Salut les Dudes,

J'en connais qui se croient les meilleurs, mais ça va changer. Le Poulpor Seminar reprend ses droits, et ce dès la semaine prochaine. Pour les nouveaux venus, quelques rappels:

Le séminaire Poulpor rassemble chaque semaine depuis que l'homme est homme (et la femme à la cuisine) la crème de la crème de tout ce que la section de mathématiques compte de gars glauques, mais motivés. C'est simple: il s'agit de présenter pendant une heure un résultat (pas obligatoirement nouveau ou personnel) à la portée de tous, histoire de savoir un peu à quoi les autres passent leur temps dans leur bureau.

Vostre serviteur MATHIEU BAILLIF aura l'honneur et l'avantage d'ouvrir les feux (à coups de schlags) avec un esspossé ayant pour titre:

ÜBER EINE POLYNOMIALISCHE OBERGRENZ IN DER INTERVAL.

Date de l'exposé: mercredi 21 mars 2001
Heure: 17h15
Tenue du conférencier: en rotin
Salle: 17

Tous sont bienvenus.

Mathieu Baillif (paradoxical decomposition)
David Cimasoni (Estefanos Hailemichael)

" Acadabrabra !!! "

B.N.

ÜBER EIN POLYNOMIALEGRTENZ FÜR DEN LAPPENNUMMER

MATHIEU "SIMPLEX" BAILLIF

Abstract

Une façon simple de mesurer la complexité d'une application de l'intervalle est de considérer la croissance de son *nombre de pas* lorsqu'on itère. On montre ici une preuve simple d'une borne polynomiale pour ce nombre dans le cas des applications de l'intervalle continues et monotones par morceaux, sans points périodiques, ce qui devrait nous emplir de joie.

On dit qu'une application f de $[0,1]$ dans lui-même est continue par morceaux et monotone stricte par morceaux (CMSPM) s'il existe un nombre fini de *points critiques* $c_1 < c_2 < \cdots < c_r \in (0,1)$ tels que f soit continue et strictement monotone sur (c_i, c_{i+1}), et sur $(0, c_1)$, $(c_r, 1)$. Notons que si f est CMSPM, alors $f^n = f \circ \cdots \circ f$ (n fois) l'est aussi, avec en général plus de points critiques. On note par $C_f = \{c_i \mid i = 1 \cdots r\}$ l'ensemble des points critiques de f. (Il est sous-entendu que l'on prend un ensemble minimal parmi tous les ensembles critiques possibles.) Notons par $p_f(n)$ le nombre minimal d'intervalles sur lesquels f^n est continue et strictement monotone. Clairement, $p_f(n) = \#C_{f^n} + 1$. On appelle $p_f(n)$ le *nombre de pas* de f^n (en anglais *lap number*, en malgache *Volonioniolanarinananana Lanaria*, et en breton le sujet est tabou). On peut facilement prouver (sauf en breton, donc) que $p_f(n) \leq p_f(1)^n$. Voir les figures 1 et 2.
On dit que x est un point périodique pour f s'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tq $f^n(x) = x$. Les points $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ sont appelés l'orbite de x. On va prouver la proposition suivante :

PROPOSITION 1. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application CMSPM, sans points périodiques. Alors, $p_f(n) \leq cste \cdot n^s$, où $s = \#C_f + 2$ et cste est une constante ne dépendant que de s.*

REMARQUE 2. *Une application de l'intervalle sans points fixes est forcément discontinue. Sinon, c'est que quelque chose ne va pas.*

La démonstration repose sur la *théorie du pétrin* (en anglais *kneading theory*, en volapük *Köntarrkrööst*, et en chti ça ne marche tout simplement pas) due à MILNOR et THURSTON, deux sombres inconnus à peine bardés de médailles Fields.

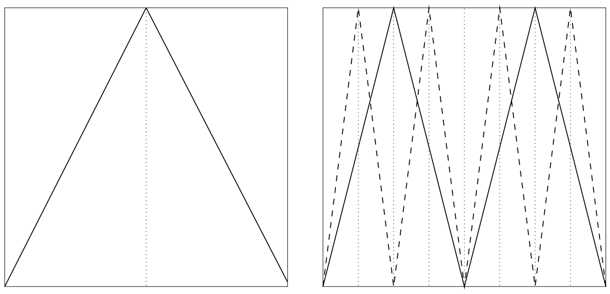

Figure 1: Un exemple de fonction CSMPS (en l'occurence continue) avec un seul point critique, dont le nombre de pas croit exponentiellement. A droite, les deuxièmes et troisièmes itérés. On voit facilement que $p_n(f) = 2^n$.

