

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET GROUPES DISCONTINUS, À LA POINCARÉ

PIERRE DE LA HARPE

RÉSUMÉ. Historically, the first source of numberless examples of discrete group actions goes back to the work of Poincaré in the early 1880's. Poincaré addressed a question of Fuchs on differential equations. His answers established that hyperbolic geometry is a part of mathematics that is natural, familiar, and useful, rather than a curiosity for specialists of Euclidean's postulates.

The talk will discuss some linear ordinary differential equations with rational coefficients, now called Fuchsian equations, and some results of Poincaré on what he called Fuchsian groups and Fuchsian functions.

Ce texte INACHEVÉ a été préparé pour le Séminaire Borel du 30 juin au 4 juillet 2014, aux Diablerets. Il précise et complète un projet d'exposé. Tout commentaire est bienvenu, en particulier sur la fin.

1. Introduction

Le texte qui suit est la rédaction d'un exposé préparé pour une semaine sur les "Actions de groupes discrets en géométrie et en topologie". L'abondance d'exemples de tels groupes date de travaux de Poincaré, dans les années 1880–1884. Ce moment clé de l'histoire des mathématiques est discuté dans de nombreuses sources, dont nous citons [Dieu–82, GLDE–00, GBio–13, Ghys–10].

Henri Poincaré est né à Nancy le 29 avril 1854 (la même année que Rimbaud) et il est mort à Paris le 17 juillet 1912 (l'année du naufrage du Titanic, mais aussi celle de la naissance de Turing). Il est donc né sous le Second Empire (Napoléon III, empereur des Français du 2 décembre 1852 au 4 septembre 1870). Après la guerre franco-allemande et la débâcle de Sedan (1er septembre 1870), il a vécu sous la IIIe République.

Le 1er août 1879, Poincaré soutient sa thèse. Son directeur, Hermite, est l'un des mathématiciens français les plus influents de la période. Le rapporteur, Darboux, avait signé le 6 juin un rapport qui laisse paraître

Date: 29 juin 2014.

un mélange d'admiration, d'incompréhension, et d'enthousiasme mesuré ; voir ci-dessous la Note 1, juste avant les références. Le 1er octobre 1879, Poincaré est nommé chargé de cours d'analyse à la Faculté des Sciences de Caen.

En mars 1879, l'Académie des Sciences de Paris propose pour son prix des sciences mathématiques, à décerner en 1880, le sujet suivant : “Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante” [Acad-79, texte complet ci-dessous en Note 2] ; le rapporteur du jury sera Hermite. Le 22 mars 1880, Poincaré soumet pour ce prix un mémoire sur la théorie réelle des équations différentielles (mémoire qu'on peut voir aujourd'hui comme la naissance de la théorie des systèmes dynamiques).

C'est début mai que Hermite montre à Poincaré un article tout récent de Fuchs [Fuch-80], sur les équations différentielles dans le domaine complexe. Poincaré savait l'allemand, contrairement à son maître. Cette lecture fut le déclencheur de ses recherches. Poincaré voit immédiatement de nombreux points à corriger dans l'article de Fuchs (voir la Note 3), ce que lui peut tirer, et les événements se déroulent à une vitesse incroyable.

Poincaré retire son premier mémoire le 14 juin, après qu'il a soumis, le 28 mai, un mémoire inspiré par sa lecture de Fuchs. Suivront trois suppléments envoyés à l'Académie les 28 juin, 6 septembre et 20 décembre 1880. Le prix sera décerné à Georges Halphen [Halp-84]. Deux autres des six concurrents, dont Poincaré, devront se contenter de “mentions très honorables” [Acad-81].

Les publications de Poincaré paraissent alors à un rythme endiablé, et lui gagnent une réputation qui ne se démentira plus. D'abord en 1881 une bonne douzaine de notes aux *Comptes Rendus* [Poin-etc] ; ensuite de 1882 à 1884 une annonce de résultats [Poin-82] et cinq longs articles dans les premiers numéros des *Acta* de Mittag-Leffler [Poin-82a, Poin-82b, Poin-83, Poin-84a, Poin-84b].

C'est sans doute entre le 29 mai 1880 (date de sa première lettre à Fuchs, et lendemain de son envoi à l'Académie du mémoire pour le prix) et le 12 juin (date de sa seconde lettre à Fuchs, après qu'il ait été absent de Caen) que Poincaré a son illumination hyperbolique, qui lui fait voir que les diverses valeurs des solutions multiformes des équations différentielles s'organisent comme les orbites d'un groupe de symétrie d'un domaine plan ; voir [PoFu-80], ainsi que la discussion dans [GLDE-00, page 181]. Dans la foulée, il montre notamment que

- La géométrie hyperbolique est un ingrédient obligé de cette branche reine des mathématiques qu’est l’analyse complexe, et pas seulement une curiosité pour spécialistes du cinquième postulat d’Euclide (voir la Note 4).
- Le plan hyperbolique $\mathbf{H}^2$ apparaît naturellement comme un disque ou un demi-plan dans le plan complexe. L’espace hyperbolique $\mathbf{H}^3$ apparaît lui comme espace dont le “bord à l’infini” est la droite projective $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ de l’analyse complexe.
- Les groupes fuchsien et kleinéens, c’est-à-dire les groupes discontinus d’isométries de $\mathbf{H}^2$ et $\mathbf{H}^3$, sont historiquement les premiers exemples, apparaissant *en masse*, de groupes discrets opérant proprement discontinûment sur des “espaces naturels”. Les exemples antérieurs étaient trop peu nombreux pour motiver une théorie substantielle : il s’agissait essentiellement de groupes finis, et de réseaux, sous-groupes de $\mathbf{R}^n$ isomorphes à $\mathbf{Z}^n$.
- Le groupe de monodromie projective d’une équation fuchsienne est un groupe d’isométries de $\mathbf{H}^3$, parfois de $\mathbf{H}^2$. Il peut être discret ou non, selon la nature des solutions de l’équation.

L’illumination hyperbolique vint à Poincaré lorsqu’il monta dans un omnibus à Coutances, comme il l’a décrit plus tard dans un passage souvent cité¹ [Poin–08].

“Depuis quinze jours, je m’efforçais de démontrer qu’il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j’ai appelé depuis les fonctions fuchiennes ; j’étais alors fort ignorant ; tous les jours, je m’asseyais à ma table de travail, j’y passais une heure ou deux, j’essayais un grand nombre de combinaisons et je n’arrivais à aucun résultat. Un soir, je pris du café noir, contrairement à mon habitude, je ne pus m’endormir : les idées surgissaient en foule ; je les sentais comme se heurter, jusqu’à ce que deux d’entre elles s’accrochassent, pour ainsi dire, pour former une combinaison stable. Le matin, j’avais établi l’existence d’une classe de fonctions fuchiennes, celles qui dérivent de la série hypergéométrique ; je n’eus plus qu’à rédiger les résultats, ce qui ne me prit que quelques heures.

Je voulus ensuite représenter ces fonctions par le quotient de deux séries ; cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie ; l’analogie

1. Proust l’a-t-il lu ? on peut rêver. Ceci dit, un omnibus est un véhicule tiré par des chevaux, sans doute pour transporter les voyageurs de la gare au centre ville. Coutances est une ville de Basse-Normandie, à un peu moins de 100 km de Caen (où Poincaré enseignait).

avec les fonctions elliptiques me guidait. Je me demandai quelles devaient être les propriétés de ces séries, si elles existaient, et j'arrivai sans difficulté à former les séries que j'ai appelées thétafuchsiennes.² A ce moment, je quittai Caen, où j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'Ecole des mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques ; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade ; au moment où je mettais le pied sur le marchepied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes étaient identiques à celles de la géométrie non euclidienne. Je ne fis pas la vérification ; je n'en aurais pas eu le temps, puisque, à peine assis dans l'omnibus, je repris la conversation commencée, mais j'eus tout de suite une entière certitude. De retour à Caen, je vérifiai le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience."

Quatre ans après l'omnibus révélateur, Poincaré termine son cinquième article aux *Acta* en souhaitant bonne chance à l'immense sujet qu'il a mis en lumière [Poin-84b] :

"Cela suffit pour faire comprendre que dans les cinq mémoires des *Acta mathematica* que j'ai consacrés à l'étude des transcendentes fuchsiennes et kleinéennes, je n'ai fait qu'effleurer un sujet très vaste, qui fournira sans doute aux géomètres l'occasion de nombreuses et importantes découvertes. (Paris, 30 Mai 1884.)"

Les articles de Poincaré ne sont pas faciles à lire ! Gray le formule bien dans cette citation de [GLDE-00, Page 187] :

"Only a truly great mathematician can achieve this degree of visionary imprecision".

* * * * *

Les chapitres 2 et 3 sont des rappels concernant les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients holomorphes et leurs points singuliers (Riemann, Fuchs). Le chapitre 4 est consacré à deux familles d'exemples associés à la représentation conforme des triangles (Schwarz, Christoffel). Le chapitre 5 expose deux résultats établis dans les deux premiers grands articles de Poincaré aux *Acta*, et

2. Dans les sources consultées, Poincaré orthographie "théta" dans les années 1880 et "thêta" vingt ans plus tard [Poin-01]. Nous avons opté pour le circonflexe, sauf dans les citations.

Par ailleurs, dans la terminologie moderne, due à Klein, les "fonctions thétafuchsiennes" de Poincaré sont des *formes automorphes*.

le chapitre 6 s'aventure à indiquer quelques-uns des nombreux autres résultats de Poincaré dans ce domaine.

Notre exposé résulte donc d'une lecture très fragmentaire des articles de Poincaré cités dans la liste des références, et de quelques sources postérieures, citées à la suite.

2. Équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients holomorphes

Soient $\mathcal{U}$ un domaine de $\mathbf{C}$ et f, g deux fonctions holomorphes sur $\mathcal{U}$ (un domaine est un ouvert connexe non vide). On considère une équation différentielle linéaire homogène du 2e ordre, de la forme

$$(1) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + f \frac{du}{dx} + gu = 0,$$

où x est une coordonnée sur $\mathcal{U}$.

L'essentiel de ce paragraphe et du suivant est un rappel de la théorie classique des équations différentielles, sans doute mieux connue des étudiants et de leurs maîtres du temps de Poincaré qu'aujourd'hui.

2.1. Solutions locales des équations différentielles. Comme toute équation différentielle, l'équation (1) a des *solutions locales* en tout point : pour tous $x_0 \in \mathcal{U}$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, et pour tout disque $D_\varepsilon(x_0)$ centré en x_0 et suffisamment petit, il existe dans $D_\varepsilon(x_0)$ une unique solution holomorphe u telle que $u(x_0) = \alpha$ et $\frac{du}{dx}(x_0) = \beta$.

L'espace $\mathcal{L}_{x_0}$ des solutions de (1) dans $D_\varepsilon(x_0)$ est un espace vectoriel complexe de dimension deux.

