Le mercredi 26 mai 1999, DAVID ''METAL'' CIMASONI nous a causé de

ÜBER EULER UND POINCARÉ

sous canicule. Le 27, Assyr et Gavin se font appréhender à la frontière vaudoise par la brigade hydroportée en possession du poulpor mail y afférent. Les cuistres n'ont jamais consenti à restituer l'objet du délire, d'où ce blanc. Honni soient-ils.

ÜBER EULER UND POINCARÉ

DAVID "METAL" CIMASONI

Abstract

Le nombre de sommets S, d'arêtes A et de faces F d'un polyèdre sont (sous certaines conditions) reliés par la formule d'Euler $S - A + F = 2$. On se propose ici de donner un bref historique de la question, et de démontrer cette formule dans l'esprit de Poincaré, i.e: avec ce qu'il faut d'homologie.

Introduction

À force de suivre des cours de maths, on finit par en avoir la vision suivante: cette science se réduit à une suite de théorèmes qui se déduisent de manière purement formelle d'une liste d'axiomes somme toute arbitraires. D'où sont tombés ces axiomes? pourquoi cette théorie? aucune idée. On perd ainsi de vue, évidemment, toute une dimension des maths: à l'origine, il y a des problèmes; on essaie de les résoudre, on hésite, on se trompe, et peu à peu naît la théorie qui répond à la question de départ (et en pose de nouvelles). Ramener les maths à une théorie formelle, pour reprendre l'expression de Lakatos, c'est comme réduire la zoologie à l'étude des animaux morts.

L'exemple de l'homologie est à cet égard tout à fait édifiant. A l'origine, elle fut esquissée par Poincaré vers 1900 pour tenter de prouver (et de généraliser) la formule d'Euler pour les polyèdres:

$$S + A + F = 2.$$

Or, si l'on ouvre un bouquin de topologie algébrique, une théorie homologique y est définie comme la donnée d'une suite infinie de foncteurs covariants de la catégorie des paires d'espaces topologiques dans la catégorie des modules et d'une suite infinie de transformations naturelles de ces foncteurs, satisfaisant les axiomes blablabla. De formule d'Euler, plus de trace; tout juste peut-on la deviner, en corollaire trivial d'un théorème qui fait appel aux 300 pages qui précèdent.

Le but de ce petit papier est d'expliquer que l'homologie, c'est pas ça.

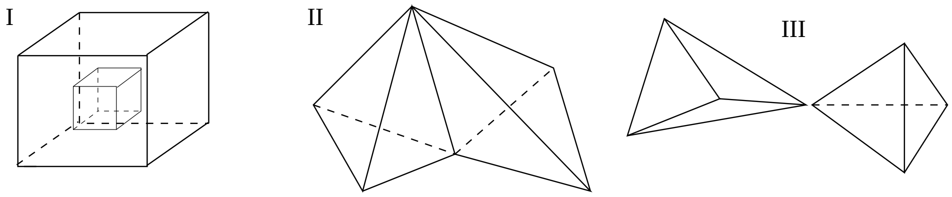

Figure 1: Cavité et structures multiples.

"Preuves et réfutations"

En 1758, Euler énonce une formule reliant le nombre de sommets S, d'arêtes A et de faces F d'un polyèdre quelconque: $S - A + F = 2$. Il en donne même une démonstration. On découvre par la suite que cette preuve comporte des lacunes: elle ne s'avère correcte que pour les polyèdres convexes. Une foule de mathématiciens vont s'intéresser à la question: Legendre, Cauchy, Jordan, Lhuilier, Schläfli, Jonquières, von Staudt et d'autres.

Un premier problème surgit en 1813. Lhuilier, entre deux mises en chanson de propositions d'Euclide sur l'air de *la Bourbonnaise*, tombe sur un cristal de la forme du dessin I (figure 1): pour cet exemple, on a $S - A + F = 4$. Les gens en prennent bonne note, et appellent cela le problème des *cavités*. Une vingtaine d'années plus tard, Hessel propose les deux contre-exemples II et III (figure 1): cette fois, $S - A + F = 3$. On parle de *structures multiples*.

Il est bien clair qu'à ce stade, le véritable problème est de donner une définition correcte de ce qu'est un polyèdre. Pour Euler et Legendre, il s'agit d'un "solide aux faces polygonales". Pour Joncquières, c'est une "surface consistant en un système de polygones". La définition la plus satisfaisante est due à Möbius (1876):

DÉFINITION. *Un polyèdre est une collection finie de polygones telle que*

1. *deux polygones (s'ils se rencontrent) se rencontrent en une arête;*

2. *chaque arête appartient au bord d'exactement deux polygones;*

3. *on peut relier toute paire de polygones par un chemin ne passant pas par les sommets.*

Avec cette définition, aucun des trois contre-exemples considérés ne sont des polyèdres. Cela règle donc le problème des cavités et des structures multiples. Néanmoins, Lhuilier avait un autre contre-exemple à la formule d'Euler: il s'agit du polyèdre dessiné en figure 2, représentant le problème des *tunnels*. Ici, $S - A + F = 0$, et il s'agit bel et bien d'un polyèdre !

Dégouté, Baltzer propose de définir un polyèdre comme un système de polygones tel que $S - A + F = 2$ ...

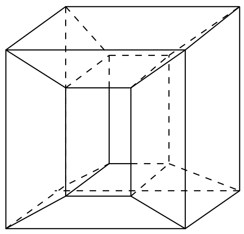

Figure 2: Problème des tunnels.

