

Fractales

Fractales et constructions végétales

LES PRÊLES

des plantes primitives - des structures simples

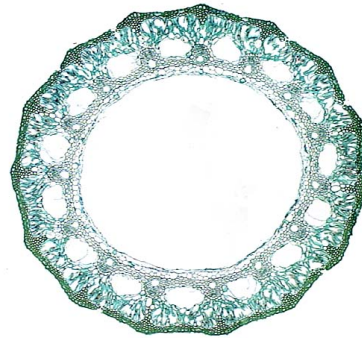


Equisetum telmateia, la prêle géante

Equisetum telmateia, la plus grande prêle d'Europe, croît dans les sous-bois humides. Ses frondes abrasives servaient au polissage des bois et des métaux.

Tige creuse

- renforcée d'arêtes en silice
- N canaux externes
- N canaux internes



Feuilles rayonnantes

- 0 - 5 - 20 feuilles par étage
- 3 - 9 segments par feuille
- arquées vers le haut ou le bas

Structure itérative

- répétition 5 - 20 fois du motif : colerette + ombelle segmentée
- à distance décroissante exponentiellement



Reproduction

- tiges fertiles sans chlorophylle
- tiges stériles avec chlorophylle
- ou tiges mixtes
- spores sauteuses

LES PRÊLES

La prêle des forêts - la prêle des marais



Equisetum sylvaticum
prêle des forêts

Equisetum palustre
prêle des marais

La prêle des forêts croît en sous-bois humide. Ses rameaux tombants portent des divisions secondaires à chaque segment, qui lui donnent un aspect très délicat. La prêle des marais n'est pas différenciée en tiges stériles et fertiles. Elle croît dans les sites inondés.

LES FOUGERES

des structures mathématiques optimisées



Phyllitis scolopendrium
la scolopendre

Une fronde divisée 0 fois

La scolopendre occupe un habitat très humide, sans lumière directe, en sous-bois dense et à l'abri du vent. Elle peut conserver une fronde entière et capter un maximum de lumière diffusée, sans perdre son eau

Le mode de croissance

- déroulement d'une, 2 ou 3 spirales hyperboliques



Les frondes (feuilles)

- absorbent la lumière
- transpirent l'eau
- portent au revers les organes reproducteurs

Des pertes en eau proportionnelles à :

- la surface des frondes
- l'énergie solaire incidente
- la vitesse du vent au carré
- la sécheresse de l'air S
($S = 100\% - \text{Humidité}$)

Minimisation des pertes

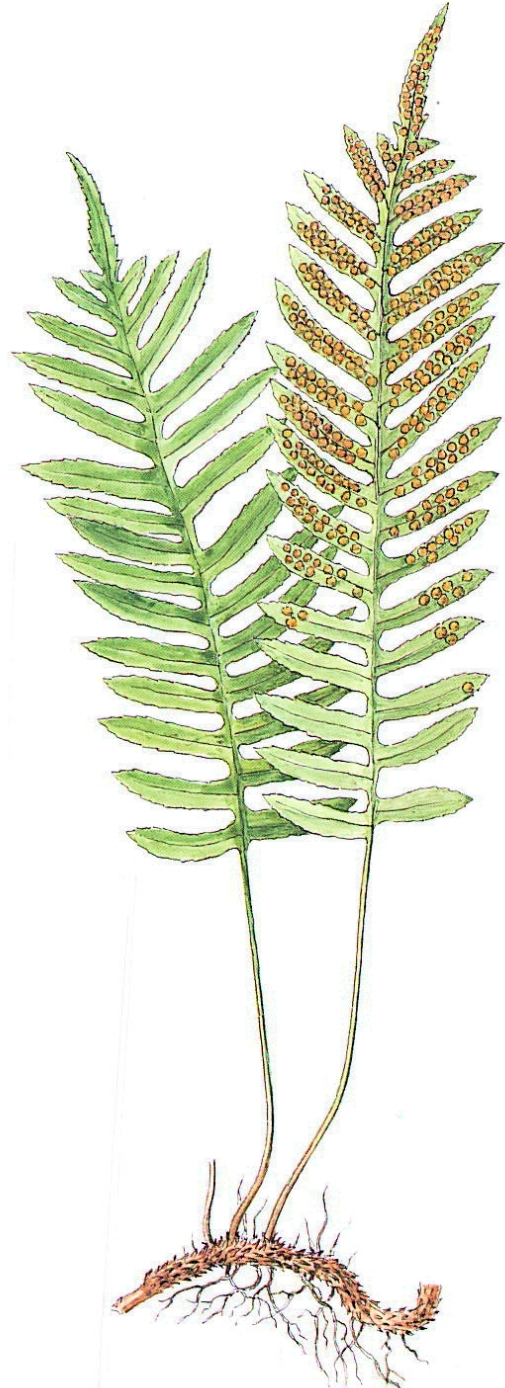
- réduction de la surface des frondes par division
0 - 1 - 2 - 3 - 4 fois
- protection par des écailles (vent nul à la surface de l'épiderme)

