Chers Dudes,

Des nouvelles du monde :

- Madame, on a retrouvé vos 8 kilos perdus le mois dernier.

- On a retrouvé l'homme qui a vu l'homme qui a vu l'ours: c'est un ours.

- On a retrouvé l'homme qui a retrouvé l'homme qui a retrouvé l'ours (qui a retrouvé 5 tonnes de plâtre).

- On a retrouvé le plâtre retrouvé par l'ours que vous avez perdu le mois dernier, madame.

- On a retrouvé le puck qu'a reçu l'homme qui a vu le plâtre qui est dans l'ours (de la dame).

- Arrêtez de faire les salauds avec Guillaume, il n'est pas si méchant, il se prend juste un peu au sérieux avec sa doctrine bolchévique.

- Votre serviteur DAVID "FLASHDANCE" CIMASONI, vous servira une conférence intitulée

ÜBER CONWAY POLYNOMIAL.

Date: Mercredi 26 mars 2002
Heure: 16h15
Lieu: Salle 623
Tenue du conférencier: Kasher suisse

Schizophrènes s'abstenir.
Schizophrènes bienvenu.

M. Baillif (allez, laisse toi faire, la vie est facile)
D. Cimasoni (bas les pattes)

"Il s'en fout un peu, à mon Dieu!... euh... à mon avis!"

F.S.

ÜBER ALEXANDER-CONWAY POLYNÔMIAL

DAVID "FLASHDANCE" CIMASONI

Abstract

Où l'on conte la palpitante histoire de l'invariant de noeuds le plus connu: le polynôme d'Alexander-Conway. Don't try this at home.

1928: James Waddell Alexander III

Ce sympathique James [1] fut le premier à appliquer des outils de topologie algébrique à l'étude des noeuds et entrelacs. Sa construction est extrêmement naturelle pour qui a l'habitude de ce genre de choses (et imbitable pour les autres). La voici: soient L un entrelacs orienté dans S^3, et X son complémentaire. Le coefficient d'enlacement avec L défini un épimorphisme $\pi_1 X \stackrel{\varphi}{\to} \mathbb{Z}$. Comme les revêtements de X avec groupe de transformations G sont en bijection avec les épimorphismes $\pi_1 X \to G$, φ détermine un revêtement infini cyclique $\widetilde{X} \stackrel{p}{\to} X$: un revêtement dont toutes les transformations sont engendrées par un certain $\widetilde{X} \stackrel{t}{\to} \widetilde{X}$. Ainsi, l'homologie $\mathrm{H}_1\widetilde{X}$ est un $\mathbb{Z}$-module muni d'une multiplication par t donnée par $\mathrm{H}_1\widetilde{X} \stackrel{t_*}{\to} \mathrm{H}_1\widetilde{X}$: c'est donc un module sur l'anneau $\mathbb{Z} < t >= \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ des séries de Lorenzo. Il s'agit du **module d'Alexander** de l'entrelacs orienté L.

C'est un invariant très riche, et très encombrant; pour en extraire des informations plus maniables, on considère la construction suivante. Une matrice $\mathcal{P} = (p_{ij}) \in M_{m\times n}(\Lambda)$ est une **matrice de présentation** d'un Λ-module $\mathcal{N}$ si

$$\mathcal{N} \; = < x_1, \ldots, x_m \mid \sum_{i=1}^{m} p_{ij} x_i = 0 \;\; (j = 1, \ldots, n) > .$$

En clair, les lignes de $\mathcal{P}$ correspondent aux générateurs de $\mathcal{N}$, et les colonnes aux relations. Si Λ est factoriel, on peut définir $\Delta(\mathcal{N})$ comme le plus grand commun diviseur des mineurs maximaux d'une matrice de présentation $\mathcal{P}$ de $\mathcal{N}$; on vérifie que $\Delta(\mathcal{N})$ est bien défini modulo les unités Λ^* de l'anneau Λ, et qu'il ne dépend pas du choix de la matrice de présentation.