2.2. Bonus linéaire. L'équation (1) étant linéaire, l'énoncé de 2.1 est vrai dans le plus grand disque de $\mathbf{C}$ centré en x_0 et contenu dans $\mathcal{U}$; on détermine la solution u en ajustant l'un après l'autre les coefficients de son développement de Taylor en x_0 .

Plus précisément, on introduit dans l'équation (1) une série $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x - x_0)^k$, avec coefficients de Taylor u_k inconnus, et les deux séries $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x - x_0)^k$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x - x_0)^k$, avec coefficients f_k et g_k connus. On trouve une relation

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left((k+2)(k+1)u_{k+2} + \sum_{j=0}^k f_{k-j}(j+1)u_{j+1} + \sum_{j=0}^k g_{k-j}u_j \right) (x - x_0)^k = 0.$$

On choisit alors arbitrairement u_0, u_1 , puis on procède par récurrence sur k , pour trouver u_{k+2} en égalant à 0 le coefficient de $(x - x_0)^k$. On termine en montrant que le rayon de convergence de la série ainsi obtenue, $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x - x_0)^k$, est au moins aussi grand que le minimum des rayons de convergence des séries de Taylor de f et g autour de x_0 .

Pour adapter l'énoncé au cas où $x_0 = \infty$, on utilise le changement de variable $y = \frac{1}{x}$. Voir l'équation (19).

2.3. Solutions globales. Il résulte de 2.2 que toute solution u comme dans 2.1 est prolongeable analytiquement le long de tout chemin continu c dans $\mathcal{U}$, de x_0 vers un point x_1 de $\mathcal{U}$. Ces prolongements définissent un isomorphisme linéaire $M_c : \mathcal{L}_{x_0} \longrightarrow \mathcal{L}_{x_1}$ qui ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémités fixes de c dans $\mathcal{U}$.

L'ensemble de tous ces prolongements constitue une fonction analytique sur $\mathcal{U}$, en général multiforme³, qu'on peut aussi voir comme une fonction holomorphe (uniforme) sur le revêtement universel $\tilde{\mathcal{U}}$ de $\mathcal{U}$. Lorsque $\mathcal{U}$ est simplement connexe, la fonction u est uniforme sur $\mathcal{U}$.

2.4. Monodromie d'un lacet. En particulier, si c est un lacet en x_0 , c'est-à-dire un chemin fermé d'origine *et* d'extrémité x_0 , le prolongement analytique le long de c définit un automorphisme $M_c \in \text{GL}(\mathcal{L}_{x_0})$. Cet automorphisme est la MONODROMIE du lacet c .

Si on choisit une base u_1, u_2 de l'espace $\mathcal{L}_{x_0}$, l'automorphisme de monodromie $M_c : u \longmapsto u^*$ de $\mathcal{L}_{x_0}$ détermine une matrice inversible $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ telle que

$$(2) \quad \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice dépend du point x_0 , de la classe d'homotopie du lacet c , et de la base u_1, u_2 .

Pour une autre base $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$, avec $\begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, la monodromie s'écrit avec une matrice conjuguée :

$$(3) \quad \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \tilde{u}_1^* \\ \tilde{u}_2^* \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} T^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix}.$$

2.5. Groupe de monodromie. L'ensemble des automorphismes M_c , pour les lacets c en x_0 dans $\mathcal{U}$, constitue le GROUPE DE MONODROMIE de l'équation (1) en x_0 . Plus précisément, l'application qui associe à la classe d'homotopie d'un lacet c dans $\mathcal{U}$ basé en x_0 l'automorphisme M_c de $\mathcal{L}_{x_0}$ est un homomorphisme du groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{U}, x_0)$ sur le groupe de monodromie.

3. Galois dans son testament, et Ghys à sa suite [Ghys–10], préféreraient qu'on les appelle des *fonctions ambiguës*.

Un choix de base de $\mathcal{L}_{x_0}$ permet de voir le groupe de monodromie comme un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$. Ainsi ce sous-groupe est bien défini à conjugaison près.

Le mot “monodromique” apparaît chez Cauchy vers 1851, la monodromie d’une équation différentielle dans [Riem–57], et le terme de “groupe de monodromie” apparaît lui dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Jordan (1870), le premier livre exposant la théorie des groupes (selon [Gray–13]).

2.6. Groupe de monodromie projective. Soit (u_1, u_2) une base de $\mathcal{L}_{x_0}$. Le quotient

$$(4) \quad w = \frac{u_1}{u_2}$$

est une fonction méromorphe multiforme sur $\mathcal{U}$ (ou une fonction méromorphe uniforme sur $\tilde{\mathcal{U}}$). Pour une autre base $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ de $\mathcal{L}_{x_0}$, le quotient correspondant est de la forme

$$(5) \quad \tilde{w} = \frac{Aw + B}{Cw + D}, \quad \text{avec } T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C}).$$

(T est la matrice de changement de bases.)

En particulier, et avec la notation de (2), l’effet sur w de la monodromie d’un lacet c en x_0 s’écrit :

$$(6) \quad w \longmapsto w^* = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}.$$

L’ensemble de ces automorphismes constitue le GROUPE DE MONODROMIE PROJECTIVE de l’équation (1) en x_0 .

On peut le voir come un sous-groupe de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$ bien défini à conjugaison près.

2.7. Le problème d’inversion. On suppose de plus que $\mathcal{U}$ est le complémentaire d’une partie finie de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, et que f, g sont des (restrictions à $\mathcal{U}$ de) fonctions rationnelles sur $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$. On considère une équation (1) et un quotient $w = \frac{u_1}{u_2}$ comme dans (4).

Quand la fonction w a-t-elle une fonction inverse $x = x(w)$ méromorphe uniforme ?

2.8. Exemples : l’arcsinus et les intégrales elliptiques. Considérons d’abord l’équation différentielle

$$(7) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{x}{1-x^2} \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{U} := \mathbf{C} \setminus \{1, -1\},$$

ses deux solutions $u_1(x) = \int_0^{\overset{c}{\rightarrow}x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ et $u_2(x) \equiv 1$, et leur quotient

$$(8) \quad w(x) = \int_0^{\overset{c}{\rightarrow}x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

La notation $\int_0^{\overset{c}{\rightarrow}x}$ indique que la valeur de l'intégrale en x dépend du choix d'un chemin d'intégration c d'origine 0 et d'extrémité x . On sait bien que w s'écrit aussi

$$w(x) = \arcsin(x), \text{ ou encore } w(x) = -i \ln(ix + \sqrt{1-x^2}).$$

La fonction w est multiforme. Considérons par exemple un point x_1 du demi plan supérieur proche de 0 (pour fixer les idées, on peut choisir $x_1 = \frac{1}{2}i$). Soient d'une part c le chemin rectiligne de 0 à x_1 , et d'autre part c' un chemin issu de 0, et entourant deux fois⁴ le point -1 dans le sens trigonométrique positif avant d'aboutir à x_1 ; alors

$$\int_0^{\overset{c'}{\rightarrow}x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\overset{c}{\rightarrow}x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + 2\pi.$$

Remarque essentielle : la fonction w a un inverse

$$x = x(w) = \sin w$$

qui est une fonction holomorphe, en particulier une fonction uniforme. En remplaçant la “fonction multiforme” w par le sinus, on a uniformisé la situation.

De même, l'intégrale elliptique $\int_0^{\overset{c}{\rightarrow}x} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ est uniformisée par une fonction elliptique, comme cela avait été vu par Gauss vers 1800, et publié par Abels et Jacobi dans les années 1820 [Houz–78].

4. Pour que l'intégrale de (8) ait un sens, il ne faut pas que c soit un chemin dans $\mathcal{U}$, puisque la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ n'est pas définie dans $\mathcal{U}$, mais dans un revêtement à deux feuilles $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$. On peut penser à c comme un chemin dans $\mathcal{U}'$ dont la projection sur $\mathcal{U}$ entoure deux fois le point -1 , et dont les extrémités se projettent sur 0 et x .

2.9. Dérivée schwarzienne. Rappelons que la DÉRIVÉE SCHWARZIENNE $\{h, x\}$ d'une fonction méromorphe h sur $\mathcal{U}$ est définie par

$$\begin{aligned} \{h, x\} &= \frac{d^2}{dx^2} \left(\log \frac{dh}{dx} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} \left(\log \frac{dh}{dx} \right) \right)^2 \\ (9) \quad &= \left(\frac{h''}{h'} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{h''}{h'} \right)^2 \\ &= \frac{h'''}{h'} - \frac{3}{2} \left(\frac{h''}{h'} \right)^2. \end{aligned}$$

(Selon un usage répandu, on a utilisé à la fois les notations $\frac{dh}{dx}$ et h' , de même $\frac{d^2h}{dx^2}$ et h'' , etc.)

Si $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbf{C})$, les propriétés suivantes de la dérivée schwarzienne se vérifient mécaniquement :

- (i) $\left\{ \frac{\alpha h + \beta}{\gamma h + \delta}, x \right\} = \{h, x\}$, en particulier $\left\{ \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, x \right\} = 0$;
- (ii) $\left\{ h, \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right\} \frac{(\alpha \delta - \beta \gamma)^2}{(\gamma x + \delta)^2} = \{h, x\}$.

Il résulte de (5) et (ii) que la dérivée schwarzienne $\{w, x\}$ est indépendante de la base de $\mathcal{L}_{x_0}$ choisie pour définir w .

L'égalité de (i) montre que l'opérateur de dérivée schwarzienne est invariant par l'action de $\text{PGL}_2(\mathbf{C})$, agissant par précomposition. Comparer avec l'opérateur $h \mapsto \frac{d}{dx} \left(\log \frac{dh}{dx} \right) = \frac{h''}{h'}$, invariant par l'action $h \mapsto \alpha h + \beta$ d'un élément du groupe affine, ou avec l'opérateur $h \mapsto \frac{dh}{dx}$, invariant par l'action $h \mapsto h + \beta$ d'une translation.

2.10. Équations réduites. Une équation (1) est dite RÉDUITE si $f = 0$, c'est-à-dire si elle est de la forme

$$(10) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + gu = 0.$$

Etant donné une équation de la forme (1), on peut toujours définir un "changement de fonction" $u \mapsto v = \frac{u}{k}$, où k est une solution de l'équation différentielle $\frac{dk}{dx} + \frac{f}{2}k = 0$, et on vérifie que la fonction v vérifie l'équation différentielle réduite $\frac{d^2 v}{dx^2} + hv = 0$, avec $h = g - \frac{1}{2} \frac{df}{dx} - \frac{1}{4} f^2$.