LES FOUGÈRES

Des frondes divisées une fois



Blechnum spicant
blechnum en épi



Polypodium vulgare
polypode vulgaire

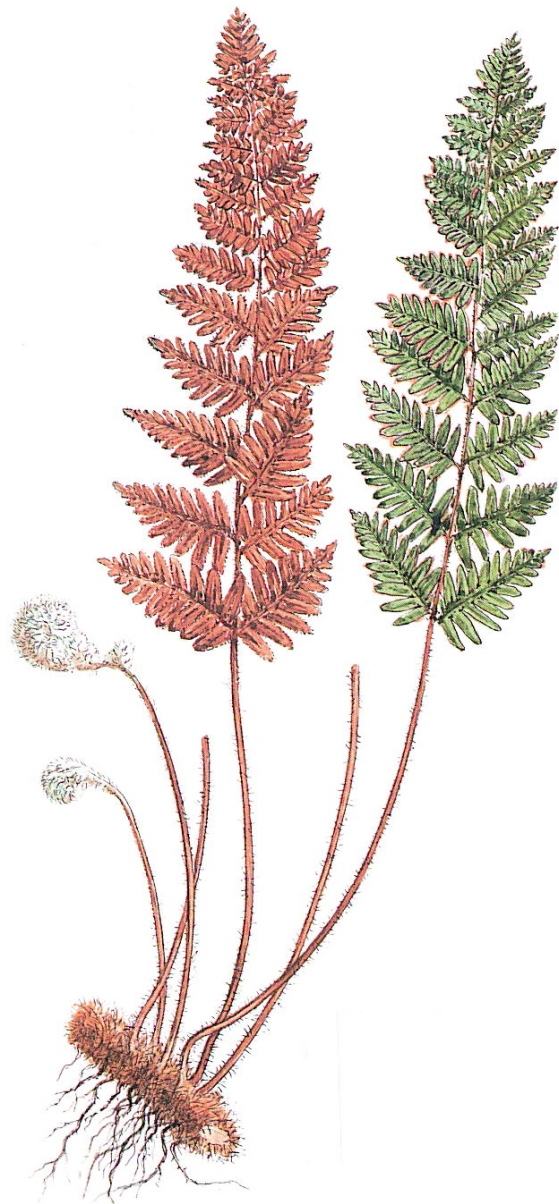
Dans les sites ensoleillés, la division des frondes diminue la surface d'évaporation par un facteur 2 à 3. Chez *Blechnum*, les folioles des frondes fertiles (brun) protègent les organes reproducteurs (sporangies) en s'enroulant sur leurs bords.

