Chers Dudes,

Littré le dit, qui ne se trompe jamais: tout vient à poil pour qui sait attendre. Larousse, lui, tergiverse et ergote à n'en plus finir; quant au Petit Robert, il a intérêt à pas ramener sa fraise si y veut pas se faire dessouder par le Grand Roger, camionneur pointilleux.

Ceci étant dit, et sans vouloir vexer quiconque, Poulpor seminar strikes back with a vengence. Le prochain exposé sera présenté par le sieur MATHIEU BAILLIF (assisté de Georges aux lumières et 12 dinosaures à la sono); le titre en sera:

ÜBER ZWEI-KRAFT-n.

Date: Mercredi 17 mars 1999
Heure: 17h15
Lieu: Salle 17
Tenue du conférencier: Martial

Rahan (fils de Crao) s'abstenir.
Bertrand Dubout bienvenu.

Avec possible participation de Lennox Lewis (de mauvais poil).

M. Baillif (fils de Goa)
D. Cimasoni (fils de Metafont)

"Je fus volé au coin d'un bois."

L.L.

ÜBER 2^n

MATHIEU "ZAKAR" BAILLIF

Abstract

Il s'agit d'étudier les premiers 'digits' de la suite 2^n. Ça peut servir en soirée.

Observons la suite 2^n, et plus spécialement le premier digit (à gauche) de celle-ci :

$$\begin{array}{llllllllll} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & 512 \\ 1024 & 2056 & 4112 & 8224 & 16448\ldots \end{array}$$

On remarque de manière empirique que '1' semble apparaître plus souvent que les autres chiffres comme premier digit. On peut alors se demander si cela est effectivement vrai, et s'il est possible de connaître pour chaque chiffre $i \in \{1, \ldots, 9\}$ la proportion asymptotique de i comme premier digit de la suite 2^n :

$$P(i) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \# D_i \tag{1}$$
$$\text{où } D_i = \{m \leq n \mid i \text{ est le premier digit de } 2^m\}$$

Pour cela, on va passer par une théorie qui a priori n'a rien à voir, la *théorie des mesures ergodiques*. Commençons donc par quelques définitions.
Soit $(X, \mathcal{B}, m)$ un espace de probabilité (X est un ensemble, $\mathcal{B}$ une σ-algèbre, et m une mesure de probabilité définie sur les éléments de $\mathcal{B}$). Soit $f : X \to X$ une fonction mesurable (donc, telle que si $E \in \mathcal{B}$, alors $f^{-1}E \in \mathcal{B}$).

DÉFINITION 1. *On dit que m est f-invariante si pour tout E mesurable, $m(f^{-1}E) = m(E)$. On dit que m est f-ergodique si elle est f-invariante et que pour tout E mesurable, $f^{-1}E = E$ implique $m(E) = 0$ ou $m(E) = 1$.*

Autrement dit, si m est f-ergodique, on ne peut pas couper X en sous-systèmes non triviaux (pour la mesure m) sur lesquels f agit 'séparément'.

EXEMPLES.

• *Si* x *est un point fixe de* f *(c.-à-.d.* $f(x)=x$*), alors le delta de Dirac au point* x δ_x *est une mesure* f*-ergodique.*

• *Si* $X=\mathbb{S}^1$ *(le cercle), et* f *est une rotation d'angle* θ *avec* $\frac{\theta}{2\pi}$ *rationnel, alors il est facile de voir que la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{S}^1$ *est* f*-invariante, mais pas* f*-ergodique : comme* $\frac{\theta}{2\pi}=\frac{p}{q}$*, alors* $f^q(=f\circ\cdots\circ f$ *q fois) est l'identité. Si on prend un sous-intervalle* A *de* $\mathbb{S}^1$ *assez petit, alors* $E=\cup_{i\geq 0}f^i(A)\neq\mathbb{S}^1$*, et pourtant* $m(E)>0$ *et* $f^{-1}E=E$*.*

Par contre, on a :

PROPOSITION 2. *La mesure de Lebesgue* λ *sur* $\mathbb{S}^1$ *est* f*-ergodique si* f *est une rotation d'angle* θ *avec* $\frac{\theta}{2\pi}$ *irrationnel.*

Vague preuve : Il est clair que λ est f-invariante. Pour l'ergodicité, on voit que la proposition doit être vraie en la vérifiant pour unions finies d'intervalles : comme la rotation est irrationnelle, une telle union n'est jamais envoyée sur elle-même par f^{-1}, sauf si cette union recouvre en fait $\mathbb{S}^1$ tout entier. □

On peut lire la preuve complète de cette proposition (ainsi que celle du théorème ci-dessous) dans [1].
L'intérêt des mesures ergodiques (dans notre cas) est le théorème suivant, dû à BIRKHOFF en 1931 :