2.11. Équation réduite à fonction w donnée. Soient u_1, u_2 deux solutions linéairement indépendantes d'une équation réduite (10), et $w = \frac{u_1}{u_2}$ leur quotient. Alors w est solution de l'équation différentielle⁵

$$(11) \quad \{w, x\} = 2g.$$

5. Une équation du 3e ordre non linéaire!

Réciproquement, soit w une fonction analytique sur $\mathcal{U}$. On suppose w multiforme et telle que, pour tout couple de valeurs w, w^* de w au voisinage d'un même point de $\mathcal{U}$, il existe une matrice inversible $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ telle que $w^* = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$. Alors il existe une équation différentielle linéaire homogène du 2e ordre réduite sur $\mathcal{U}$ et deux solutions linéairement indépendantes u_1, u_2 de cette équation telles que $w = \frac{u_1}{u_2}$. Plus précisément, si on pose

$$(12) \quad u_1 := \frac{w}{\sqrt{\frac{dw}{dx}}} \text{ et } u_2 := \frac{1}{\sqrt{\frac{dw}{dx}}},$$

il suffit de s'armer de courage pour le calcul élémentaire de $\frac{d^2 u_1}{dx^2}$ et $\frac{d^2 u_2}{dx^2}$, et on vérifie que u_1, u_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation

$$(13) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{2} \{w, x\} u = 0.$$

Noter que $\{w, x\}$ est une fonction uniforme de x ; en effet, si w et w^* sont deux déterminations de la fonction près de x , alors w^* est de la forme $\frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$ par hypothèse, et $\{w^*, x\} = \{w, x\}$ par la relation (i) de 2.9.

3. Points singuliers réguliers et équations fuchsiennes

3.1. Le cadre original du problème d'inversion. Le cadre dans lequel Fuchs et Poincaré se sont intéressés au problème d'inversion 2.7 est celui des ÉQUATIONS FUCHSIENNES DU 2e ORDRE, c'est-à-dire des équations de la forme (1) pour lesquelles :

- (i) $\mathcal{U} = \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 \setminus F$, où $F = \{a_1, \dots, a_d\}$ est fini.
- (ii) f et g sont des fonctions rationnelles, holomorphes hors de F .
- (iii) Les points de F sont des points singuliers RÉGULIERS, ce qui veut dire que l'ordre des pôles de f est au plus 1 et celui des pôles de g au plus 2.

Voir plus bas 3.3 pour des conditions équivalentes à (iii).

Attention : "équation fuchsienne" a d'autres sens chez d'autres auteurs ou dans d'autres articles, par exemple dans [Poin-84a].

Nous exposons ici quelques points de la théorie des équations fuchsiennes, en notant au préalable cette leçon de Riemann [Riem-57] :

pour comprendre une équation différentielle, il convient de s'attacher aux propriétés de ses solutions près de ses "mauvais points", c'est-à-dire près de ses points singuliers.

Notons toutefois que, comme Klein devait l'apprendre avec étonnement lors de sa correspondance avec Poincaré [PoKl-81], ce dernier ne savait vers 1880 pas grand chose des travaux de Riemann – à part bien sur ce qu'il avait retrouvé de lui-même. (Détails en Note 5.)

3.2. Solutions dans le voisinage d'un point singulier isolé. Considérons un domaine $\mathcal{V}$ de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1$, un point $a \in \mathcal{V}$, et une équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f \frac{du}{dx} + gu = 0, \quad \text{avec } f, g \text{ holomorphes dans } \mathcal{U} := \mathcal{V} \setminus \{a\},$$

comme en (1), pour laquelle a est donc un POINT SINGULIER ISOLÉ. On choisit un point base $x_0 \in \mathcal{U}$ proche de a et un lacet c dans $\mathcal{U}$ en x_0 entourant a une fois dans le sens positif, bordant un petit disque centré en a contenu dans $\mathcal{V}$.

Soient de plus u_1, u_2 deux solutions linéairement indépendantes de cette équation près de $x_0 \in \mathcal{U}$, et u_1^*, u_2^* les solutions près de x_0 obtenues à partir de u_1, u_2 par prolongement analytique le long de c . Notons M_c la monodromie correspondante, identifiée à une matrice deux-fois-deux, telle que

$$\begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} = M_c \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

On distingue deux cas, selon que M_c est diagonalisable ou non.

Si M_c est diagonalisable, on peut choisir les solutions u_1, u_2 telles que M_c soit une matrice diagonale $\text{diag}(\omega_1, \omega_2)$. Choisissons deux nombres complexes ρ_1, ρ_2 tels que

$$(14) \quad \exp(2\pi i \rho_j) = \omega_j \quad (j = 1, 2)$$

Soient U_1, U_2 les fonctions définies dans $\mathcal{U}$ par

$$(15) \quad \begin{cases} u_1(x) = (x - a)^{\rho_1} U_1(x), \\ u_2(x) = (x - a)^{\rho_2} U_2(x). \end{cases}$$

Comme $((x - a)^{\rho_j})^* = \omega_j (x - a)^{\rho_j}$, on voit que $U_j^* = U_j$ ($j = 1, 2$). En d'autres termes, U_1 et U_2 sont des fonctions uniformes sur un voisinage de a dans $\mathcal{U} \cup \{a\}$.

Si M_c n'est pas diagonalisable, on peut choisir⁶ les solutions u_1, u_2 telles que $M_c = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ \beta & \omega \end{pmatrix}$. Si on choisit à nouveau ρ_1 tels que $\exp(2\pi i \rho_1) =$

6. Il existe même un choix avec $\beta = 1$, mais il semble (???) que ce ne soit que rarement l'usage.

ω , on voit qu'on peut écrire

$$(16) \quad \begin{cases} u_1(x) = (x-a)^{\rho_1} U_1(x), \\ u_2(x) = (x-a)^{\rho_1} U_2(x) + \frac{\beta}{2\pi i \omega} \log(x-a) (x-a)^{\rho_1} U_1(x) \end{cases}$$

avec $U_1^* = U_1$ et $U_2^* = U_2$.

Tout cela est bien standard, voir par exemple [Hill-76, pages 153–154].

Ce qui précède appelle deux commentaires. D'abord, même si $\omega_1 = \omega_2$, on peut avoir avantage à choisir les nombres ρ_1 et ρ_2 distincts. Ensuite, il se peut qu'une équation ayant en a un point singulier ait dans le voisinage de ce point toutes ses solutions régulières. L'exemple suivant illustre ceci.

Pour l'équation

$$(17) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{2}{x} \frac{du}{dx} + \frac{2}{x^2} u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{U} = \mathbf{C} \setminus \{0\},$$

le point 0 est un point singulier (qui est d'ailleurs régulier, voir ci-dessous). Les solutions de l'équation sont les combinaisons linéaires des polynômes $u_1(x) = x$ et $u_2(x) = x^2$. La monodromie de l'équation est évidemment la matrice unité $\text{diag}(\omega_1, \omega_2) = \text{diag}(1, 1)$, avec $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Il convient de choisir $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$, pour que les fonctions U_1, U_2 de (15) soient holomorphes non nulles en 0.

3.3. Points singuliers réguliers. On appelle *secteur de sommet a* un ouvert de la forme

$$\text{Sect}(a, \theta_1, \theta_2) = \{x \in \mathbf{C} \mid 0 < |x-a| < \varepsilon \text{ et } \theta_1 \leq \arg(x-a) \leq \theta_2\},$$

avec ε assez petit pour que le secteur soit contenu dans $\mathcal{U}$.

Théorème (Fuchs). *Avec les notations précédentes, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Les fonctions $(x-a)f(x)$ et $(x-a)^2 g(x)$ sont holomorphes en a .*
- (ii) *Pour un choix convenable⁷ de ρ_1 et ρ_2 satisfaisant (14), les fonctions U_1 et U_2 de (15) ou (16), selon le cas, sont holomorphes en a .*
- (iii) *Pour tout choix de ρ_1 et ρ_2 , les fonctions U_1 et U_2 sont méromorphes en a .*
- (iv) *Pour tout choix de ρ_1 et ρ_2 et dans tout secteur $\text{Sect}(a, \theta_1, \theta_2)$, les fonctions U_1 et U_2 sont à croissance polynomiale près de a ; plus précisément, il existe un entier $n \in \mathbf{Z}$ et, pour tous θ_1, θ_2 ,*

7. En choisissant bien les ρ_j , on peut exiger de plus que $U_1(a) \neq 0 \neq U_2(a)$.

des constantes $c, c' > 0$ telles que $c|x-a|^n \leq |U_j(x)| \leq c'|x-a|^n$ pour tout $x \in \text{Sect}(a, \theta_1, \theta_2)$.

Lorsque ces conditions sont vérifiées, les exposants ρ_1, ρ_2 de (ii) sont les solutions de

$$(18) \quad \rho(\rho-1) + \{(x-a)f(x)\}_{|x=a} \rho + \{(x-a)^2g(x)\}_{|x=a} = 0.$$

Dans ce cas :

(v) Si $\rho_1 - \rho_2$ n'est pas un entier, les solutions u_j au voisinage de a s'obtiennent en calculant par récurrence sur k les coefficients d'une série $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x-a)^{\rho_j+k}$, en fonction des coefficients des développements de Laurent de f et g autour de a , comme au no 2.2. Si $\rho_1 - \rho_2$ est un entier (situation de (16)), le procédé précédent fournit u_1 ; pour une construction de u_2 , voir par exemple [WhWa-69, § 10.3].

Le détail de (v) est connu comme la “méthode de Frobenius” [Frob-73].

L'équation (18) est L'ÉQUATION AUX INDICES et ses solutions ρ_1, ρ_2 sont les EXPOSANTS CARACTÉRISTIQUES au point a .

Définition. Le point a est SINGULIER RÉGULIER pour l'équation (1) si les conditions du théorème précédent sont satisfaites.

Remarques. (a) Un simple “changement de fonction”

$$u(x) \longmapsto (x-a)^{\rho_1} u(x)$$

permet toujours de ramener la situation au cas où l'un des deux exposants caractéristiques en a est nul.

(b) Si g en a est holomorphe ou possède un pôle d'ordre 1, alors de même l'un des deux exposants caractéristiques en a est nul.

(c) Si a est un point régulier pour (1), c'est-à-dire si les fonctions f et g sont holomorphes au voisinage de a , les exposants caractéristiques sont 0 et 1.

3.4. Critères pour le point à l'infini. Dans le cas où $\mathcal{U}$ contient une couronne $\{x \in \mathbf{C} \mid |x| > R\}$, on considère également le point ∞ comme un point singulier isolé. Pour l'équation (1) dans un tel domaine $\mathcal{U}$, le changement de variable $y = \frac{1}{x}$ transforme l'équation en

$$(19) \quad \frac{d^2v}{dy^2} + \left(\frac{2}{y} - \frac{1}{y^2} f\left(\frac{1}{y}\right) \right) \frac{dv}{dy} + \frac{1}{y^4} g\left(\frac{1}{y}\right) v = 0,$$

dans un voisinage de l'origine.

Par suite, pour que l'infini soit un point singulier régulier, il faut et il suffit que les limites

$$(20) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} x^2g(x)$$

existent *et soient bornées*. Notons aussi que l'infini est un point non singulier si et seulement si les limites

$$(21) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \left(f(x) - \frac{2}{x} \right) \right) \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} x^4g(x)$$

existent *et sont bornées*.

3.5. Cas avec $d \leq 2$. Il n'existe pas d'équation fuchsienne sans point singulier. En effet, une telle équation aurait ses coefficients $f(x), g(x)$ holomorphes dans tout le plan et bornés à l'infini, voir (20). Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ seraient donc des constantes, ce qui est incompatible avec (21).

Les équations fuchiennes avec un seul point singulier régulier ont des solutions qu'on trouve de manière élémentaire. Si ce point est à l'infini, l'équation s'écrit

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0,$$

et sa solution générale est de la forme $u(x) = c_1x + c_2$. Si ce point singulier est en $a \neq \infty$, l'équation s'écrit

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{x-a} \frac{du}{dx} = 0$$

et sa solution générale est de la forme $u(x) = \frac{c_1}{x-a} + c_2$.

Les équations fuchiennes avec deux points singuliers réguliers a et a_2 ont en général des solutions multiformes. Elles s'intègrent également de manière élémentaire. Supposons pour simplifier que $a_2 = \infty$. L'équation s'écrit

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{f_0}{x-a} \frac{du}{dx} + \frac{g_0}{(x-a)^2} u = 0.$$

L'équation aux indices est $\rho(\rho-1) + f_0\rho + g_0 = 0$; notons ρ_1, ρ_2 ses solutions. Si $\rho_1 \neq \rho_2$, l'équation a deux solutions linéairements indépendantes

$$u_1(x) = (x-a)^{\rho_1} \text{ et } u_2(x) = (x-a)^{\rho_2}.$$

Si $\rho_1 = \rho_2$, donc égaux à $\rho := \frac{1-f_0}{2}$, l'équation a deux solutions linéairement indépendantes

$$u_1(x) = (x-a)^\rho \text{ et } u_2(x) = (x-a)^\rho + (x-a)^\rho \log(x-a).$$

3.6. L'équation de Gauss. L'exemple type d'équation fuchsienne du 2e ordre est celui de l'ÉQUATION HYPERGÉOMÉTRIQUE aussi nommée ÉQUATION DE GAUSS :

$$(22) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)} \frac{du}{dx} - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)} u = 0.$$

Cette équation dépend de trois paramètres $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$.

L'équation de Gauss a trois points singuliers réguliers, en $0, 1, \infty$. L'équation aux indices (18) montre que les exposants caractéristiques sont $0, 1-\gamma$ en 0 et $0, \gamma-\alpha-\beta$ en 1 . L'équation (19) permet de calculer les exposants à l'infini, qui sont α, β .

Si u est une solution de (22), alors

$$v(x) = x^{\gamma/2} (1-x)^{(\alpha+\beta+1-\gamma)/2} u(x)$$

est solution d'une l'équation réduite de la forme

$$(23) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{x(1-x)} \right) v = 0$$

(où A, B, C peuvent se calculer en termes de α, β, γ).

3.7. Cas général avec $d = 3$ points singuliers réguliers. On peut montrer que l'étude de toute équation fuchsienne avec trois points singuliers réguliers, en $a, b, c \in \mathbf{C}$, se ramène à l'étude de l'équation de Gauss (22) par un changement de variable⁸ $y = \frac{(x-a)(c-b)}{(x-b)(c-a)}$ et une transformation de la forme $u \mapsto \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^\rho \left(\frac{x-c}{x-b}\right)^{\rho'} u$; voir par exemple [WhWa-69, nos 10.7 à 10.72].

La notation de Riemann pour la solution analytique (fonction multiforme dans $\mathbf{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$) est, suggestivement,

$$P \left\{ \begin{matrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1-\gamma & \beta & \gamma-\alpha-\beta \end{matrix} \right. z \right\};$$

voir [Riem-57] et, par exemple, [WhWa-69, pages 208 et 283]. Noter l'“identité de Riemann” : la somme des six exposants caractéristiques est 1.

8. L'unique transformation homographique appliquant a, b, c sur $0, \infty, 1$ respectivement.

3.8. La fonction hypergéométrique. Pour trois nombres complexes α, β, γ , avec $\gamma \notin -\mathbf{N}$, on définit la fonction hypergéométrique

$$(24) \quad \begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma; x) = & 1 + \frac{\alpha \beta}{1! \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \beta(\beta+1)}{2! \gamma(\gamma+1)} x^2 \\ & + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \beta(\beta+1)(\beta+2)}{3! \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots \end{aligned}$$

Si $-\alpha \in \mathbf{N}$ ou $-\beta \in \mathbf{N}$, la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ est un polynôme. Sinon, le rayon de convergence de la série qui la définit est 1. Il y a quelques cas pour lesquels $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ est algébrique. Par exemple $F(-\alpha, \beta, \beta; x) = (1+x)^\alpha$ est algébrique pour $\alpha \in \mathbf{Q}$. Toutefois, “en général”, la série (24) ne définit pas une fonction algébrique.

3.9. Solutions de l'équation de Gauss près des trois points singuliers réguliers. L'équation de Gauss (22) possède les solutions suivantes (voir par exemple [BiRo-78]).

(0) Si $\gamma \notin \mathbf{Z}$, deux solutions près de 0 (dans le disque de rayon 1 autour de 0) qui sont

$$(25) \quad \begin{cases} F(\alpha, \beta, \gamma; x), \\ x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; x). \end{cases}$$

De plus, ces solutions sont linéairement indépendantes.

(1) Si $\alpha + \beta - \gamma \notin \mathbf{Z}$, deux solutions près de 1 (dans le disque de rayon 1 autour de 1) qui sont

$$(26) \quad \begin{cases} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - x), \\ (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - x). \end{cases}$$

Si de plus $\alpha + \beta \neq 0$, ces solutions sont linéairement indépendantes.

(∞) Si $\alpha - \beta \notin \mathbf{Z}$, deux solutions près de ∞ (dans la couronne $\{x \in \mathbf{C} \mid |x| > 1\}$) qui sont

$$(27) \quad \begin{cases} x^{-\alpha} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1; \frac{1}{x}), \\ x^{-\beta} F(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1; \frac{1}{x}). \end{cases}$$

Si de plus $\alpha \neq \beta$, ces solutions sont linéairement indépendantes.

Dans les cas particuliers exclus ci-dessus, les solutions de (22) peuvent contenir des termes logarithmiques.

3.10. Cas général avec $d = 5$ points singuliers réguliers. L'importance des équations fuchsienues tient pour une bonne part au rôle qu'elles jouent en physique mathématique classique.

Le traité [WhWa-69, no 10.6] cite une affirmation de Klein et Bôcher des années 1890 selon laquelle certaines des équations fuchsienues avec cinq points singuliers réguliers et leurs avatars (y compris les équations obtenues “par confluence”) contiennent ‘ll the linear differential equations which occur in certain branches of Mathematical Physics’.

3.11. Digression : un exemple avec point singulier irrégulier. Si a est un point singulier régulier d'une équation (1), le théorème de Fuchs montre que les solutions de l'équation ont des limites (peut-être infinies) le long de rayon issus de a . L'exemple suivant montre que ce n'est pas le cas autour des points singuliers irréguliers.

L'équation $\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{2}{y} \frac{du}{dy} - \frac{1}{y^4}u = 0$, définie dans $\mathbf{C}^\times$, a un point singulier irrégulier à l'origine. Les fonctions $u_1 = \exp\left(\frac{1}{y}\right)$ et $u_2 = \exp\left(-\frac{1}{y}\right)$ en sont deux solutions linéairement indépendantes; toute solution non nulle de l'équation possède donc une singularité essentielle à l'origine.

La croissance de u_1 ou u_2 sur les rayons $te^{i\theta}$, pour θ fixe et $t > 0$, $t \rightarrow 0$, dépend fortement de θ :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \left| \exp\left(\frac{1}{te^{i\theta}}\right) \right| &= \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \exp\left(\frac{\cos \theta}{t}\right) = \infty \text{ si } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \left| \exp\left(\frac{1}{te^{i\theta}}\right) \right| &= \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \exp\left(\frac{\cos \theta}{t}\right) = 0 \text{ si } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

(C'est un exemple du “phénomène de Stokes”).

Incidemment, l'équation ci-dessus est la transformée par le changement de variable $y = \frac{1}{x}$ de l'équation $\frac{d^2u}{dx^2} - u = 0$, qui a un point singulier irrégulier à l'infini, avec solutions $\exp(\pm x)$. Plus généralement, pour une équation à coefficients constants

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a \frac{du}{dx} + bu = 0, \quad \text{avec } a, b \in \mathbf{C},$$

l'infini est toujours un point singulier, et c'est un point singulier irrégulier si et seulement si $(a, b) \neq (0, 0)$.

4. Exemples d'équations associées à la représentation conforme des triangles

4.1. Formule de Schwarz-Christoffel pour la représentation conforme des polygones. Soit d'une part

$$(28) \quad \mathbf{H} = \{x \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im}(x) > 0\}$$

le⁹ DEMI-PLAN DE POINCARÉ. On note $\overline{\mathbf{H}}$ son adhérence *dans la droite projective*, c'est-à-dire

$$\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \cup \mathbf{R} \cup \{\infty\}.$$

Soit d'autre part P un domaine polygonal simplement connexe dans $\mathbf{C}$. Notons $A_1, \dots, A_d$ ses sommets, énumérés dans un ordre cyclique positif, et $\lambda_1\pi, \dots, \lambda_d\pi$ les angles correspondants; on note que $\lambda_1 + \dots + \lambda_d = d - 2$. Schwarz et Christoffel ont montré que la fonction w ci-dessous est un homéomorphisme $\overline{\mathbf{H}} \rightarrow \overline{P}$ dont la restriction à $\mathbf{H}$ est un biholomorphisme sur P ; elle applique des points $a_1, \dots, a_d \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, avec $-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_d \leq \infty$, sur les sommets $A_1, \dots, A_d$.

On suppose désormais (sans perte de généralité) que $a_d = \infty$, et on définit la fonction $w : \overline{\mathbf{H}} \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$(29) \quad w(x) = c_1 \int_0^x \frac{dt}{(t - a_1)^{1-\lambda_1} \dots (t - a_{d-1})^{1-\lambda_{d-1}}} + c_2.$$

Dans (29), on peut (par exemple) intégrer sur le chemin rectiligne de 0 à x . Pour les termes du dénominateur de l'intégrant, on convient que

$$(x - a_j)^{1-\lambda_j} = \exp \left[(1 - \lambda_j) \operatorname{Log}(x - a_j) \right],$$

où la notation $\operatorname{Log}(y)$ signifie le logarithme du nombre complexe non nul y tel que $-\pi < \arg(y) \leq \pi$. Pour l'étude de la fonction w , nous renvoyons à [SaZy-65, § V.8], ou à [Neha-52, § V.6, formule (51), page 192]. On montre que l'intégrale définit un homéomorphisme de $\overline{\mathbf{H}}$ sur un polygone semblable à $\overline{P}$. En ajustant les constantes c_1, c_2 , on obtient un homéomorphisme w de $\overline{\mathbf{H}}$ sur $\overline{P}$, précisément, tel que $w([a_j, a_{j+1}]) = [A_j, A_{j+1}]$ pour $j = 1, \dots, d - 1$, et $w([-\infty, a_1]) = [A_d, A_1]$ (on laisse au lecteur le soin de lever l'ambiguïté de la notation, impliquant une "égalité" $-\infty = \infty$).

Cette formule illustre le sujet de ce texte dans la mesure où w est une solution de l'équation fuchsienne du 2e ordre

$$\frac{d}{dx} \log \frac{du}{dx} = \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\lambda_j - 1}{x - a_j},$$

c'est-à-dire

$$(30) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} - \left(\sum_{j=1}^{d-1} \frac{\lambda_j - 1}{x - a_j} \right) \frac{du}{dx} = 0.$$

9. Dans ce passage, $\mathbf{H}$ est un ouvert de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, mais sa structure de plan hyperbolique n'intervient pas pour l'instant.

Une autre solution, linéairement indépendante, est évidemment la fonction $u_2(x) \equiv 1$.

Puisque la fonction w de (29) prend des valeurs réelles sur la droite réelle, on peut grâce au *principe de symétrie de Schwarz* la prolonger dans $\{x \in \mathbf{C} \mid \text{Im}(x) < 0\}$, et ceci de plusieurs manières. Plus précisément, soit $j \in \{1, \dots, d\}$. Notons $\sigma^{\mathbf{R}}$ la symétrie du plan d'axe $\mathbf{R}$, et σ_j^P la symétrie du plan d'axe supporté par le côté $[A_j, A_{j+1}]$ de P (avec $[A_d, A_{d+1}] = [A_d, A_1]$). On prolonge w en posant $w(\sigma^{\mathbf{R}}(x)) = \sigma_j^P(w(x))$; ce prolongement dépend de j . En itérant ce type de prolongement (pour diverses valeurs de j), définissant de nouvelles valeurs de w alternativement aux points de $\mathbf{H}$ et de $-\mathbf{H}$, on obtient une fonction holomorphe multiforme, qu'on peut voir comme une fonction holomorphe uniforme sur le revêtement universel $\tilde{\mathcal{U}}$ de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 \setminus \{a_1, \dots, a_d\}$.

Les symétries σ_j^P engendrent un groupe Γ^* qu'on peut voir comme un sous-groupe du groupe des isométries du plan euclidien, et aussi comme un sous-groupe du groupe des transformations holomorphes et antiholomorphes de $\mathbf{C}$. Le sous-groupe Γ constitué des isométries préservant l'orientation est le groupe de monodromie projective de l'équation (30); il est d'indice 2 dans Γ^* .

4.2. Cas pour lesquels Γ est un groupe discret d'isométries du plan. Il y a quatre cas remarquables, ceux pour lesquels P est de l'un des types suivants :

- un triangle d'angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$,
- un triangle d'angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$,
- un triangle d'angles $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$,
- un rectangle.

Dans ces cas, Γ^* est un sous-groupe discret du groupe des isométries du plan. Les images $(\gamma(\bar{P}))_{\gamma \in \Gamma^*}$ constituent un pavage du plan par des copies de $\bar{P}$, et les images¹⁰ $(\gamma(\bar{P} \cup \sigma_j^P(\bar{P})))_{\gamma \in \Gamma}$ constituent un pavage du plan par des copies du parallélogramme $\bar{P} \cup \sigma_j^P(\bar{P})$.

Le revêtement $\rho' : \tilde{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ a des monodromies locales finies en les a_j ; il existe donc une surface de Riemann X dans laquelle $\tilde{\mathcal{U}}$ est un ouvert dense et un revêtement ramifié $\rho : X \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ qui prolonge ρ' . L'inverse de la fonction $w : \tilde{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbf{C}$ suivi de ρ est une

10. Ceci pour n'importe quelle valeur de j , dans $\{1, 2, 3\}$ pour les trois cas de triangles ou dans $\{1, 2, 3, 4\}$ pour le cas du rectangle.

fonction méromorphe $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ qui est Γ -invariante (en particulier doublement périodique), et qui uniformise w au sens du problème 2.7.

Possible d'en dire un peu plus (mais pas trop!) ???

Il manque ici une discussion pour préciser quand et dans quel sens une équation comme (30), ou plus généralement comme (1), peut être vue non seulement sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, mais aussi sur $\widetilde{\mathcal{U}}$, sur X , Voir les numéros sur les équations différentielles *globalisables*, *normales*, *uniformisantes*, ..., dans [Gerv–10, chapitre VIII].

En résumé, dans chacun des quatre cas remarquables décrits ci-dessus, la fonction multiforme $w = w(x)$ s'uniformise à l'aide d'une fonction méromorphe uniforme Γ -invariante $x = x(w)$.

4.3. Représentation conforme de Schwarz des triangles circulaires. Soit P un domaine simplement connexe de $\mathbf{C}$, polygonal circulaire, c'est-à-dire dont le bord est réunion d'arcs de cercles, ou côtés, notés ci-dessous $[A_j, A_{j+1}]$, avec $j \in \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ (comparer avec le no 4.1).

On sait qu'il existe un homéomorphisme $w : \overline{\mathbf{H}} \longrightarrow \overline{P}$ dont la restriction à $\mathbf{H}$ est un biholomorphisme sur P . Comme au no 4.1, on peut associer à une telle fonction w une équation fuchsienne qu'on sait expliciter au moins partiellement.

On se restreint ici au cas de l'intérieur T d'un triangle circulaire, avec côtés des arcs de cercles¹¹ C_1, C_2, C_3 , et avec angles $\alpha\pi, \beta\pi, \gamma\pi$ tels que $\alpha + \beta + \gamma < 1$. On suppose de plus que C_1 et C_2 se coupent en deux points séparés par C_3 ; il existe alors un disque $\mathbf{D}$ de $\mathbf{C}$ dont le bord est orthogonal à chacun des trois cercles C_1, C_2, C_3 [Gerv–10, Proposition IX.2.5].

Nous particularisons à cette situation un énoncé de [Neha–52, § V.7, page 205] :

Proposition. *Soit T un domaine triangulaire circulaire comme ci-dessus et $w : \overline{\mathbf{H}} \longrightarrow \overline{T}$ un homéomorphisme dont la restriction à $\mathbf{H}$ est un biholomorphisme sur T , appliquant les points $0, 1, \infty$ de l'axe réel respectivement sur les sommets de T d'angles $\alpha\pi, \beta\pi, \gamma\pi$.*

Alors w est quotient de deux solutions linéairement indépendantes de l'équation fuchsienne

$$(31) \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{4} \left[\frac{1 - \alpha^2}{x^2} + \frac{1 - \beta^2}{(x - 1)^2} + \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 1}{x(x - 1)} \right] u = 0.$$

Notes. Ce résultat est essentiellement dû à Schwarz. Il fut retrouvé par Poincaré, qui n'avait pas lu Schwarz.

11. Il s'agit de cercles dans $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, dont les traces sur $\mathbf{C}$ peuvent être des cercles ou des droites.

L'équation (31) est un cas particulier de l'équation (23), et peut donc être ramenée si l'envie s'en fait sentir à l'équation de Gauss (22) par un changement de fonction convenable.

Pour un analogue ici de la formule (29), analogue qui est cette fois un quotient de deux intégrales, nous renvoyons à [Neha-52, formule (75), page 207].

Les inversions $\sigma_1^T, \sigma_2^T, \sigma_3^T$ relatives aux cercles C_1, C_2, C_3 engendrent comme au no 4.1 un groupe Γ^* de transformations holomorphes et antiholomorphes de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$. Le sous-groupe Γ des transformations holomorphes, d'indice 2 dans Γ^* est le groupe de monodromie projective de l'équation (31). Les transformés $\gamma(\overline{T})$, pour $\gamma \in \Gamma^*$, sont tous dans le disque ouvert $\mathbf{D}$.

4.4. Cas pour lesquels Γ est un groupe fuchsien. Dans la situation de la proposition précédente, il y a une infinité de cas remarquables (comparer avec les quatre cas du no 4.2), ceux pour lesquels les angles de T sont de la forme

$$(32) \quad \frac{\pi}{\ell}, \quad \frac{\pi}{m}, \quad \frac{\pi}{n}, \quad \text{avec } \ell, m, n \in \{2, 3, \dots, \infty\} \text{ et } \frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1.$$

Dans ce cas, et si $\mathbf{D}$ est muni de sa métrique hyperbolique, les groupes Γ^* et Γ sont des groupes discrets d'isométries hyperboliques. La famille $(\gamma(\overline{T}))_{\gamma \in \Gamma^*}$ est un pavage du plan hyperbolique par des triangles isométriques à $\overline{T}$, et, pour $j \in \{1, 2, 3\}$, la famille $(\gamma(\overline{T} \cup \sigma_j^T(\overline{T})))_{\gamma \in \Gamma}$ est un pavage du plan hyperbolique par des quadrilatères isométriques entre eux, ceci pour j l'un quelconque des indices 1, 2, 3.

Comme en 4.2, le revêtement universel $\rho' : \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ se prolonge en un revêtement ramifié $\rho : X \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ (au moins si $\ell, m, n < \infty$). L'inverse de w , vue comme fonction de $\tilde{\mathcal{U}}$ dans $\mathbf{D}$, suivi de ρ , est une fonction méromorphe $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ qui est Γ -invariante, et qui uniformise w au sens du problème 2.7.

En résumé, pour une équation (31) dont les constantes α, β, γ satisfont les conditions de (32), la fonction multiforme $w = w(x)$ s'uniformise à l'aide d'une fonction méromorphe uniforme $x = x(w)$ qui est AUTOMORPHE pour le groupe Γ , c'est-à-dire telle que $x(\gamma(w)) = x(w)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

5. Groupes fuchsien et séries de Poincaré

Poincaré retourne la question : nous allons voir comment il établit d'abord l'existence d'une fonction fuchsienne, puis constate que celle-ci est l'inverse uniforme d'un quotient w de solutions d'une équation différentielle de la forme (1).

5.1. Les polygones générateurs des groupes fuchsien. Notons G le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$, identifié au groupe des isométries préservant l'orientation du demi-plan de Poincaré $\mathbf{H}^2$. Soit Γ un sous-groupe de G . Rappelons que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Γ est un sous-groupe discret de G ,
- (ii) toutes les orbites de Γ dans $\mathbf{H}^2$ sont des sous-ensembles discrets de $\mathbf{H}^2$.

En effet, le groupe G agit librement transitivement sur le fibré unitaire tangent $T^1\mathbf{H}^2$ du demi-plan de Poincaré, et la projection naturelle $T^1\mathbf{H}^2 \rightarrow \mathbf{H}^2$ est à fibres compactes (des cercles). Les orbites de Γ sont donc discrètes dans $T^1\mathbf{H}^2 \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ si et seulement si elles le sont dans $\mathbf{H}^2$.