LES FOUGÈRES

Des frondes divisées deux fois



Thelypteris palustris
thélypteris des marais

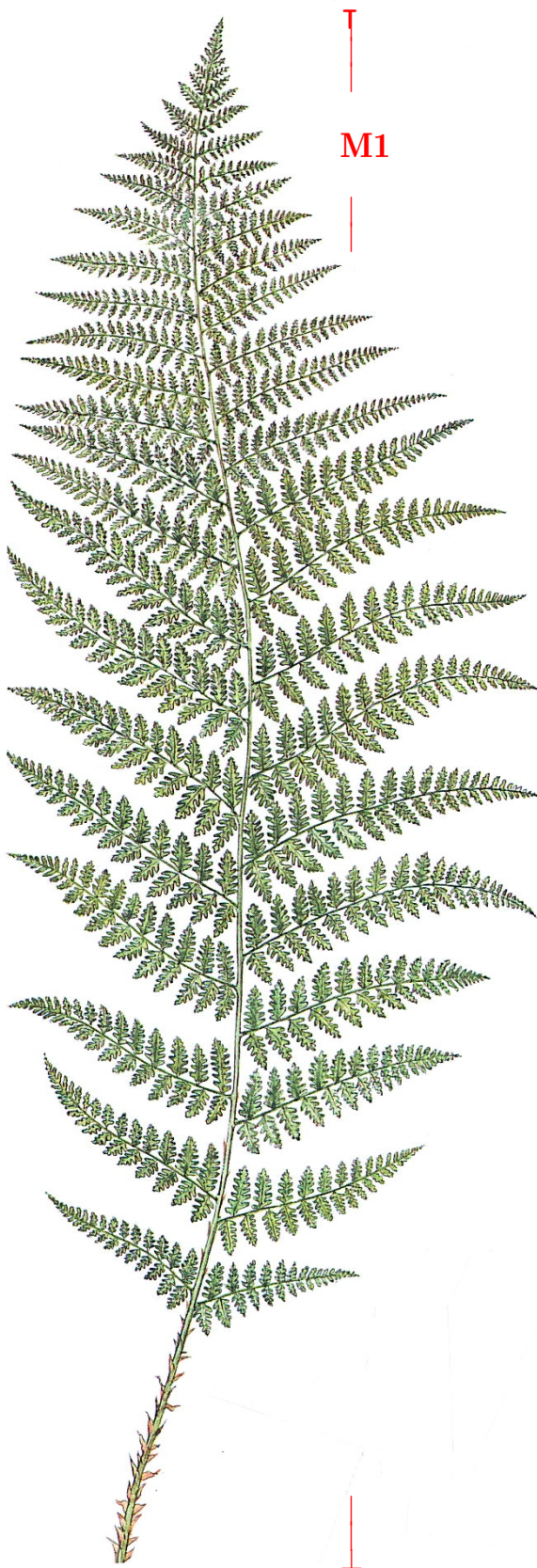


Notholaena marantae
notholaena de Maranta

La double division des frondes augmente le nombre de sporanges placés sur le pourtour des folioles. Le thélypteris, à frondes lisses, vit dans les marais de plaine. Le notholaena vit sur les murs secs et chauds; un tissu d'écailles rousses protège les sporanges de la dessiccation.

LES FOUGÈRES

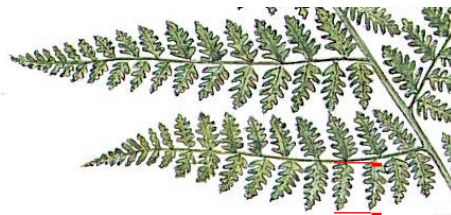
cas d'une structure fractale de niveau 3



Athyrium dissentifolium
Athyrium alpestre

Avec une triple division, la structure de cette fougère est fractale: le motif général M1 de la fronde est répété deux fois, à un facteur d'échelle près, en conservant à la fois :

- les proportions
- les angles avec les axes



Les éléments M2 sont l'image de élément M1, 5 fois plus petits

Les éléments M3 sont l'image de élément M2, 7 fois plus petits

Avantage évolutif

Avec un angle d'attache de ~ 60 degrés et un facteur d'échelle de 5 et 7, la structure est optimisée car:

- les éléments M3 ne se chevauchent pas (chaque élément reçoit la même quantité de lumière)
- l'aire d'émission de spores est maximale pour un minimum de matière végétale utilisée, et donc d'énergie

ACACIAS DE LA SAVANNE

des structures fractales 3D



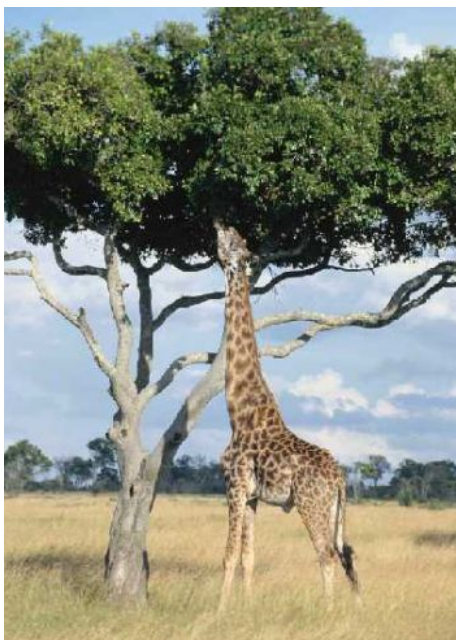
Environnement sévère

- habitat semi-aride
- saison sèche - saison des pluies
- prédation par grands herbivores

