Chers Dudes,

Il est là...
Il est présent...
Et empêchez-les !!!!!! Car nous sommes noirs (oueeeh), nous sommes jaunes (oueeeeh), nous sommes blancs (oueeeh) et ensemble, nous sommes, de la, dy-na-miiiiiiteuhhh. Un, deux, et un-deux-trois-quatre :

Chers Dudes,

Il est là...
Il est présent...
Qui ça ? Ben, ANDRÉ HENRIQUES (el Niño), c'te question...
Il est de retour des States tout esspressement pour nous claquer dans le beignet un petit essposé ayant pour titre:

ÜBER MOMENTAPPLICAZION,

où il sera question de géométrie symplectique, et autres billevesées.

Date : LUNDI 28 mai 2001
Heure : 16h15
Lieu : 6ème
Tenue du conférencier : American Gladiator.

Boîtes à rythmes bienvenues.
Murs de guitarres plombées s'abstenir.

M.Baillif (grwzts)
D.Cimasoni (toum-tatatzim-tazam)

"Dans ce cas mon Q vaut 1."

F.S.

ÜBER MOMENTAPPLICAZION

ANDRÉ "NIÑO" HENRIQUES

Le but de cet exposé est des familiariser le lecteur avec la notion *d'application moment* et de donner quelques exemples importants.

DÉFINITION. *Soit* (M,ω) *une variété simplectique et* $\psi : G \to (M,\omega)$ *une action de groupe de Lie. Soit* $\mathfrak{g}$ *l'algèbre de Lie de* G *et* $\psi_p : \mathfrak{g} \to T_pM$ *la forme infinitésimale de l'action. Finalement, notons* $\widetilde{\omega} : T_pM \to T_p^*M$ *pour* $\widetilde{\omega} = \omega(x,\cdot)$ *et* $ad_\xi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ *pour* $ad_\xi(X) = <\xi, [\cdot, X]>$*, où* $\xi \in \mathfrak{g}^*$*.*
On dit que $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ *est une application moment si :*

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\psi_p} T_pM \xrightarrow{\widetilde{\omega}} T_p^*M \qquad \textit{est duale de} \qquad T_pM \xrightarrow{d\mu} \mathfrak{g}^* \tag{A}$$

et si le triangle

$$\begin{tikzcd}
 & T_pM \arrow[dr, "d\mu"] & \\
\mathfrak{g} \arrow[ur, "\psi_p"] \arrow[rr, "ad_{\mu(p)}"'] & & \mathfrak{g}^*
\end{tikzcd} \qquad \text{(B)}$$

commute.

En espérant que le lecteur n'a pas été dégoûté par cette entrée en matière brutale, commençons par notre exemple favori.

Le plan projectif $\mathbb{CP}^2$

Le plan projectif complexe vient avec une action du tore $\{(t_1,t_2,t_3) \in \mathbb{C}^3 \mid |t_i| = 1\}$ définie par $(t_1,t_2,t_3)\cdot[z_1 : z_2 : z_3] = [t_1z_1 : t_2z_2 : t_3z_3]$. Le sous-tore $\{(t,t,t)\}$ agissant trivialement, il est raisonnable de restreindre cette action à

$$\mathbb{T}^2 = \left\{ (t_1,t_2,t_3) \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, |t_i| = 1,\ \sum t_i = 0 \right\}.$$

Nous ne définirons pas ici la structüre de variété symplectique de $\mathbb{CP}^2$. Ceci se fera plus tard dans le cadre des variétés toriques.

Il est très important de bien comprendre la structüre des orbites de l'action de $\mathbb{T}^2$ sur $\mathbb{CP}^2$. Nous les classons en fonction de la dimension du stabilisateur.