Dans le cas qui nous intéresse, $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ et $\mathcal{N} = \mathrm{H}_1\widetilde{X}$. Une matrice de présentation de $\mathrm{H}_1\widetilde{X}$ est une **matrice d'Alexander** de L, et le polynôme $\Delta_L := \Delta(\mathrm{H}_1\widetilde{X})$ est le

polynôme d'Alexander de L, bien défini modulo $\Lambda^* = \{\pm t^\nu \; ; \; \nu \in \mathbb{Z}\}$. On note habituellement $\doteq$ une égalité modulo Λ^*. On a donc un invariant d'entrelacs orientés $\Delta_L \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]/(\pm t^\nu)$. A ce stade se posent quelques questions.

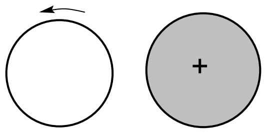
1. Etant donné un entrelacs orienté L, comment calculer Δ_L ?

2. Etant donné un polynôme de Lorenzo Δ, existe-t-il un entrelacs orienté L tel que $\Delta \doteq \Delta_L$? (En d'autres termes, il s'agit de caractériser les polynômes d'Alexander.)

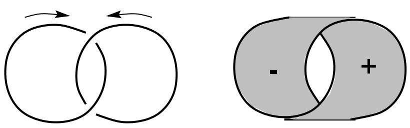
3. Existe-t-il un représentant canonique de Δ_L ?

1934: Karl Johannes Herbert Seifert

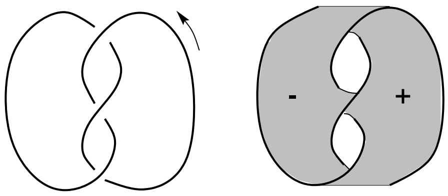
Ce bon vieux Herbert [2] propose la construction géométrique suivante du polynôme d'Alexander.[1] Une **surface de Seifert** pour un entrelacs orienté L est une surface F orientée, connexe, compacte, à bord, plongée dans S^3, telle que $\partial F = L$. Voici des surfaces de Seifert pour le noeud trivial O, l'entrelacs de Hopf H, et le noeud de trèfle T.



O



H



T

Etant donnée une surface de Seifert F, la **forme de Seifert** associée est la forme bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_1 F \times \mathrm{H}_1 F & \to & \mathbb{Z} \\ (x, y) & \mapsto & \ell k(x^+, y), \end{array}$$

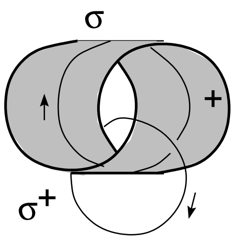
où ℓk désigne le coefficient d'enlacement, et x^+ le cycle x poussé dans la direction positive normale à F. Une matrice V_F de cette forme est une **matrice de Seifert** associée à F.

Théorème (**Seifert**).
Pour tout entrelacs L, il existe une surface de Seifert F, et la matrice $V_F - tV_F^T$ est une matrice d'Alexander de L.

[1] On appréciera le titre tout poulporesque du papier de ce brave Karl.

Corollaire. *Pour tout L et toute surface de Seifert F, $\Delta_L(t) \doteq det(V_F - tV_F^T)$.*

Reprenons les trois exemples d'entrelacs et de surfaces de Seifert présentés ci-dessus. Pour le noeud trivial O, une surface de Seifert est donnée par un disque; ainsi, $\mathrm{H}_1 F = 0$ et $\Delta_O(t) \doteq 1$. La surface de Seifert F pour l'entrelacs de Hopf H dessinée ci-dessus a le type d'homotopie d'un cercle; ainsi, $\mathrm{H}_1 F = \mathbb{Z}\sigma$. Sur l'illustration suivante, on a dessiné les cycles σ et σ^+.



Clairement, $\ell k(\sigma^+, \sigma) = -1$, d'où $\Delta_H(t) \doteq \det((-1) - t(-1)) = t - 1$. Un calcul similaire dans le cas du noeud de trèfle T donne $V_F = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On obtient donc le polynôme d'Alexander $\Delta_T(t) \doteq \begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ -t & t-1 \end{vmatrix} = t^2 - t + 1$.