Insolation verticale à midi

Solution adaptative

- feuilles toutes dans le même plan (pas d'ombre portée)
- feuilles caduques, divisées et protégées par de fortes épines



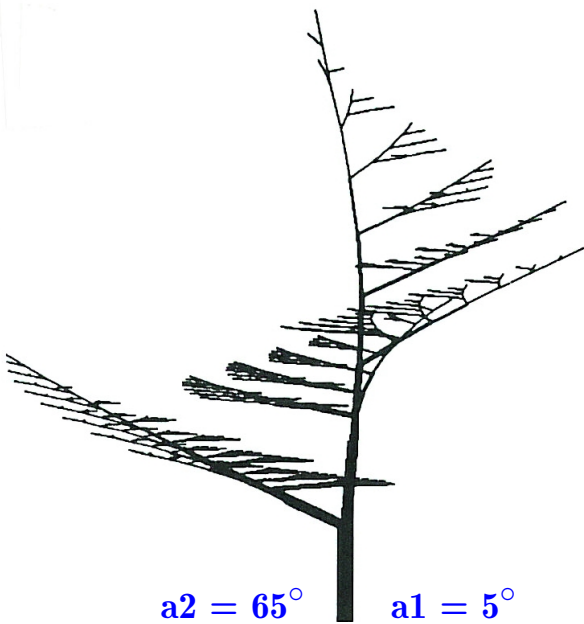
Prédation par les giraffes



- branches feuillées et fleurs à une distance du sol supérieure à la taille des prédateurs

ACACIAS DE LA SAVANNE

la solution mathématique



Structure fractale de type L

Division en deux branches à chaque branchement

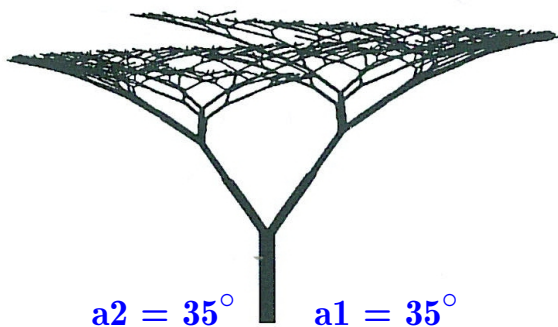
Selon les angles a_1 , a_2 entre branches filles et branche mère, on observe des structures très distinctes:

- avec angle $a_1 = 0^\circ$ et $a_2 = 30-70^\circ$:

- un arbre avec un tronc vertical
- des branches primaires, décalées d'un angle constant a_3
- une structure globale conique

- avec angles a_1 et a_2 égaux :

- un arbre construit par bifurcations



Structure en ombrelle

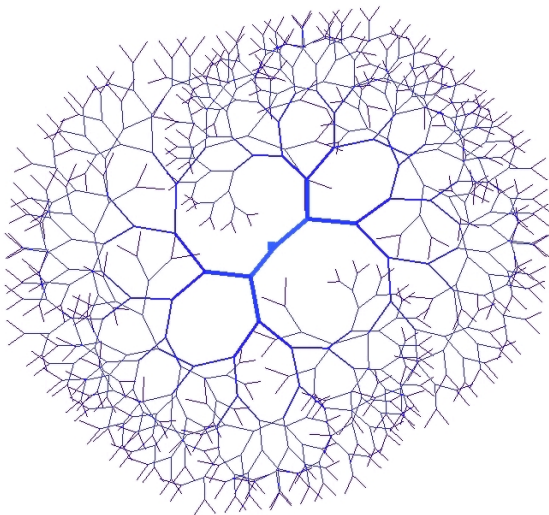
- selon les valeurs de a_1 , a_2 :