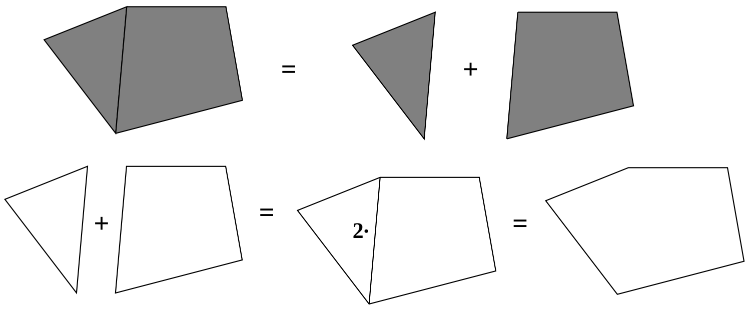

Figure 3: Une 2-chaîne, et son bord.

Poincaré

Poincaré ne fut pas le premier à donner une preuve correcte de la formule d'Euler; de nombreuses preuves combinatoires tout à fait respectables ont vu le jour durant la seconde moitié du XIX^e siècle. Mais c'est sa démonstration qui, en dégageant les principes de ce qu'on appelle l'homologie, a permis de résoudre magistralement ce problème et de le généraliser considérablement.

Fixons un polyèdre P. On dira qu'un sommmet est un 0-*polytope*; de même, on parlera de 1-polytopes à propos des arêtes et de 2-polytopes à propos des faces. Pour tout entier k, notons $C_k(P)$ le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel engendré par les k-polytopes de P; les éléments de $C_k(P)$ sont appelés des *k-chaînes*. Définissons le *bord* d'un k-polytope comme la somme modulo 2 des $(k-1)$-polytopes qui le bordent; en étendant cette application linéairement, on obtient un morphisme $\partial_k\colon C_k(P) \to C_{k-1}(P)$. En figure 3 est dessiné un exemple de 2-chaîne (somme de deux 2-polytopes) suivi de son bord; n'oublions pas que l'on travaille modulo 2.

Au final, on a une suite de $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(P) \xrightarrow{\partial_2} C_1(P) \xrightarrow{\partial_1} C_0(P) \xrightarrow{\partial_0} 0 \longrightarrow \dots$$

On note encore $Z_k(P) = \ker \partial_k$ l'espace des *k-cycles* et $B_k = \operatorname{Im} \partial_{k+1}$ l'espace des *k-bords*.

LEMME. *Pour tout k, $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$,i.e: les bords sont des cycles.*

Preuve : Le lemme est trivialement vrai sauf si $k = 2$. Il suffit donc de vérifier que pour tout 2-polytope (i.e: toute face) σ de P, $\partial_1 \partial_2(\sigma) = 0$. Or, $\partial_2(\sigma)$ est égale à la somme des arêtes bordant σ, et $\partial_1 \partial_2(\sigma)$ va donc compter deux fois chaque sommet de σ; sur $\mathbb{F}_2$, cela donne bien 0 et le lemme est prouvé. □

Par ce lemme, on peut définir:

DÉFINITION. *Le k^e module d'homologie (à coefficients dans $\mathbb{F}_2$) du polyèdre P est le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $H_k(P) = Z_k(P)/B_k(P)$.*

THÉORÈME.
Soit P un polyèdre à S sommets, A arêtes et F faces; supposons que toute boucle formée d'arêtes borde un polygone dans P. Alors, $S - A + F = 2$.

Preuve : On vient de construire une suite de $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow C_2(P) \xrightarrow{\partial_2} C_1(P) \xrightarrow{\partial_1} C_0(P) \longrightarrow 0.$$

Tentons d'analyser le défaut d'exactitude de cette suite, i.e: calculons la dimension des $H_k(P)$.

Clairement, $Z_0(P) = C_0(P)$, espace de dimension S engendré par les sommets. Il découle de la définition d'un polyèdre qu'on peut relier toute paire de sommets par un chemin formé d'arêtes; cela signifie que $B_0(P)$ est le sous-espace de dimension $S - 1$ engendré par les sommes (modulo 2) de deux sommets. Ainsi, $H_0(P)$ est de dimension 1. Par hypothèse, toute boucle formée d'arêtes borde un polygone; cela se traduit par: tout 1-cycle est un 1-bord. En d'autres termes, $H_1(P) = 0$. Pour finir, $H_2(P) = Z_2(P)$, et on déduit facilement de la définition d'un polyèdre qu'il existe un unique 2-cycle sur P: celui donné par la somme de toutes les faces. Ainsi, $H_2(P) = \mathbb{F}_2$.

En rassemblant toutes ces informations, on obtient que

$$0 \to H_2(P) \to C_2(P) \xrightarrow{\partial_2} C_1(P) \xrightarrow{\partial_1} C_0(P) \to H_0(P) \to 0$$

est une suite exacte d'espaces vectoriels. Il ne reste plus qu'à faire appel au lemme bien connu d'algèbre linéaire: la somme alternée des dimensions dans une suite exacte d'espaces vectoriels est nulle. On obtient:

$$\begin{aligned} 0 &= \dim H_2(P) - \dim C_2(P) + \dim C_1(P) - \dim C_0(P) + \dim H_0(P) \\ &= 1 - F + A - S + 1 \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □