
5. déplier entièrement la feuille pour obtenir …



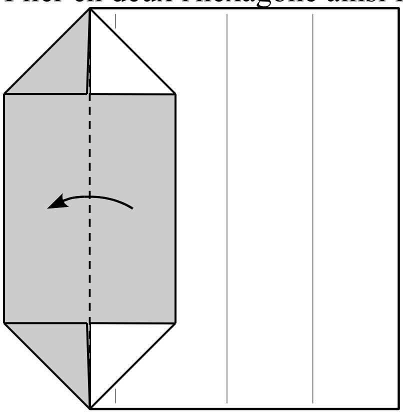
6. Plier la partie formée des deux rectangles de gauche selon le deuxième pli déjà marqué.



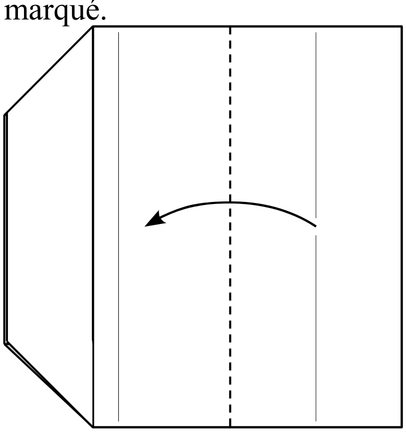
7. Plier les quatre coins du rectangle.



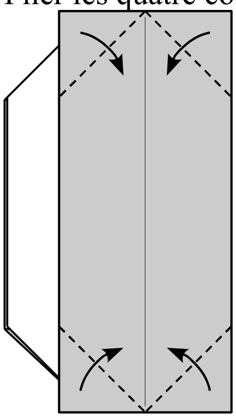
8. Plier en deux l'hexagone ainsi formé.



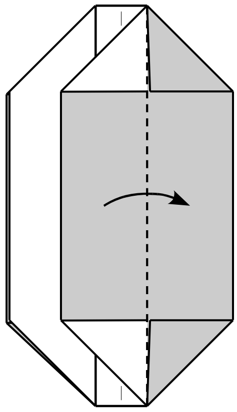
9. Plier la partie formée des deux rectangles de droite selon l'avant-dernier pli déjà marqué.



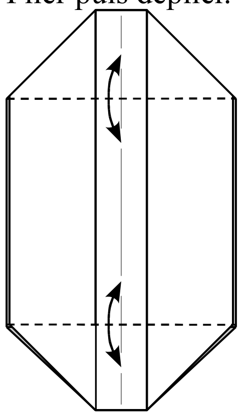
10. Plier les quatre coins du rectangle.



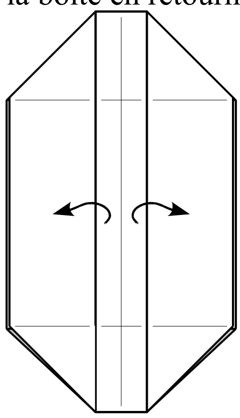
11. Plier en deux l'hexagone ainsi formé.



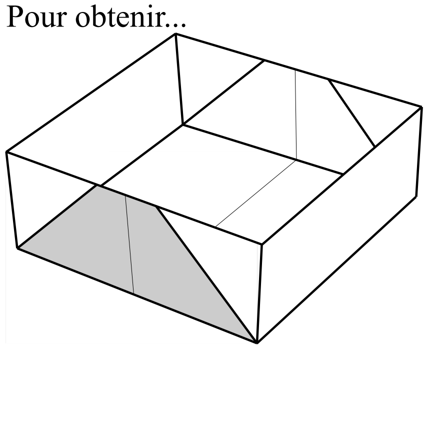
12. Plier puis déplier.



13. Ouvrir le modèle puis ajuster les côtés de la boite en retournant les plis.



Pour obtenir...



Question 1.
Effectuer ce pliage pour construire une boîte rectangulaire.

Question 2.
Appelons a et b les longueurs des côtés de la feuille. Au point 2 de la construction, on peut choisir la distance d entre le pli existant (milieu) et les deux nouveaux plis parallèles. Exprimer la hauteur h de la boîte en fonction de d puis calculer le volume de la boîte en fonction de a, b et h.

Question 3.
Avec une feuille A4, comment obtenir une boite à fond carré ?

Question 4.
Comment obtenir un cube ?

Question 5. Pour faire un couvercle qui s'emboîte bien sur votre boîte en utilisant le même pliage que devez-vous changer ?

Question 6.
Comment fabriquer cinq boîtes qui s'emboîtent les unes dans les autres en utilisant le même pliage?