- l'arbre se développe en hauteur
- ou forme une ombrelle si:

angles $a_1 = a_2 \geq 35^\circ$

avec 10 branchements

- répartition régulière des rameaux terminaux si branches filles inégales (ramure développée en spirale)



Acacia vu de dessus

Equipartition des flux et résistance à la gravitation

A chaque branchement, flux de sève et poids divisés par 2

- flux proportionnel à la section des branches, de surface $S = \pi r^2$
- résistance à la flexion croissante avec r^2 , le carré du rayon

Solution commune:

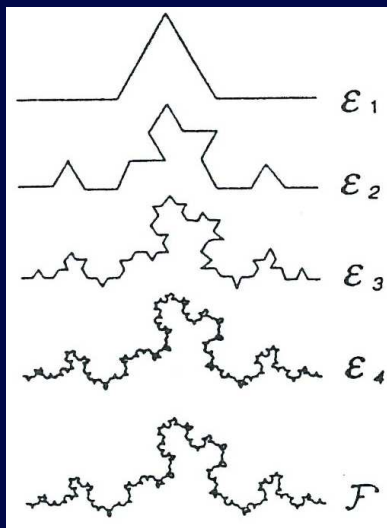
rayon r divisé par $\sqrt{2} = 1.414$

(en rouge, les choix de l'acacia)

fractales

Le monde des fractales

Depuis leur définition par Mandelbrot en 1975, les fractales sont utilisées pour décrire les objets **irréguliers, rugueux, fragmentés**. Elles incluent les **structures itératives** de Julia, qui se répètent, de plus en plus petites, un nombre indéfini de fois, en conservant leur motif et leurs proportions.



Les structures fractales sont aussi dites **auto-similaires**, la partie étant semblable au tout (la brindille possède la même structure que la petite branche; la petite branche, la même que la branche principale).

Les fougères illustrent la propriété **d'invariance d'échelle**. Le même motif peut se répéter à 3 ou 4 échelles de grandeur: le motif global, celui des divisions latérales, et ceux des divisions secondaires, voire tertiaires

Ci-contre, fractale F obtenue en reportant 3 fois le motif ϵ_1 sur les segments rectilignes

Selon que les structures se divisent en éléments de plus en plus petits (l'Univers après le Big-bang, la banquise en dislocation), ou qu'elles se construisent en partant du plus petit vers le plus grand (arbres, cristaux de glace), on parle de **fractales** ou de **constructales**.

Les structures fractales débouchent sur une **organisation hiérarchique** de la plupart des systèmes de l'Univers, minéraux et vivants.

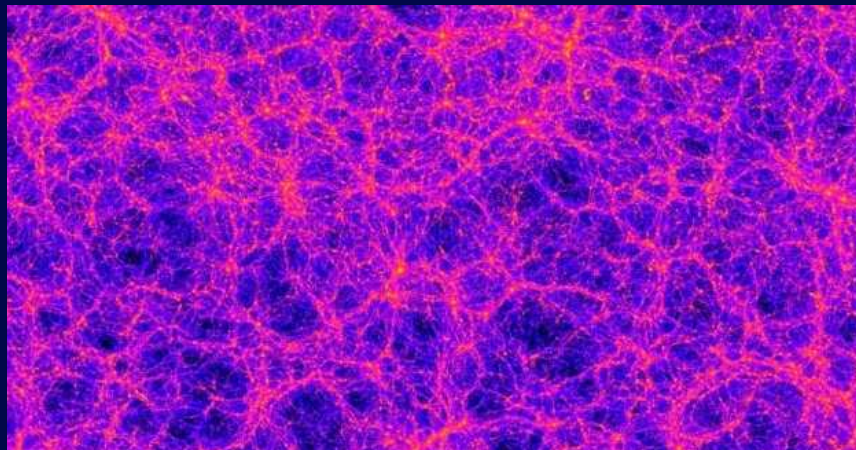
Dans le monde végétal, la forme est optimisée par sélection naturelle pour s'adapter au mieux aux facteurs biologiques internes et aux facteurs environnementaux externes tels que:

- la **gravitation** ou pesanteur;
- la **luminosité** solaire, directe ou diffuse;
- la **température** (seuils de végétation, gel);
- les **ressources en eau** et l'**humidité** de l'air;
- la **vitesse du vent** (évaporation forcée, flexion).

Cette exposition présente, sur les panneaux muraux, des exemples de structures fractales observées dans le monde minéral, végétal et animal. Des simulations numériques permettent de reproduire quelques espèces réelles en jouant avec les paramètres mathématiques simples qui les caractérisent. L'animation en boucle illustre divers schémas de développement suivis par les plantes et explique le type d'optimisation réalisé.

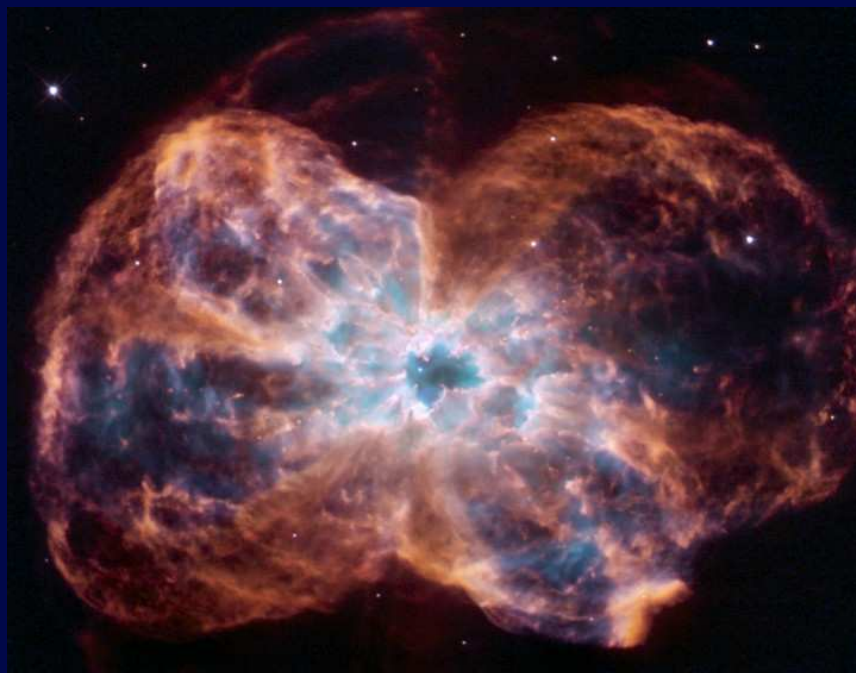
fractales

La fragmentation dans l'Univers



Les grandes structures gazeuses de l'Univers primitif

Largeur du champ: 2.7 milliards d'années-lumière (AL)
Simulation numérique J. Wadsley, McMaster University



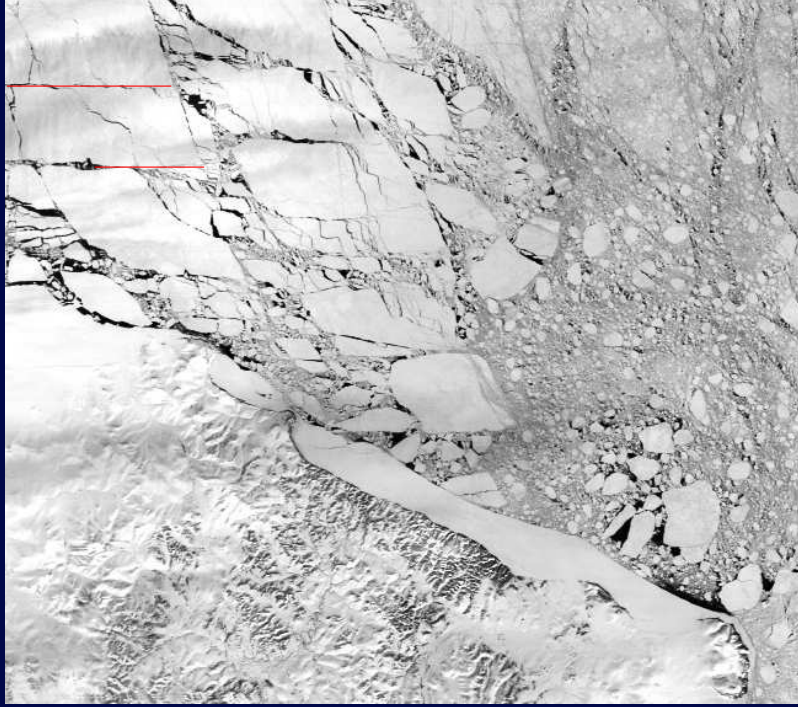
La nébuleuse planétaire en expansion NGC 2440

Largeur: 1 AL (Hubble Heritage, STScI)

La fragmentation de la matière cosmique en expansion produit des structures similaires (vides et filaments) dans l'Univers primitif, dans le gaz de notre Galaxie et dans les enveloppes des étoiles en fin de vie (ci-dessus NGC 2440). Les facteurs d'échelle sont respectivement 1, 200 millions et 3 milliards.

fractales

La géométrie des fractures



Fracturation de la banquise en éléments similaires de taille décroissante (en rouge: 15x35 km) au passage du détroit de Behring (MODIS, NASA)



Fracturation d'une roche par compression (distances entre fractures: 2-5 cm)

Les fractales (du latin **fractus**, brisé) décrivent les structures susceptibles de se subdiviser un grand nombre de fois en sous-structures similaires.

Les forces de compression (ou de distension) créent des réseaux de fractures en X, obliques par rapport au sens de la force. Sur la croûte terrestre, la trace de ces réseaux forme des parallélogrammes de taille 50 à 500 km (failles majeures), 10 à 100 m (diaclasses) et 1 à 10 mm pour les micro-fractures. Le rapport des tailles extrêmes atteint un facteur 10 millions.

fractales

Les réseaux hydrographiques

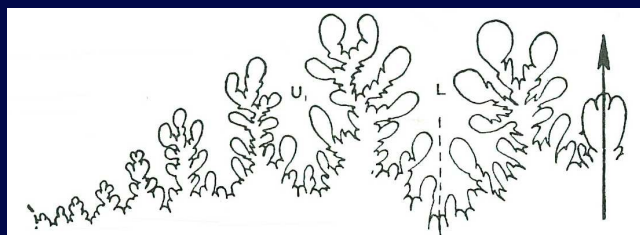


Le sud de la Norvège, observé par le satellite Sea WiFS en juin 2000 (ESA)

Le réseau hydrographique du sud de la Norvège, révélé par la neige, possède une structure fractale en dendrite. Les profils des basses vallées inondées ont été modifiés par l'érosion glaciaire: elles forment des fjords de largeur constante, à bords verticaux.

fractales

Les ammonites



Sutures de *Phylloceras heterophyllum* (Lias, 180 Ma)

Les lignes de suture des loges

Les sutures des loges des ammonites se développent en fractales, avec un nombre de divisions croissant avec la distance au centre et avec le nombre de loges. Ce mode de suture assure une étanchéité totale des loges internes (réservoirs d'air pour les mouvements verticaux), entre 0 m et 600 m de fond.

fractales

Une dendrite minérale



Dendrite de todorokite, fjord d'Ultima Esperanza (Patagonie, Chili)

La todorokite, $(\text{Mn,Ca,Mg})\text{Mn}_3\text{O}_7 \cdot \text{H}_2\text{O}$, est un oxyde hydraté de manganèse, calcium et magnésium, qui croît dans les fentes des roches en structures ouvertes, semblables à celles de certaines de nos mousses.

fractales

Les frondaisons



Jacaranda mimosifolia en fleurs, La Palma (Canaries)

Le système de branches est fractal: à chaque branchement le motif est reproduit avec les mêmes angles, courbures et rapports de longueur, de la branche maîtresse à la brindille terminale portant fleurs et feuilles.