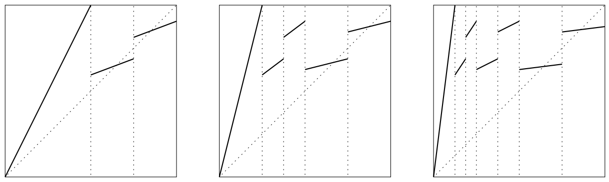

Figure 2: Les trois premiers itérés d'une fonction CSMPM dont le nombre de pas croit linéairement avec l'itération. Cette fonction possède trois points fixes.

Soit donc $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction CMSPM, $c_1, \ldots, c_r$ ses points critiques.

DÉFINITION 3. *Pour $1 \leq k \leq r$ et $i \geq 0$, on définit l'ensemble*

$$E_k^i = \{x \in [0,1] \quad | \quad f^i(x) = c_k, \quad f^j(x) \notin C_f \text{ pour } j < i\}$$

ainsi que les séries formelles

$$P(t) = \sum_{n \geq 0} p_f(n) \cdot t^n \text{ et } \Gamma_k(t) = \sum_{n \geq 0} \# E_k^n \cdot t^n.$$

Nous allons maintenant utiliser la théorie du pétrin (si possible sans nous y foutre) pour étudier $\Gamma_k(t)$.
On définit la fonction ϵ en posant $\epsilon(x) = 0$ si $x \in C_f$, et $\epsilon(x) = \pm 1$ suivant si f est croissante ou décroissante en x. L'*adresse* α d'un point $x \in [0,1]$ est un vecteur dans $\{0, \pm 1\}^r$ défini par $(\alpha(x))_i = sgn(x - c_i)$ (où sgn dénote la fonction signe). Si H est une fonction de l'intervalle, on écrit $H(x+)$ pour $\lim_{y \to x, y > x} H(y)$, et pareil pour $H(x-)$.

DÉFINITION 4. *La coordonnée invariante d'un point $x \in [0,1]$ est le vecteur de séries formelles*

$$\theta_f(x)(t) = \sum_{i \geq 0} t^i \cdot \big(\prod_{k<i} \epsilon(f^k x)\big) \cdot \alpha(f^n x) \tag{1}$$

La matrice de pétrin $K(t)$ est donnée par les lignes

$$K_\ell(t) = \frac{1}{2}[\theta_f(c_\ell+)(t) - \theta_f(c_\ell-)(t)].$$

On a la propriété suivante : si $x \in E_\ell^i$, alors

$$\frac{1}{2}[\theta_f(x+)(t) - \theta_f(x-)(t)] = t^i \cdot K_\ell(t) \tag{2}$$

On peut alors montrer successivement comme dans l'article de MILNOR-THURSTON [3] (qui l'ont fait pour des fonctions continues et avec des définitions légèrement différentes) les égalités

$$\frac{1}{2}[(\theta_f(1-)(t) - \theta_f(0+)(t)] = \sum_{\ell=1}^{r} \Gamma_\ell(t) \cdot K_\ell(t) \tag{3}$$

$$\Gamma_k(t) = \sum_{m=1}^{r} \frac{1}{2}[(\theta_f(1-)(t) - \theta_f(0+)(t))]_m \cdot M_{mk}(t) \tag{4}$$

où $[\cdot]_m$ désigne la m-ième coordonnée, et $M(t) = (M_{ij}(t))$ est la matrice inverse de $K(t)$ (on voit que $K(t)$ a un inverse méromorphe en utilisant la règle de Cramer). Pour (3), on utilise le fait que modulo n, la coordonnée invariante est constante sur les composantes connexes de $[0,1]\backslash(\cup_k \cup_{i\leq n} E_k^i)$, et quelques lignes de calcul fournissent le résultat (et avec le sourire). (4) suit de (3) par un calcul direct.

Il y a un lien évident entre les ensembles E_k^i et les ensembles critiques C_{f^n}. En fait, dans le cas continu, on vérifie facilement que $C_{f^n} = \cup_{k=1}^r \cup_{i\leq n} E_k^i$ (les points critiques de f^n sont ceux de f^{n-1} plus leurs préimages). Dans le cas discontinu, c'est un peu plus subtil : il pourrait y avoir des recollements (voir figure 3). Du coup, pour $k = 1, \cdots, r$, on définit l'ensemble

$$R(k) = \{i \in \mathbb{N} \mid f^i(c_k+) = f^i(c_k-) \text{ et } \prod_{j<i} \epsilon(f^j(c_k+)) = \prod_{j<i} \epsilon(f^j(c_k-))\}$$

qui a pour utilité de nous informer si un point critique pour f a la malchance de se décritiquifier au bout d'un certain nombre d'itérations. Autrement dit, $c_k \in C_{f^n} \Leftrightarrow n \notin R(k)$.
Par suite,

$$p_n(f) = 1 + \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_k^{n-j} \cdot \# E_k^j \tag{5}$$