THÉORÈME.
Soit $(X,\mathcal{B},m)$ *un espace de probabilités,* $f:X\to X$ *tq* m *soit* f*-ergodique. Alors, pour toute fonction* H *dans* $L^1(X,dm)$*, pour* m*-presque tout* $x\in X$*,*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}H(f^i(x))\underset{n\to\infty}{\to}\int_X Hdm \tag{2}$$

Autrement dit, f 'mélange assez' les points pour que la la partie gauche de (2) soit une somme de Riemann pour l'intégrale. En prenant comme H la fonction caractéristique χ_E d'un ensemble mesurable E, la formule (2) donne en fait :

$$\frac{1}{n}\cdot\#\{0\leq j\leq n\mid f^j(x)\in E\}\underset{n\to\infty}{\to}m(E) \tag{3}$$

Avant de nous attaquer au problème des puissances de 2, faisons un petit lemme facile et bon pour la confiance.

LEMME 3 **(dû semble-t-il à** BOREL**)**. *Pour Lebesgue-presque tout* $x\in[0,1]$*, en écrivant* x *en base 10 :* $x=0.a_1a_2a_3\ldots$ *on a*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\#\{j\leq n\mid a_j=k\}=\frac{1}{10}$$

pour $k=0,1,2,\ldots,9$*.*

Preuve : On considère la fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ $x \mapsto 10x (\text{mod } 1)$. On vérifie ensuite facilement (hum) que la mesure de Lebesgue est f-ergodique. Si on considère les intervalles $E_k = [\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}]$, on a $a_i = k \Leftrightarrow f^{i-1}(x) \in E_k$ (on néglige les problèmes au bord des intervalles). La formule (3) nous donne alors le résultat. $\square$

REMARQUE 4. *Si on se donne un $x \in [0,1]$ (par exemple $x = \sqrt{2}$), le lemme ci-dessus ne nous dit absolument rien sur ce x particulier. On n'a aucun moyen de vérifier si tel x est membre de l'ensemble de mesure pleine donné par le lemme.*

Attaquons maintenenant le problème qui nous occupe. Le premier digit de 2^n est $i \in \{1, \dots, 9\}$ si et seulement si il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$i \cdot 10^k \leq 2^n < (i+1) \cdot 10^k \tag{4}$$

En prenant le logarithme en base 10 de (4), on tombe sur

$$\log_{10}(i) \leq n \cdot \log_{10}(2) - k < \log_{10}(i+1) \tag{5}$$

Comme $0 \leq \log_{10}(i) < \log_{10}(i+1) \leq 1$, on a donc que k est la partie entière de $n \cdot \log_{10}(2)$. Donc, l'équation (5) est équivalente à celle-ci :

$$f^n(0) \in \big[\log_{10}(i), \log_{10}(i+1)\big) = E_i \tag{6}$$

où f est l'application $x \mapsto x + \log_{10}(2)(\text{mod } 1)$ sur l'intervalle $[0,1]$. En fait, si on identifie 0 et 1, f est la rotation d'angle $\theta = \log_{10}(2)$ sur $\mathbb{S}^1$. Le point crucial est que $\log_{10}(2)$ est *irrationnel*, donc par la proposition 2, f est ergodique. On choisit un point x_0 tel que la formule (3) est vraie pour x_0 et E_i. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \cdot \#\{0 \leq j \leq n \mid f^j(x_0) \in E_i\} \underset{n\to\infty}{\to} & \log_{10}(i+1) - \log_{10}(i) \\ &= \log_{10}(1 + \frac{1}{i}) \end{aligned} \tag{7}$$

Pour résoudre le problème, on aimerait avoir $x_0 = 0$. Il suffit pour cela de remplacer f par $\tilde{f} = g^{-1} \circ f \circ g$ où g est la rotation de $\mathbb{S}^1$ qui envoie 0 sur x_0 ($\tilde{f}$ est bien sûr également ergodique).
Donc, par (1), (6) et (7) avec $x_0 = 0$,

$$P(i) = \log_{10}(1 + \frac{1}{i}) \tag{8}$$

On pourrait faire le même raisonnement pour la suite 3^n en base 10 et on obtiendrait le même résultat, car $\log_{10}(3)$ est également irrationnel. Plus généralement, on peut considérer la suite a^n développée en base b, pour autant que $\log_b(a)$ est irrationnel, et on obtiendrait un résultat similaire. Par exemple, la proportion de 2 comme premier digit en base 9 de la suite 7^n est $\log_9(3/2)$.
De même, on pourrait regarder quelle est la fréquence d'un nombre i compris entre 10^k et

$10^{k+1}-1$ au début de la suite 2^n, (on exprime i en base 10 et on le considère comme suite de k digits) et cette fréquence sera donnée par $\log_{10^{k+1}}(1+\frac{1}{i})$.

Note : J'ai piqué ce résultat dans un exposé d'un type nommé ZAQUEU COEHLO, qui l'avait lui-même pris dans je ne sais quel livre, où il apparaît comme exercice élémentaire.

References

[1] P. Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New-York-Berlin, 1982.