Question 7.
Trouver le choix de pli qui permet de construire la boîte de volume maximal

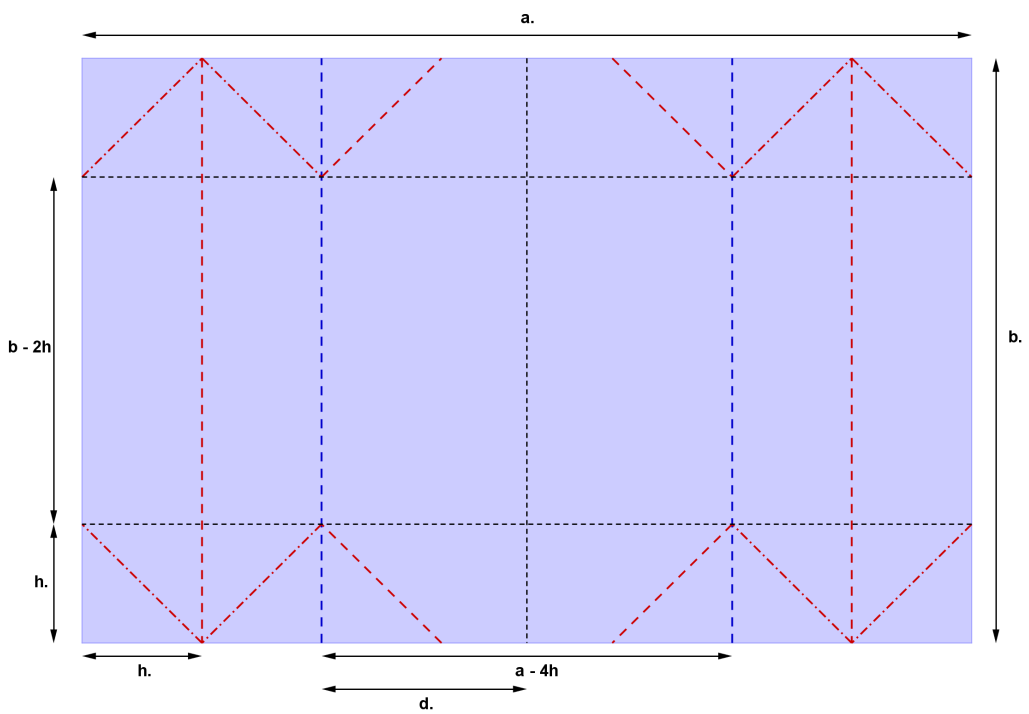
a. en partant d'une feuille A4

b. en partant d'une feuille de côté a et b fixés

Remarque: dans une feuille A4, si on appelle a et b les côtés, on a la relation $a = \sqrt{2}b$. Si on veut les dimensions exactes: b=21cm et a=29,7cm.

Éléments pour la synthèse

Question 2. *Exprimer la hauteur h de la boîte en fonction de d puis calculer le volume de la boîte en fonction de a, b et h.*
On suppose que $a>b$ et on note h la hauteur de la boîte.
Lorsqu'on déplie la feuille, on observe les plis ci-dessous qui nous permettent d'exprimer d et le volume de la boîte :



La hauteur de la boîte en fonction de la distance *d* est ainsi donnée par

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - d\right)$$

Et le volume *V* est donné par

$$V(h) = h(a-4h)(b-2h) = abh - 2(a+2b)h^2 + 8h^3$$

Pour h variant entre 0 et $\min\left\{\frac{b}{2}, \frac{a}{4}\right\}$.

Question 3. *Avec une feuille A4, comment obtenir une boite à fond carré ?*
D'une part, comme on se donne une feuille A4, on a la relation $a = \sqrt{2}b$ sur les bords de la feuille. D'autre part, les dimensions du fond de la boîte sont données par $a - 4h$ et $b - 2h$. Ainsi, pour obtenir une boîte à fond carré il suffit d'égaler ces dimensions et résoudre en h. On obtient alors

$$a - 4h = b - 2h$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2}b - 4h &= b - 2h \\ \left(\sqrt{2}-1\right)b &= 2h \\ \frac{\sqrt{2}-1}{2}b &= h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - 4h &= \frac{\sqrt{2}}{2}a - 2h \\ \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a &= 2h \\ \frac{2-\sqrt{2}}{4}a &= h \end{aligned}$$

suivant si on résout par rapport à a ou b.

Puisque la distance d est donnée par $d = \frac{a}{2} - 2h$, on peut aussi exprimer cette distance pour obtenir ne boîte à fond carré. Dans ce cas

$$d = \frac{a}{2} - 2h = \frac{a}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

Question 4. *Comment obtenir une boîte cubique ?*
Dans le cas d'une boîte cubique, il faut que

$$h = a - 4h = b - 2h.$$

En particulier, il faut que $h = a - 4h$, donc que

$$h = \frac{a}{5}$$

Or, dans le cas d'une feuille A4, on a que

$$h = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} a \neq \frac{a}{5}$$

Donc, on ne peut pas construire une boîte cubique en partant d'une feuille A4.