Dimension du stabilisateur	orbites
2	3 points fixes : $[1:0:0], [0:1:0], [0:0:1]$
1	3 "axes" : $[z:w:0], [z:0:w], [0:z:w]$ $(z, w \neq 0)$
0	orbites génériques : $[z:w:u]$ $(z, w, u \neq 0)$

Dans ce cas-ci, il se trouve que l'application moment réalise le quotient $\mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^2/\mathbb{T}^2$. L'espace quotient $\mathbb{CP}^2/\mathbb{T}^2$ s'avère être homéomorphe à un triangle, les sommets correspondent aux 3 points fixes, les côtés correspondent aux trois axes de $\mathbb{CP}^2$ (axes des x, axe des y et droite à l'infini) et les points intérieurs correspondent aux points génériques de $\mathbb{CP}^2$. On a les formules suivantes :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{CP}^2 \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] \arrow[dr, "\mu"] & \mathbb{CP}^2/\mathbb{T}^2 \arrow[d, phantom, "\|\wr"] \\
{[z:w:u]} \arrow[dr, mapsto] & \text{Triangle} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=1\} \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] \\
& \frac{1}{|z|^2+|w|^2+|u|^2}(|z|^2, |w|^2, |u|^2),
\end{tikzcd}$$

où μ est l'application moment de l'action $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{CP}^2$.
Il est intéresssant de voir comment on peut reconstruire $\mathbb{CP}^2$ (en tant qu'espace topologique) à partir du triangle. Les fibres de l'application moment sont représentées dans la Figure 1. Pour capter la topologie, il convient de voir l'image ci-dessus comme un quotient de Triangle $\times$ $\mathbb{T}^2$. En pratique, cela revient à remplacer quelques fibres $\mathbb{T}^2$ par des quotients

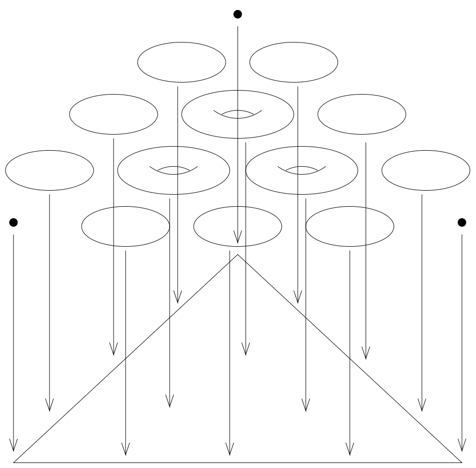

Figure 1: Les fibres de l'application moment

choisis de $\mathbb{T}^2$. Si on représente $\mathbb{T}^2$ par $\mathbb{R}^2/\Lambda$, où Λ est un réseau, les quotients de $\mathbb{T}^2$ sonts de la forme $\mathbb{R}^2/A$, où A est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^2$ qui contient Λ. Tout ceci dit, nous obtenons la description suivante des fibres de $\mu : \mathbb{CP}^2 \to$ Triangle : On laisse au lecteur le soin de vérifier que les espaces projectifs $\mathbb{CP}^n$ possèdent tous des applications moment μ dont l'image est un n-simplexe. Tout comme pour $\mathbb{CP}^2$, ils peuvent être reconstruits à partir du n-simplexe.

Variétés Toriques

Les variétés toriques sont parmi les exemples les plus intéressants de variétés Hamiltoniennes avec application moment. Le groupe agissant est (comme le nom l'indique) de nouveau un tore.
Pour construire une variété torique, voici les données initiales nécessaires :

(1) Un espace vectoriel réel E de dimension n et son dual E^*,

(2) Un réseau $\Lambda \subset E$ et son dual $\Lambda^* \subset E^*$ (Un réseau est un objet isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ et son dual est défini par $\Lambda^* = \{\xi \in E^* \mid <\xi, \lambda> \in \mathbb{Z}\, \forall \lambda \in \Lambda\}$),

(3) Un polytope $\Delta \subset E^*$ (enveloppe convexe d'un nombre fini de points) qui satisfait

  - a) Les facettes de Δ sont à pentes rationelles respectivement à Λ^*,
  - b) Les sommets de Δ sont simples, i.e. il y a exactement n facettes qui s'y rencontrent.[1]

Le tore qui agit est

$$\mathbb{T}^n = E/\Lambda$$

et la variété symplectique M est un quotient de $\Delta \times E/\Lambda$. Ce par quoi on quotiente la fibre au dessus d'un point $x \in \Delta$ dépend de la plus petite face F à laquelle x appartient. La règle est la suivante : la fibre $\{x\} \times E/\Lambda$ doit être remplacée par $\{x\} \times E/(\Lambda + F^{\perp})$ où $F^{\perp} = \{e \in E \mid <F, e> = 0 \,\forall f \in F\}$. Le fait que $\Lambda + F^{\perp}$ est un sous-groupe fermé de E est garanti par le fait que la pente de F est rationnelle. Notons M_Δ l'espace topologique ainsi obtenu.

Rappelons que la même procédure appliquée à un n-simplexe donnait $\mathbb{CP}^n$; vu que Δ ressemble localement à un n-simplexe (car ses sommets sont simples), M_Δ ressemble localement à $\mathbb{CP}^n$ et donc M_Δ est une variété lisse. Nous ne définirons la forme symplectique que pour les points génériques de M_Δ et prions le lecteur de bien croire qu'elle s'étend par continuité sur tout M_Δ.

---

[1] Les conditions a) et b) ne sont pas complètes. Une condition plus obscure mais qui contient toute l'information est que les sommets de Δ doivent être conjugués à $\mathbb{R}^n_+$ par un élément de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n, \Lambda)$ plus une translation.

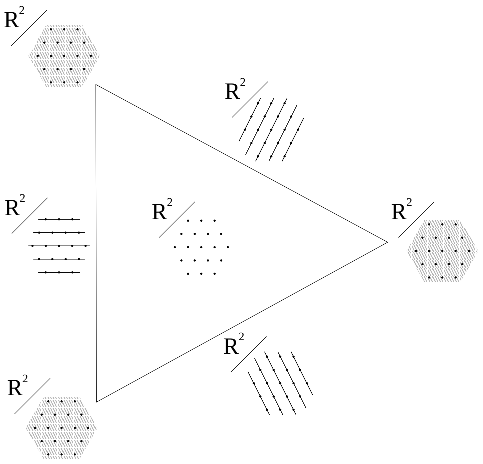

Figure 2: Le plan projectif reconstruit a partir du triangle.

Pour un point générique $p \in M_\Delta$ on a donc $T_pM_\Delta \cong E^* \oplus E$ et on définit

$$\begin{aligned} \omega : (E^* \oplus E) \times (E^* \oplus E) &\to \mathbb{R} \\ \omega((\xi, x), (\eta, y)) &= <\eta, x> - <\xi, y> . \end{aligned}$$

L'action de $\mathbb{T}^n = E/\Lambda$ sur M_Δ est induite par l'action naturelle de E/Λ sur $\Delta \times E/\Lambda$. Montrons maintenant que la projection canonique

$$\mu : M_\Delta \to \Delta \subset E^*$$

est une application moment. Il s'agit donc de vérifier les relations de compatibilités entre les objets suivants :

- L'action infinitésimale du Tore

$$\begin{array}{cccc} \psi_p : & \mathfrak{t} & \longrightarrow & T_pM \\ & \| & & \| \\ & E & \longrightarrow & E^* \oplus E \\ & x & \mapsto & (0, x). \end{array}$$

- La différentielle de l'application moment

$$\begin{array}{ccc} d\mu : \;\; T_pM = E^* \oplus E & \longrightarrow & E^* \\ (\xi, x) & \mapsto & \xi. \end{array}$$

- La forme symplectique ω qui induit $\widetilde{\omega}$ défini par $\widetilde{\omega}(x) = \omega(x, \cdot)$

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\omega} : & T_pM & \longrightarrow & T_p^*M \\ & \| & & \| \\ & E^* \oplus E & \longrightarrow & E \oplus E^* \\ & (\xi, x) & \mapsto & (x, -\xi). \end{array}$$

On vérifie que l'application

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\psi"] & E^* \oplus E \arrow[r, "\widetilde{\omega}"] & E \oplus E^* \\ x \arrow[r, mapsto] & (0,x) \arrow[r, mapsto] & (x,0) \end{tikzcd}$$

est duale de (A)

$$\begin{tikzcd} E^* \oplus E \arrow[r, "d\mu"] & E^* \\ (\xi, x) \arrow[r, mapsto] & \xi \end{tikzcd}$$

et que le triangle

$$\begin{tikzcd}
 & & (0,x) \arrow[rrd, mapsto] \arrow[d, phantom, "\pitchfork"] & & \\
x \arrow[rru, mapsto] \arrow[d, phantom, "\pitchfork"] & & E^* \oplus E \arrow[rrd, "d\mu"] & & 0 \arrow[d, phantom, "\pitchfork"] \\
E \arrow[rru, "\psi"] \arrow[rrrr, "ad=0"'] & & & & E^*
\end{tikzcd} \qquad \text{(B)}$$

commute.