Un GROUPE FUCHSIEN est un sous-groupe discret du groupe G d'isométries du plan hyperbolique $\mathbf{H}^2$. Le premier article de Poincaré aux *Acta* leur est consacré [Poin-82a]. Son résultat principal fournit, entre autres, un procédé pour les construire tous (au moins tous ceux qui sont de type fini).

Les groupes triangulaires de Schwarz du no 4.3 sont des exemples de groupes fuchsien. Pour le cas général, Poincaré considère un polygone P dans $\overline{\mathbf{H}^2}$, avec sommets $A_1, \dots, A_d$ énumérés dans un ordre cyclique. Les côtés $e_1 = [A_1, A_2]$, $\dots$, $e_d = [A_d, A_1]$ sont ou bien des segments de géodésiques d'intérieurs dans $\mathbf{H}^2$ ou bien des segments de l'axe réel étendu $\mathbf{R} \cup \{\infty\} = \partial\mathbf{H}^2$. De plus, les côtés à intérieurs dans $\mathbf{H}^2$ sont orientés, en nombre pair, et répartis par couples, deux côtés d'un même couple étant de même longueur ; pour chacun de ces couples ($e = [A_i, A_{i+1}]$, $e' = [A_j, A_{j+1}]$), on se donne une transformation $s_e \in G$ telle que $s_e(e) = e'$ et $s_e(A_i) = A_{j+1}$, ainsi que la transformation inverse $s_{e'} = s_e^{-1}$.

Le résultat de Poincaré établit des conditions nécessaires et suffisantes pour que le sous-groupe Γ de G engendré par les s_e soit discret ; lorsque ces conditions sont remplies, P est un domaine fondamental pour Γ , et le résultat fournit de plus une présentation de Γ . Dans les bons cas ($\Gamma \backslash G$ compact et Γ sans torsion), le quotient $\Gamma \backslash \mathbf{H}^2$ est une surface de Riemann de genre

$$(33) \quad g = \frac{1}{2}(d + 1 - c),$$

où c est le nombre de classes d'équivalence de sommets pour la relation engendrée, avec les notations ci-dessus, par $s_e(A_i) \sim A_{j+1}$. La relation (33) résulte de ce qu'on appelle désormais la formule d'Euler-Poincaré.

Pour des expositions de ces résultats, nous renvoyons à [Rham–71] et [Mask–71]. La seconde de ces références discute également la situation analogue pour les sous-groupes discrets d’isométries de $\mathbf{H}^3$ et les polyèdres générateurs de groupes kleinéens [Poin–83].

5.2. Existence de fonctions thêta-fuchsiennes et fuchsiennes.

Le but de ce numéro est de montrer comment les séries de Poincaré sont apparues pour la construction de formes et fonctions automorphes, dans le second article de Poincaré aux *Acta* [Poin–82b]. Les démonstrations ci-dessous suivent d’assez près [Cart–54, exposé 1], qui vaut pour un domaine borné de $\mathbf{C}^n$; voir aussi [Gerv–10, Th. VI.3.1, page 218].

Notons cette fois G le quotient par son centre $\{\pm \text{id}\}$ du groupe $\tilde{G}$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ et $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. C’est un groupe de Lie connexe, parfois noté $\text{PSU}(1, 1)$, et isomorphe à $\text{PSL}_2(\mathbf{R})$. Nous notons $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \in G$ la classe d’une matrice comme ci-dessus. Le groupe G agit dans le disque unité $\mathbf{D}_1 := \{x \in \mathbf{C} \mid |x| < 1\}$ du plan complexe par

$$gx = \frac{\alpha x + \beta}{\bar{\beta}x + \bar{\alpha}} \quad \text{pour} \quad g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \in G \text{ et } x \in \mathbf{D}_1.$$

On pose alors

$$j(g, x) = \bar{\beta}x + \bar{\alpha} \quad \text{de sorte que} \quad \frac{d(gx)}{dx} = j(g, x)^{-2}.$$

Le groupe G est le groupe des automorphismes holomorphes de $\mathbf{D}_1$.

Lemme. *Soit Γ un sous-groupe discret de G . Pour tout entier $m \geq 4$, la série*

$$(34) \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} |j(\gamma, x)|^{-m}$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{D}_1$.

Avant la démonstration, deux rappels sont de mise.

Premier rappel. Soit f une fonction holomorphe définie dans un ouvert de $\mathbf{C}$. La coordonnée de $\mathbf{C}$ s’écrit $x = s + it$, avec $s, t \in \mathbf{R}$. Vue comme application entre ouverts de $\mathbf{R}^2$, la fonction $f = u + iv$ a un jacobien qui vaut

$$\text{Jac}(f) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = \left| \frac{df}{dx} \right|^2.$$

C'est une conséquence immédiate des équations de Cauchy-Riemann.

Second rappel. Soit $\mathcal{U}$ un domaine de $\mathbf{C}$ et f une fonction holomorphe dans $\mathcal{U}$. La fonction $|f|^2 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R}_+$ est SOUS-HARMONIQUE, puisque

$$\Delta|f|^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) |f|^2 = 4 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} f \bar{f} = \frac{df}{dx} \overline{\left(\frac{df}{dx} \right)} \geq 0.$$

Soient $a \in \mathcal{U}$ et $R > 0$ tels que le disque $D_a(R)$ de centre a et de rayon R soit contenu dans $\mathcal{U}$; par sous-harmonicité [Rudi-66, chap. 17], on a

$$(35) \quad |f|^2(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2(a + re^{i\varphi}) d\varphi \quad \text{pour tout } r \in [0, R].$$

Par suite

$$(36) \quad \begin{aligned} \int_{D_a(R)} |f|^2(x) ds dt &= \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} |f|^2(a + re^{i\varphi}) d\varphi \geq \\ &\geq \frac{R^2}{2} 2\pi |f|^2(a) = \pi R^2 |f|^2(a). \end{aligned}$$

(Plus généralement, $|f|^p$ est sous-harmonique pour tout nombre réel $p > 0$; de même, si $f \not\equiv 0$, alors $\log |f|$ est sous-harmonique.)

Démonstration du lemme. Il suffit de montrer le lemme pour $m = 4$.

Soit K un sous-ensemble compact de $\mathbf{D}_1$. Soit R un rayon, $0 < R < 1$, tel que K soit contenu dans le disque L de centre 0 et de rayon R ; on note que $L \subset \mathbf{D}_1$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on pose

$$M_\gamma = \sup_{x \in L} \left| \frac{d(\gamma x)}{dx} \right|^2 = \sup_{x \in L} |j(\gamma, x)|^{-4}.$$

Notons $\text{aire}_e(S) = \int_S ds dt$ l'aire euclidienne d'une partie mesurable S de $\mathbf{D}_1$.

Comme l'action de Γ sur $\mathbf{D}_1$ est propre, l'ensemble

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(L) \cap L \neq \emptyset\}$$

est fini; notons N_R le nombre de ses éléments. D'une part, comme tout point de $\mathbf{D}_1$ est recouvert par au plus N_R images $\gamma(L)$, on a

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \text{aire}_e(\gamma(L)) \leq N_R \text{aire}_e(\mathbf{D}_1) < \infty.$$

D'autre part, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} \text{aire}_e(\gamma(L)) &= \int_{\gamma(L)} ds dt = \int_L \left| \frac{d(\gamma x)}{dx} \right|^2 ds dt \\ &= \int_L |j(\gamma, x)|^{-4} ds dt \geq \pi R^2 M_\gamma, \end{aligned}$$

vu le “rappel sous-harmonique” ci-dessus.

Par suite, pour tout $x \in L$ (et a posteriori pour tout $x \in K$) :

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |j(\gamma, x)|^{-4} \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma \leq \frac{1}{\pi R^2} \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{aire}_e(\gamma(L)) \leq N_R \text{aire}_e(\mathbf{D}_1),$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Proposition. *On considère un sous-groupe discret Γ de G , un entier $m \geq 4$, et une fonction holomorphe bornée f sur $\mathbf{D}_1$. La SÉRIE DE POINCARÉ*

$$(37) \quad \Theta_f(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} j(\gamma, x)^{-m} f(\gamma x)$$

définit une fonction sur $\mathbf{D}_1$ qui est une FORME AUTOMORPHE DE POIDS m au sens suivant :

- (1) *c'est une fonction holomorphe,*
- (2) *$\Theta_f(\gamma x) = j(\gamma, x)^m \Theta_f(x)$ pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $x \in \mathbf{D}_1$.*

Notes. Les séries de Poincaré apparaissent dans [Poin–81a]. Aujourd'hui, la “définition” ci-dessus de forme automorphe n'est réglementaire que pour un groupe Γ tel que $\Gamma \backslash G$ soit compact. Par exemple, quand le quotient $\Gamma \backslash \mathbf{D}_1$ est de volume fini avec des pointes, il faut encore ajouter des conditions de croissance appropriées lorsque x tend vers une pointe.

Chez Poincaré, la situation est plus générale que supposé dans la proposition : f est une fonction rationnelle sans pôles sur le bord de $\mathbf{D}_1$ [Poin–82a, équation (4) du § 1].

J'aimerais mieux comprendre la relation entre les séries de la forme (37) et les séries du même nom qui interviennent par exemple dans [Sull–79], du type $P_s(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-s d_h(x, \gamma y))$, où $x, y \in \mathbf{D}_1$ et $s > 0$ (et s assez grand pour que la série converge) ; le suffixe h indique que d_h est une distance hyperbolique. ?????

Démonstration. (1) Le lemme précédent montre que la série de fonctions holomorphes définie par (37) converge uniformément sur tout compact. Il en résulte qu'elle définit une fonction holomorphe.

(2) Pour $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ et $x \in \mathbf{D}_1$, la relation

$$\begin{aligned}\Theta_f(\gamma x) &= \sum_{\gamma' \in \Gamma} j(\gamma', \gamma x)^{-m} f(\gamma' \gamma x) \\ &= j(\gamma, x)^m \sum_{\gamma' \in \Gamma} j(\gamma' \gamma, x)^{-m} f(\gamma' \gamma x) = j(\gamma, x)^m \Theta_f(x).\end{aligned}$$

résulte de l'identité de cocycle $j(\gamma' \gamma, x) = j(\gamma', \gamma x) j(\gamma, x)$. $\square$

Il se peut que Θ_f soit nulle [Poin–82b, pages 249–254], mais ce n'est pas le cas en général. Par exemple, pour $f \equiv 1$ et m assez grand, la fonction Θ_f n'est pas identiquement nulle, et possède le cercle unité comme frontière naturelle [Sieg–71, Chap. 3]. Le quotient de deux formes automorphes de même poids est alors une FONCTION AUTOMORPHE pour Γ , c'est à dire une fonction méromorphe φ sur $\mathbf{D}_1$ telle que $\varphi(\gamma x) = \varphi(x)$ pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $x \in \mathbf{D}_1$. L'ensemble des fonctions automorphes pour Γ , qui est aussi le corps des fonctions méromorphes sur $\Gamma \backslash \mathbf{D}_1$, est engendré par deux fonctions φ_1, φ_2 vérifiant une relation algébrique, de la forme $P(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, où P est un polynôme à deux variables; en fait, ce corps est une extension de degré fini d'une extension transcendante pure $\mathbf{C}(\varphi)$ de degré 1 de $\mathbf{C}$.

Poincaré appelle FONCTIONS THÊTAFUCHSIENNES les fonctions holomorphes de la forme (37). Les fonctions méromorphes quotients de deux fonctions thêtafuchsiennes de même poids sont des FONCTIONS FUCHSIENNES, c'est-à-dire des fonctions automorphes pour Γ .

5.3. Troisième exemple de solution du problème d'inversion 2.7. (Les deux premiers exemples sont ceux de 4.2 et 4.4.)

En résumé, soient Γ un sous-groupe discret du groupe G des transformations holomorphes de $\mathbf{D}_1$ et φ une fonction fuchsienne pour Γ . Alors la fonction uniforme φ est l'inverse du quotient multiforme w de deux solutions linéairement indépendantes, voir (12), de l'équation différentielle (13).

Il y a de nombreux exemples de ce type! Ainsi, on peut montrer que la variété des sous-groupes Γ isomorphes au groupe fondamental d'une surface de genre g , avec $g \geq 2$, est homéomorphe à un disque de dimension $6g - 6$.

5.4. Extrait de la note du 21 février 1881. A titre d'échantillon des premières publications de Poincaré, voici le début de la deuxième [Poin–81b] de ses douze notes de 1881 aux Comptes Rendus [Poin–etc]. On y reconnaît les équations correspondant aux groupes fuchsien triangulaires.

« Le quotient de deux fonctions thétafuchsiennes correspondant à un même groupe fuchsien et à une même valeur du nombre entier m est une fonction $F(z)$ uniforme en z , telle que

$$F(zK_i) = F(z).$$

C'est donc une fonction fuchsienne, d'après la définition donnée dans la Note précédente. En d'autres termes, on a identiquement, pour une infinité de valeurs des constantes a, b, c, d ,

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = F(z).$$

Je démontre deux théorèmes :

Toute fonction fuchsienne $V(z)$ permet d'intégrer une équation linéaire à coefficients algébriques de la manière suivante. Si on pose

$$x = F(z), \quad y_1 = \sqrt{\frac{dF}{dz}}, \quad y_2 = z\sqrt{\frac{dF}{dz}},$$

alors y_1 et y_2 satisfont à l'équation différentielle¹²

$$\frac{d^2y}{dz^2} = y\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant algébrique en x .

Soit, en particulier, l'équation¹³

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y \left[\frac{\frac{1}{\alpha^2} - 1}{4x^2} + \frac{\frac{1}{\beta^2} - 1}{4(x-1)^2} + \frac{1 + \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}}{4x(x-1)} \right]$$

où α, β, γ sont des nombres entiers positifs finis ou infinis, et tels que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} < 1$. Si z est le rapport des intégrales, on a

$$x = f(z),$$

$f(z)$ étant une fonction fuchsienne relative au groupe (α, β, γ) .

12. Voir [Gerv-10, page 266], ainsi que (12) et (13) ci-dessus. A noter toutefois : on a $u_1 = \frac{w}{\sqrt{\frac{dw}{dx}}}$ et $u_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{dw}{dx}}}$ dans (12), et $y_1 = \sqrt{\frac{dx}{dw}}$ et $y_2 = x\sqrt{\frac{dx}{dw}}$ dans [Poin-81b] (traduit en nos notations). Les fonctions y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(\dots) y$$

apparaissant dans [Poin-82b], autant que je comprenne avec des erreurs quand Poincaré explicite φ (erreurs différentes aux pages 229 et 255). Voir les formules (9) et (13) ci-dessus.

13. C'est notre équation (31). Par ailleurs, le z de Poincaré est noté w dans notre texte.

Elle n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental, et peut être regardée comme le quotient de deux fonctions thétafuchsiennes

$$\frac{\left(\frac{df}{dz}\right)^m}{[f(z)]^p [f(z) - 1]^q}, \quad \frac{\left(\frac{df}{dz}\right)^m f(z)}{[f(z)]^p [f(z) - 1]^q};$$

m, p et q sont des nombres entiers qui satisfont aux inégalités, toujours compatibles,

$$1 - \frac{p}{m} \geq \frac{1}{\alpha}, \quad 1 - \frac{q}{m} \leq \frac{1}{\beta}, \quad \frac{p+q-2}{m} - 1 \geq \frac{1}{\gamma}.$$

Ces deux fonctions, qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental, sont holomorphes à l'intérieur de ce cercle. »

6. Suite et certainement pas fin

Poincaré n'étant pas du genre à limiter son intérêt aux équations de la forme (1), il considère assez vite [Poin-82'] des équations plus générales

$$(38) \quad (E) \quad \frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x, y) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x, y) u = 0.$$

Ce sont des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre n , à coefficients algébriques. Ce dernier terme signifie que les coefficients a_i sont des fractions rationnelles en deux variables x, y , liées par l'équation d'une courbe

$$(39) \quad (C) \quad P(x, y) = 0,$$

où P est un polynôme en deux variables à coefficients complexes, tel que la courbe (C) est lisse (sinon, on la désingulariserait à l'aide d'éclatements). De plus, on suppose l'équation FUCHSIENNE au sens où, pour $i = 1, \dots, n$, la fonction méromorphe $a_i : C \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ n'a que des pôles d'ordres au plus i . Dans ce cas, on peut monter l'équivalence de conditions analogues à celles du théorème de Fuchs (no 3.3 ci-dessus).¹⁴

Si j'ai bien compris mes sources (dont des messages d'Etienne Ghys, que je remercie), voici quelques indications sur la suite de la démarche de Poincaré.

Repérer où. Article de 1882 ?

Dans un premier temps, il montre que, la courbe (C) est le quo-

14. Dans la littérature, les exemples sont bien cachés. Le premier que j'ai trouvé, dans [Fors-02, page 483], est l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\alpha}{(ax + vy + c)^2} u = 0 \quad \text{où} \quad x^2 + y^2 = 1,$$

pour laquelle (C) est une courbe de genre 0.

tient du disque $\mathbf{D}_1$ par un groupe fuchsien. (A prendre *cum grano salis* lorsque le genre de (C) est 0 ou 1.) Donc, x et y peuvent s'exprimer chacun comme fonction fuchsienne d'une variable z qui est maintenant dans le disque¹⁵. Et Poincaré explique comment calculer z par des séries ; en particulier, il insiste beaucoup sur le calcul numérique de z . Pour l'instant, l'équation différentielle (E) n'a joué qu'un rôle très mineur, il ne s'est agi essentiellement que de la courbe (C) , ou plus précisément que du complémentaire $\mathcal{U}$ dans (C) d'un ensemble fini de points singuliers.

Dans un second temps, Poincaré regarde l'équation (E) dans la variable z , autrement dit dans le disque qui est le revêtement universel de l'ouvert $\mathcal{U}$. La nouvelle équation n'a plus de point singulier. Comme le disque est simplement connexe, il n'y a plus de monodromie pour les solutions, qui sont donc des fonctions holomorphes dans ce disque. Un système fondamental de solutions est donc une fonction holomorphe F du disque vers $\mathbf{C}^n$. Bien sûr, on a une équivariance, du genre $F(\gamma.z) = R(\gamma)F(z)$ où $R : \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ est la monodromie de (E) et $\gamma.z$ l'action du groupe fuchsien Γ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$.

Poincaré invente ensuite les FONCTIONS ZÊTAFUCHSIENNES, qui sont le sujet principal du cinquième article de Poincaré aux *Acta*, et qui lui permettent, à partir de Γ et de R , de reconstruire F comme une série. Comme j'en ai déjà écrit bien plus que je n'en comprends, je termine par :

6.1. Extrait de la note du 8 août 1881. Dans [Poin–81c], Poincaré écrit :

« On en conclut :

1^o Que toute équation différentielle linéaire à coefficients algébriques s'intègre par les fonctions zétafuchsiennes ;

2^o Que les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'une variable auxiliaire. »

Notes

(1) Texte du rapport de Darboux sur la thèse de Poincaré, lu dans [Ghys–10] : “L’auteur a donné au début de la deuxième partie un théorème très intéressant qui, sans donner la solution complète du problème proposé, constitue un progrès remarquable. Quelques lemmes de l’introduction m’ont paru dignes d’intérêt. Le reste de la thèse est confus, et prouve que l’auteur n’a pu encore parvenir à exprimer ses

15. Analogie en genre 0 : si $x^2 + y^2 = 1$, alors $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y = \frac{2t}{1+t^2}$, avec $t \in \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$.

idées d'une manière claire et simple. Comme d'ailleurs la thèse a été renvoyée souvent à son auteur, les points fondamentaux signalés plus haut étant d'ailleurs établis d'une manière satisfaisante, je propose l'admission."

(2) Voici *l'annonce du Grand Prix*, telle que parue en [Acad-79] :

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Question proposée pour l'année 1880.

L'Académie propose, pour sujet d'un grand prix de Sciences mathématiques à décerner en 1880, la question suivante :

"Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante."

Le prix consistera en une médaille de la valeur de trois mille francs.

Les Mémoires devront être remis au Secrétariat avant le 1^{er} juin 1880 ; ils porteront une épigraphe ou devise répétée dans un billet cacheté qui contiendra le nom de l'auteur.

Poincaré choisira la devise de sa ville natale de Nancy : *Non inultus premor* (Nul ne s'y frotte).

(3) Dans [Poin-80], Poincaré n'est pas tendre pour Fuchs. On lit page 62 : "Or la démonstration de *M. Fuchs* ne s'applique pas à de pareils points." Page 63 : "*M. Fuchs* n'a examiné que les deux premières conditions ; il reste à examiner les deux autres." Page 67 : "L'exemple qui précède fait voir que dans certains cas le théorème de *M. Fuchs* est exact, ...". Page 76 : "Donc il existe des cas où le théorème de *M. Fuchs* est faux bien que les conditions posées par ce géomètre soient remplies".

(4) La *géométrie hyperbolique* apparaît dans des publications de Lobatchevski (1829) et J. Bolyai (1832), ainsi que dans des articles et lettres privées de Gauss. Pourtant : "For the first forty years or so of its history, the field of non-euclidean geometry existed in a kind of limbo, divorced from the rest of mathematics, and without any firm foundation" [Miln-82]. Il y a bien quelques contributions de Cayley, Riemann, Beltrami, Klein, et d'autres, mais il faut attendre Poincaré pour identifier à $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ le groupe des isométries préservant l'orientation de $\mathbf{H}^2$, à $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ le groupe correspondant pour $\mathbf{H}^3$, et surtout pour montrer que la géométrie hyperbolique est un sujet sérieux, le critère étant qu'il apparaît naturellement dans les mathématiques respectables (en analyse complexe).