Question de relance: *Quelles sont les dimensions d'une feuille permettant de construire une boîte cubique?*

Sachant que $h = \frac{a}{5}$, on a que

$$\begin{array}{rcl} a - 4h & = & b - 2h \\ a - \frac{4}{5}a & = & b - \frac{2}{5}a \\ b & = & \frac{3}{5}a \end{array}$$

Ainsi, avec une feuille de dimensions a et $\frac{3}{5}a$, il faut faire un pli d'une largeur

$$d = \frac{a}{2} - 2h = \frac{a}{2} - \frac{2a}{5} = \frac{a}{10}$$

pour obtenir une boîte cubique.

Question 5. Pour faire un couvercle qui s'emboîte bien sur votre boîte en utilisant le même pliage que devez-vous changer ?

Pour que le couvercle s'emboîte bien sur la base il faut qu'il soit légèrement plus grand. Par contre sa hauteur peut être plus petite, on peut donc fabriquer un couvercle avec une feuille de même dimension en prenant une hauteur plus petite que celle utilisée pour la base de la boîte. Cependant, en diminuant la hauteur h, on ne diminue pas les côtés du même facteur. En effet, supposons que la nouvelle hauteur h' soit telle que $h' = h - \frac{\varepsilon}{2}$ et appelons $l_1 = a - 4h$ et $l_2 = b - 2h$ le dimensions du fond de la boîte. Dans ce cas:

$$l_1' = a - 4h' = a - 4h + 2\varepsilon = l_1 + 2\varepsilon \quad \text{et} \quad l_2' = b - 2h' = b - 2h + \varepsilon = l_2 + \varepsilon$$

Pour une feuille en papier recyclé ordinaire, en choisissant $\varepsilon = 3\text{mm}$, on a un couvercle qui s'adapte bien à l'un des côtés mais qui dépassera de 3mm sur l'autre côté. Avec les imprécisions dues au pliage, ce choix est assez bon.

<u>Question de relance:</u> *Quelles doivent être les dimensions de la feuille pour faire un couvercle parfait?*

On peut choisir de nouveau une hauteur $h' = h - \frac{\varepsilon}{2}$. On désire que $l_1' = l_1 + \varepsilon$ et $l_2' = l_2 + \varepsilon$. Si on suppose que la nouvelle feuille est de dimensions a' et b', on veut donc

$$l_1' = a' - 4h' = a - 4h + \varepsilon \quad \text{et} \quad l_2' = b' - 2h' = b - 2h + \varepsilon.$$

En remplaçant h', on obtient:

$$a' - 4h' = a' - 4h + 2\varepsilon = a - 4h + \varepsilon \qquad \text{d'où} \quad a' = a - \varepsilon$$

et

$$b' - 2h' = b' - 2h + \varepsilon = b - 2h + \varepsilon \qquad \text{d'où} \quad b' = b$$

Donc les dimension d'une feuille permettant de faire un couvercle parfait parfait pour un choix de h donné sont $a - \varepsilon$ et b, où $\frac{\varepsilon}{2}$ est la différence entre h et la nouvelle hauteur.

Question 6. *Comment fabriquer cinq boîtes qui s'emboîtent les unes dans les autres en utilisant le même pliage?*

Pour emboîter des parallélépipèdes rectangles les uns dans les autres, il est nécessaire de prendre des feuilles de papier de dimensions inférieures. Nous donnons ici la solution pour des boîtes telles que toutes les dimensions sont diminuées d'un même coefficient ε par rapport à la boîte précédente. Si on veut être plus précis, on peut éventuellement estimer la réduction de la taille de la feuille et de la hauteur de la boîte inscrite pour obtenir que le sommet deux boîtes imbriquées soit exactement à la même hauteur. Il faut cependant être conscient que pour obtenir une bonne réalisation de telles boîtes imbriquées la précision des pliages est certainement plus prépondérante que le calcul exact des feuilles à utiliser.