Mais Seifert parvient aussi, à l'aide des surfaces qui portent son nom, à répondre partiellement à la question 2: il caractérise les polynômes d'Alexander des noeuds.

Théorème **(Seifert)**.
Etant donné $\Delta \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, il existe un noeud K tel que $\Delta \doteq \Delta_K$ si et seulement si $\Delta(1) = \pm 1$ et $\Delta(t^{-1}) \doteq \Delta(t)$.

Ce théorème fut généralisé par ce bout-en-train de Fujitsugu [3] au cas des entrelacs en utilisant les mêmes techniques. Remarquons encore que ce résultat de Seifert permet de choisir un représentant à peu près canonique du polynôme d'Alexander dans le cas d'un noeud: il suffit de choisir Δ_K tel que $\Delta_K(t^{-1}) = \Delta_K(t)$ et $\Delta_K(1) = 1$. Ainsi, la technique développée par Seifert fournit une réponse clair au problème 2, et une réponse plus ou moins satisfaisante aux deux autres.

1970: John Horton Conway

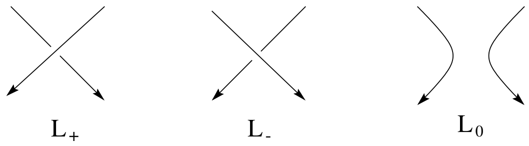
C'est ce diable de John [4] qui, sur un véritable coup de génie, apporte une réponse magistrale aux problèmes 1 et 3.

Théorème **(Conway)**.
Etant donné L un entrelacs orienté, il existe un unique $\Omega_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ qui satisfait les trois axiomes suivants.

(i) *Ω est un invariant d'isotopie de L.*

(ii) *Si O est le noeud trivial,* $\Omega_O(t) = 1$.

(iii) *Si L_+, L_- et L_0 sont donnés par des projections identiques sauf dans une petite boule, où elles diffèrent de la façon suivante,*



on a l'identité

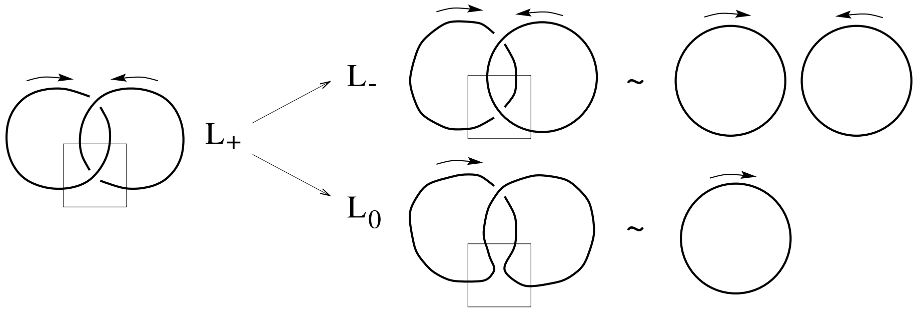
$$\Omega_{L_+}(t) - \Omega_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})\, \Omega_{L_0}(t).$$

De plus, $\Omega_L(t) \doteq \Delta_L(t)$.

Ainsi, Conway fait d'une pierre deux coups: non seulement il fournit un représentant canonique de Δ_L (qui, lorsque L est un noeud, coïncide avec la normalisation de Seifert), mais en plus, il donne une méthode purement combinatoire pour calculer ce représentant. On notera dorénavant Δ_L cet invariant: c'est le **polynôme d'Alexander-Conway**.

Il est très amusant d'étudier les propriétés de ce polynôme au moyen des trois axiomes de Conway. Par exemple, on démontre facilement que si L est un entrelacs séparable (i.e.: si l'on peut séparer L dans deux boules disjointes), alors $\Delta_L = 0$.

A l'aide des axiomes de Conway et de la remarque ci-dessus, calculons le polynôme d'Alexander-Conway de H et de T. Pour l'entrelacs de Hopf H, on utilise d'abord l'axiome (iii) près d'un croisement,

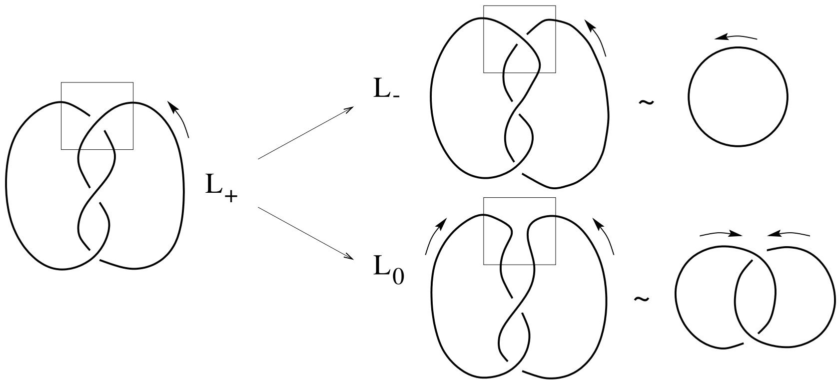


d'où $\Delta_H(t) = \Delta_{L_+}(t) = \Delta_{L_-}(t) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta_{L_0}(t)$. Par la remarque précédente, $\Delta_{L_-} = 0$; par l'axiome (ii), $\Delta_{L_0}(t) = 1$. On obtient donc $\Delta_H(t) = t^{1/2} - t^{-1/2}$, qui est bien un représentant de $t - 1$.

Pour le noeud de trèfle T, on procède comme décrit dans la prochaine illustration. On obtient

$$\Delta_T(t) = \Delta_{L_+}(t) = \Delta_{L_-}(t) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\, \Delta_{L_0}(t) = 1 + (t^{1/2} - t^{-1/2})^2 = t - 1 + t^{-1}.$$

C'est bien l'unique représentant Δ de $t^2 - t + 1$ tel que $\Delta(1) = 1$ et $\Delta(t^{-1}) = \Delta(t)$.



Avec cette technique combinatoire, Conway parvient à calculer à la main en une après-midi une table de noeuds qui avait pris six ans au pauvre Little (de 1893 à 1899). Reste un tout petit problème: Conway ne donne aucune démonstration de son théorème. Or, si l'unicité de cet invariant est assez évidente, l'existence ne coule pas vraiment de source. En d'autres termes, on ne sait pas vraiment si les trois axiomes de Conway sont consistants.

Le papier de Conway est certainement l'article le plus révolutionnaire de la théorie des noeuds: l'idée de calculer un invariant avec des relations type (iii) a complètement changé la façon d'appréhender ce sujet. Et pourtant, cet article est passé complétement inaperçu pendant presque 10 ans... En fait, il faudra attendre 1981 pour voir ce fieffé Lou [5] donner une construction du polynôme de Conway. Il reprend simplement l'idée de Seifert, et définit

$$\Omega_L(t) \;=\; \det\left(t^{1/2}V_F - t^{-1/2}V_F^T\right),$$

où F est une surface de Seifert quelconque pour L, et V_F une matrice de Seifert associée. Il ne reste plus qu'à vérifier que $\Omega_L(t)$ ainsi défini satisfait les trois axiomes de Conway, ce qui est un simple exercice. Au vu du corollaire au théorème de Seifert, il est par ailleurs évident que Ω_L est un représentant du polynôme d'Alexander de L.

References

[1] J. W. Alexander, *Topological invariants of knots and links*, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), no. 2, 275–306.

[2] H. Seifert, *Über das Geschlecht von Knoten*, Mathematische Annalen **110** (1934), 571–592.

[3] F. Hosokawa, *On* ∇*-polynomial of links*, Osaka Mathematical Journal **10** (1958), 273–282.

[4] J. Conway, *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, 1970 Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967) 329–358 Pergamon, Oxford.

[5] L. Kauffman, *The Conway polynomial*, Topology **20** (1981), no. 1, 101–108.