où $\delta_k^i = 1$ si $i \notin R(k)$, et $\delta_k^i = 0$ si $i \in R(k)$. En posant $\delta_k(t) = \sum_{j\geq 0} \delta_k^j t^j$, on obtient immédiatement de (5) la relation suivante (et pour qui est allergique aux indices ça doit commencer à bien faire) :

$$P(t) = \frac{1}{1-t} + t \cdot \sum_{k=1}^{r} \delta_k(t)\Gamma_k(t) \tag{6}$$

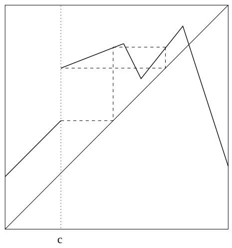

Figure 3: Un exemple de recollement : le point c ne sera plus critique pour f^2.

De (6) et (4) suit

$$P(t) = \underbrace{\frac{1}{1-t}}_{A} + \sum_{k,m=1}^{r} \underbrace{t \cdot \delta_k(t)}_{B} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}[(\theta_f(1-)(t) - \theta_f(0+)(t))]_m}_{C} \cdot \underbrace{M_{mk}(t)}_{D} \tag{7}$$

Pour étudier l'accroissement de $p_f(n)$, il suffit d'étudier les termes A, B, C, D de (7). A n'apporte rien de brutal. B et C sont des séries formelles aux coefficients dans $\{0, \pm 1\}$. D est une entrée de l'inverse de $K(t)$, c'est donc une mineure de $K(t)$ divisée par $\Delta_f(t)$ =det($K(t)$). Comme les entrées de $K(t)$ sont des séries formelles avec coefficients $0, \pm 1$, une mineure donne 'au pire' $cste \cdot (1 + t + t^2 + t^3 + \cdots)^{r-1}$ (avec $cste = (r-1)!$, par exemple). Donc, dans le pire des cas (celui où aucune annulation n'a lieu), les termes B, C et D contribuent comme $c \cdot (1 + t + t^2 + t^3 + \cdots)^{r+1} \cdot \frac{1}{\Delta_f(t)}$ (la somme n'ayant pas d'importance, quitte à changer la constante en $r^2 \cdot cste$).
On a le théorème suivant :

THÉORÈME (MILNOR-THURSTON **1988,** BALADI-RUELLE **1994**).
On note par Per(f) l'ensemble des orbites périodiques de f.

$$\frac{1}{\Delta_f(t)} = \frac{\zeta_f^R(t)}{Q(t)} \tag{8}$$

où $= \zeta_f^R(t)$ est la fonction zêta réduite de f, qui peut s'écrire comme un produit sur les orbites périodiques

$$\zeta_f^R(t) = \prod_{\gamma \in Per(f)} F(\gamma) \tag{9}$$

($F(\gamma)$ est une série formelle en t dépendant de γ) et

$$Q(t) = 1 - \frac{1}{2}[(\epsilon(0+) + \epsilon(1-)) \cdot t].$$

(Voir [1].) Comme f **n'a pas** d'orbites périodiques dans notre cas, $\zeta_f^R(t) = 1$ (car un produit vide vaut toujours 1 sinon les maths sont contradictoires et du coup vous n'existez pas), et donc $\Delta_f(t)$ apporte une contribution de $\frac{1}{1-k\cdot t}$, où k vaut $0, \pm 1$ suivant les cas. Donc, au pire, $P(t)$ est de la forme $Y(t) = cste \cdot (1 + t + t^2 + \dots)^{s+2}$. Or, si on regarde le coefficient a_n de t^n dans $Y(t)$, on a

$$a_n = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ s-1 \end{array} \right) = \frac{(n-1)\cdots(n-s+1)}{(s-1)!},$$

qui est un polynome de degré s en n. C'en est fait de la proposition 1. Ça lui apprendra. $\square$

Prouver une telle proposition pourrait pousser le zigue sujet à l'exaltation à se croire le meilleur d'author, mais c'est ce moment précis que choisissent deux rabijoules pour vous charcler direct :

Conjecture (Boshernitzan et Kornfeld **[2]**).
Soit f une application CMSPM, non inversible, sans points périodiques. Alors, $p_f(n)$ croit linéairement.

Et là on la ramène moins.

References

[1] V. Baladi and D. Ruelle. An extension of the theorem of Milnor and Thurston on the zeta functions of interval maps. *Ergodic theory Dynam. Syst.*, 14:621–32, 1994.

[2] M. Boshernitzan and I. Kornfeld. Interval translation mappings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 15:821–832, 1995.

[3] J. Milnor and W. Thurston. Iterated maps of the interval. In J.C. Alexander, editor, *Dynamical Systems*, volume 1342 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1988.