Citons ici Poincaré [Poin-01, page 45], évoquant une difficulté qui "m'aurait peut-être arrêté longtemps sans l'aide que j'ai trouvée dans

une théorie fort différente : je veux parler de la Géométrie non euclidienne. Cette Géométrie, fondée sur l'hypothèse que la somme des angles d'un triangle est plus petite que deux droits, ne semble d'abord qu'un simple jeu de l'esprit qui n'a d'intérêt que pour le philosophe, sans pouvoir être d'aucune utilité au mathématicien. Il n'en est rien ; les théorèmes de la géométrie de LOWATSCHESKI sont aussi vrais que ceux de la géométrie d'Euclide, à la condition qu'on les interprète comme ils doivent l'être. Ainsi, par exemple, ces théorèmes ne sont pas vrais de la ligne droite, telle que nous la concevons, mais ils le deviennent si, partout où LOWATSCHESKI dit une droite, nous disons un cercle qui coupe orthogonalement le cercle fondamental. Je me trouvais donc en présence de toute une théorie, imaginée, il est vrai, dans un but métaphysique, mais dont chaque proposition, convenablement interprétée, me fournissait un théorème applicable à la Géométrie ordinaire. Il se trouva qu'en combinant tous ces théorèmes, j'obtins aisément la solution de la difficulté dont j'ai parlé plus haut."

(5) A propos des *lacunes dans la culture mathématique de Poincaré à ses débuts*, voici comment Klein termine sa lettre du 2 juillet 1881 à Poincaré [PoKl-81, pages 106–109] :

"Haben Sie RIEMANN, die betr. Entwicklungen, nicht gelesen ? Und ist Ihnen die ganze Diskussion, welche BRILL und NÖTHER im 7. Bande der Math. Annalen pap. 300–307 zum Abschluss bringen, unbekannt ?

In der Hoffnung, bald wieder von Ihnen zu hören, bin ich Ihr hochachtungsvoll ergebener F. Klein."

Et une autre citation, de [Poin-01, page 45] :

"Pour arriver à ce résultat, il eût été possible, dans certains cas particuliers, d'appliquer la proposition connue sous le nom de *principe de Dirichlet*, si souvent appliquée par RIEMANN et démontrée plus récemment par M. SCHWARZ. Je ne connaissais pas ce principe à cette époque (...)"

RÉFÉRENCES

- [Poin-79] Henri POINCARÉ, *Première thèse. Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles*, soutenue le 1er août 1879, publiée in [Poin-OI, pages xlix–cxxix].
- [Acad-79] Programme des prix proposés par l'Académie des Sciences, *Grand prix des sciences mathématiques*, CR¹⁶ **88** (1879), 511.
- [Poin-80] *Extrait d'un mémoire inédit de Henri Poincaré*, Acta math. **39** (1923), 58–93, [Poin-OI, 336–373]. Il s'agit d'une partie du mémoire soumis par Poincaré à l'Académie en 1880.

16. CR = Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.

- [Acad-81] Rapport de l'Académie des Sciences sur les prix décernés, *Grand prix des sciences mathématiques (prix du budget)*, CR **92** (14 mars 1881), 551–554 [Poin-OII, pages 71–74].
- [PoFu-80] *Lettres d'Henri Poincaré à L. Fuchs*, Acta **38**, (1921), 175–184. Lettres des 29 mai, 12 juin, 19 juin, 30 juillet 1880 et 20 mars 1881.
Briefe von L. Fuchs an H. Poincaré, Acta **38**, (1921), 185–187. Lettres des 5 juin et 16 juin 1880.
- [PoKl-81] *Correspondance d'Henri Poincaré et de Felix Klein*, Acta **39** (1923), 94–132. Lettres des 12, 15, 19, 22, 25, 27 juin¹⁷, 2, 5, 9 juillet, 4, 8, 10, 17 décembre 1881, etc., dernière des 26 lettres le 22 septembre 1882. Reproduction des lettres de Poincaré et traduction des lettres de Klein dans [Gerv-10, 455–491].
- [Poin-81a] *Sur les fonctions fuchsiennes*, CR **92** (14 février 1881), 333–335, [Poin-OII, 1–4].
- [Poin-81b] *Sur les fonctions fuchsiennes*, CR **92** (21 février 1881), 395–398 [Poin-OII, 5–7].
- [Poin-81c] *Sur les fonctions fuchsiennes*, CR **93** (8 août 1881), 301–303 [Poin-OII, 29–31].
- [Poin-etc] Il y a DOUZE notes de Poincaré aux CR en 1881 reproduites dans [Poin-OII, pages 1–34], reçues par l'Académie les 14 et 21 février, 14 et 18 avril (deux le 18!), 23 et 30 mai, 27 juin, 11 et 18 juillet, 8 août, et 17 octobre.
 Cette liste n'est même pas exhaustive ! voir cinq autres notes de 1881 : CR **92** (1881), 698–701, 777–779, 913–915 et 1335–1336, ainsi que CR **93** (1881), 951–952.
 Il n'y aura “que” douze notes en 1882, treize en 1883, neuf en 1884, ... voir la liste de [Poin-01].
- [Poin-82'] *Sur les fonctions fuchsiennes*, CR **94** (10 avril 1882), 1038–1040 [Poin-OII, 41–43].
- [Poin-82] *Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires*, Math. Ann. **19** (1882), 553–564 (voir aussi 20 (1882), 52–53) [Poin-OII, 92–105 et 106–107].
- [Poin-82a] *Théorie des groupes fuchsien*s, Acta **1** (1882), 1–62 [Poin-OII, 108–168]. Article achevé en juillet 1882 et imprimé en septembre [GBio-13, page 240].
- [Poin-82b] *Sur les fonctions fuchsiennes*, Acta **1** (1882), 193–294 [Poin-OII, 169–257]. Article achevé fin octobre et publié fin novembre [GBio-13].
- [Poin-83] *Mémoire sur les groupes kleinéens*, Acta **3** (1983), 49–92 [Poin-OII, 258–299].
- [Poin-84a] *Sur les groupes des équations linéaires*, Acta **4** (1984), 201–311 [Poin-OII, 300–401].

17. Note d'admiration pour l'efficacité du service postal de l'époque entre Leipzig et Caen : neuf lettres entre le 12 juin et le 9 juillet !

- [Poin-84b] *Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes*, Acta **5** (1984), 209–278 [Poin-OII, 402–462].
- [Poin-01] *Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même*, texte rédigé en 1901 à la demande de Mittag-Leffler, Acta **38** (1921), 3–135. Première partie in [Poin-OI, I–XXXI].
Note : ce no **38** des Acta, de 1921, suit le no **37**, de 1914.
- [Poin-08] *Science et Méthode*, Flammarion, 1908.
- [Poin-OI] Henri POINCARÉ, *Oeuvres I*, Équations différentielles, Gauthier-Villars, 1928.
- [Poin-OII] Henri POINCARÉ, *Oeuvres II*, Fonctions fuchsiennes, Gauthier-Villars, 1916.
- [Poin-OV] Henri POINCARÉ, *Oeuvres V*, Algèbre, arithmétique, fonctions automorphes, Gauthier-Villars, 1950.

* * * * *

- [BiRo-78] Garrett BIRKHOFF and Gian-Carlo ROTA, *Ordinary differential equations*, third edition, John Wiley & Sons, 1978.
- [Cart-54] SÉMINAIRE HENRI CARTAN, 1953/54, *Fonctions automorphes et espaces analytiques*, Benjamin, 1967.
- [Dieu-82] Jean DIEUDONNÉ, *La découverte des fonctions fuchsiennes*, in “Mathematics today” (Luxembourg, 1981), Gauthier-Villars (1982), 3–23.
- [Fors-02] Andrew Russell FORSYTH, *Theory of differential equations, Part III, Ordinary linear equations, Vol. IV*, Cambridge Univ. Press, 1902.
- [Frob-73] FROBENIUS, *Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen*. J. reine angew. Math. **76** (1873), 314–235.
- [Fuch-80] Lazarus FUCHS, *Ueber eine Klasse von Functionen mehrerer Variablen, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen*, J. reine angew. Math. **89** (1880), 151–169. *Gesammelte Werke*, 191–212.
- [Ghys-10] Etienne GHYS, *Les maths ne sont qu’une histoire de groupes – H. Poincaré 1881*, Conférence Clay,
http://www.youtube.com/watch?v=dLwi_opxLxs
- [GLDE-00] Jeremy GRAY, *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré*, Second Edition, Birkhäuser, 2000.
- [GBio-13] Jeremy GRAY, *Henri Poincaré, a scientific biography*, Princeton Univ. Press, 2013.
- [Gray-13] Jeremy GRAY *Revêtements et monodromie de Riemann à Poincaré*, conférence à l’Institut Henri Poincaré, 13 août 2014,
<http://www.youtube.com/watch?v=41e1V1IKQ84>
- [Gerv-10] Henri Paul DE SAINT-GERVAIS, *Uniformisation des surfaces de Riemann, retour sur un théorème centenaire*, ENS éditions, 2010.

- [Halp-84] Georges HALPHEN, *Sur la réduction des équations linéaires aux formes intégrables*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France **28** (1884), 1–301.
- [Hill-76] Einar HILLE, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley, 1976.
- [Houz-78] Christian HOUZEL, *Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes*, Chapitre VII in *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700–1900*, Volume II, Hermann, 1978.
- [Mask-71] Bernard MASKIT, *On Poincaré's theorem for fundamental polygons*, Advances in Math. **7** (1971), 219–230.
- [Miln-82] John MILNOR, *Hyperbolic geometry : the first 150 years*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 9–24.
- [Neha-52] Zeev NEHARI, *Conformal mapping*, Dover, 1975 [première édition, McGraw-Hill, 1952].
- [Rham-71] Georges DE RHAM, *Sur les polygones générateurs de groupes fuchsien*, L'Ens. Math. **17** (1971), 49–61 [Oeuvres mathématiques 610–622].
- [Riem-57] Bernhard RIEMANN, *Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen*, Göttingen, 1857, [Gesammelte Werke, édition de 1990, pages 67–83.]
- [Rudi-66] Walter RUDIN, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1966.
- [SaZy-65] Stanisław SAKS and Antoni ZYGMUND, *Analytic functions*, second edition enlarged, PWN, 1965.
- [Sieg-71] Carl Ludwig SIEGEL, *Topics in complex function theory, Vol. II, automorphic functions and abelian integrals*, Wiley-Interscience, 1971.
- [Sull-79] Dennis SULLIVAN, *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions*, Publ. Math. IHÉS **50** (1979), 171–202.
- [WhWa-69] Edmund Taylor WHITTAKER et George Neville WATSON, *A course of modern analysis*, fourth edition. Cambridge Univ. Press, 1927, reprinted, 1969 (première édition 1902, par Whittaker seul).
- [Yosh-87] Masaaki YOSHIDA, *Fuchsian differential equations*, Vieweg, 1987,