On part d'une feuille de papier de dimensions a_1 et b_1 et on note h_1 la hauteur de la boîte et $l_{1,1} = a_1 - 4h_1$ et $l_{2,1} = b_1 - 2h_1$ les dimensions du fond de la boîte. Alors on a les relations de récurrence suivantes sur les dimensions des boîtes:

$$\begin{aligned} h_{i+1} &= h_i - \varepsilon \\ l_{1,i+1} &= l_{1,i} - \varepsilon \\ l_{2,i+1} &= l_{2,i} - \varepsilon \end{aligned}$$

De ces relations, on déduit a_{i+1} et b_{i+1} à partir de a_i et b_i:

$$\begin{aligned} l_{1,i+1} &= l_{1,i} - \varepsilon \\ a_{i+1} - 4h_{i+1} &= a_i - 4h_i - \varepsilon \\ a_{i+1} - 4\left(h_i - \varepsilon\right) &= a_i - 4h_i - \varepsilon \\ a_{i+1} &= a_i - 5\varepsilon \end{aligned} \qquad \begin{aligned} l_{2,i+1} &= l_{2,i} - \varepsilon \\ b_{i+1} - 2h_{i+1} &= b_i - 2h_i - \varepsilon \\ b_{i+1} - 2\left(h_i - \varepsilon\right) &= b_i - 2h_i - \varepsilon \\ b_{i+1} &= b_i - 3\varepsilon \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient les dimensions de la i-ème feuille à partir de la première:

$$\begin{aligned} a_i &= a_1 - 5(i-1)\varepsilon \\ b_i &= a_1 - 3(i-1)\varepsilon \end{aligned}$$

et la hauteur de la i-ème boîte est donnée par $h_i = h_1 + i\varepsilon$.

Question 7. *Trouver le choix de pli qui permet de construire la boîte de volume maximal*

a. *en partant d'une feuille A4*

b. *en partant d'une feuille de côté a et b fixés*

Pour trouver le volume maximal, il faut calculer la dérivée de *V* par rapport à *h*. On obtient

$$V'(h) = ab - 4(a+2b)h + 24h^2.$$

Par la formule de résolution d'une équation du second degré, on obtient les deux solutions suivantes :

$$h_1 = \frac{1}{12}\left(a + 2b + \sqrt{a^2 - 2ab + 4b^2}\right) \quad \text{et} \quad h_2 = \frac{1}{12}\left(a + 2b - \sqrt{a^2 - 2ab + 4b^2}\right)$$

Il reste à déterminer laquelle de ces solutions est le maximum et quand ce maximum se trouve dans l'intervalle $\left[0, \min\left\{\frac{b}{2}, \frac{a}{4}\right\}\right]$.
Considérons le cas où la feuille est en format A4, ou plus généralement lorsque $a = \sqrt{2}b$.
Dans ce cas, la dérivée s'écrit comme

$$V'(h) = \sqrt{2}b^2 - 4(\sqrt{2}b + 2b)h + 24h^2.$$

Il nous faut tout d'abord trouver $\min\left\{\frac{b}{2}, \frac{a}{4}\right\}$. Comme

$$\frac{a}{4} = \frac{\sqrt{2}b}{4} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{<1}\frac{b}{2},$$

on en déduit que $\min\left\{\frac{b}{2},\frac{a}{4}\right\} = \frac{a}{4} = \frac{\sqrt{2}b}{4}$.

Reste maintenant à savoir si h_1 ou h_2 appartiennent à cet intervalle.

$$\begin{aligned} h_1 &= \tfrac{1}{12}\left(\left(\sqrt{2}+2\right)b + \sqrt{(6-2\sqrt{2})b^2}\right) = \tfrac{1}{12}\left(\left(\sqrt{2}+2\right)b + \sqrt{2}b\sqrt{(3-\sqrt{2})}\right) \\ &= \tfrac{\sqrt{2}b}{12}\left(\sqrt{2}+1+\sqrt{3-\sqrt{2}}\right) = \tfrac{\sqrt{2}b}{4}\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{3-\sqrt{2}}}{3}\right)}_{>1} > \tfrac{\sqrt{2}b}{4} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h_2 &= \tfrac{1}{12}\left(\left(\sqrt{2}+2\right)b - \sqrt{(6-2\sqrt{2})b^2}\right) = \tfrac{1}{12}\left(\left(\sqrt{2}+2\right)b - \sqrt{2}b\sqrt{(3-\sqrt{2})}\right) \\ &= \tfrac{\sqrt{2}b}{12}\left(\sqrt{2}+1-\sqrt{3-\sqrt{2}}\right) = \tfrac{\sqrt{2}b}{4}\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{3-\sqrt{2}}}{3}\right)}_{<1} < \tfrac{\sqrt{2}b}{4} \end{aligned}$$

Donc le volume est extrémal lorsque la hauteur de la boîte vaut h_2. Avec un tableau de variation, on vérifie aisément que h_2 est bien un maximum.

Dans le cas général, le volume maximal est atteint pour h_1 ou h_2 pour autant qu'ils appartiennent à l'intervalle $\left[0, \min\left\{\frac{b}{2},\frac{a}{4}\right\}\right]$.