fractales

Le monde des lichens



Cladonia arbuscula

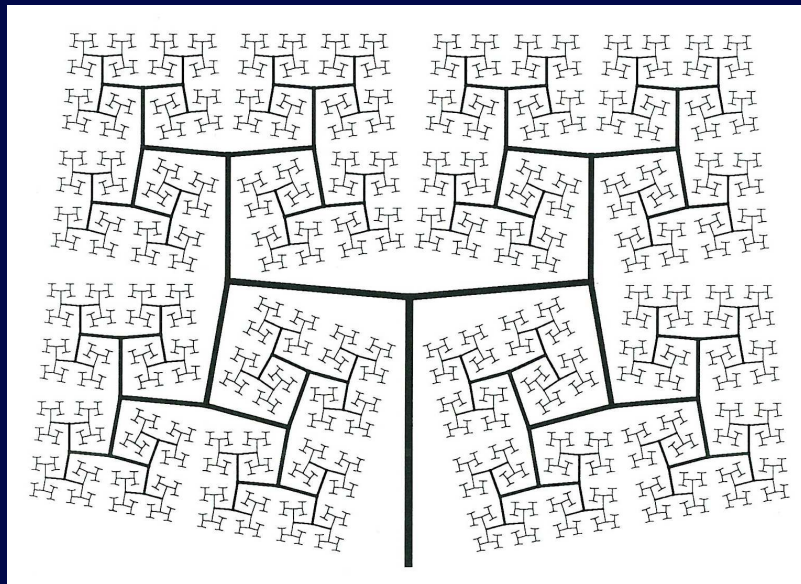
Les fractales de type L caractérisent les structures avec bifurcations: elles précisent le nombre de segments, le rapport de taille d'éléments consécutifs et les angles des segments avec le segment précédent. *Cladonia arbuscula* possède une structure fractale de type L à division binaire.

fractales

Les nervures des feuilles



Les nervures des feuilles du merisier



Un réseau fractal de nervures synthétiques

Réseau de nervures calculé avec une fractale de type L, à 10 niveaux, avec angles des bifurcations 85 degrés et rapport de taille R 0.687. Avec R inférieur à 0.707, les nervures ultimes ne se recoupent jamais; l'irrigation est uniforme sur toute la surface de la feuille. Les réseaux réels montrent des pontages (anastomoses), qui assurent la circulation même si la feuille est endommagée.

fractales

Les dragonniers



Dracaena draco, Tenerife

En haut, après mille ans de croissance,
en bas, après quelques décennies

Le dragonnier croît par division simultanée des tiges, en segments de plus en plus courts, au début par 3-4, puis par 2, une fois tous les 15 ans environ.

Après quelques siècles, la plante forme un double cône : celui de la frondaison, qui porte des rosettes de feuilles et des fleurs aux extrémités, et celui des racines, qui s'étalent à la surface du sol.



fractales

Les fougères en arbre



Cyathea, île de la Réunion

Dans le genre *Cyathea*, le motif de base des feuilles est répété 3 fois. La genèse des frondes se réalise par le déroulement de 3 spirales, chacune incluse dans la précédente.

La structure 3D de la *Cyathea* lui assure un captage optimal de la lumière et de la pluie.



fractales

Les inflorescences



L'inflorescence du broccoli Romanesco

Ce chou-fleur montre des spirales de cônes primaires, de taille croissante avec la distance au sommet. Ces cônes sont eux-mêmes constitués de cônes secondaires disposés en spirale, des plus petits aux plus grands. Les cônes secondaires sont à leur tour constitués de cônes tertiaires. C'est un cas typique de structure fractale auto-similaire (à motif identique) à trois niveaux.

fractales

Impressum

Conception

Michel Grenon

SPHN et Observatoire de Genève
Faculté des Sciences, UNIGE

Modèles informatiques

Concept et réalisation

Shaula Fiorelli Vilmar
Pierre-Alain Cherix

Section de Mathématiques
Faculté des Sciences, UNIGE

Textes et figures

Michel Grenon

Observatoire de Genève

Intégration informatique

Jean-Luc Guidon

DSIC, Direction des systèmes
d'Information et Communication

DSIC

DSIC et CJB

Matériel informatique

Installation

Electricité

Florian Gay

Bernard Renaud

Conservatoire et Jardin

botaniques de Genève (CJB)

Posters muraux

Conception et réalisation

Michel Grenon

Observatoire de Genève

Impression

Daniel Pfenniger

Observatoire de Genève

Accrochage

Bernard Renaud

CJB

Aménagements, décoration

Didier Roguet

CJB

Bernard Renaud

CJB

Isabelle Meier

CJB

Communication, médiation

Communication

Gisèle Visinand

CJB

Médiation

Magali Stitelmann

CJB

Soutien financier

Ville de Genève

CJB

Département de la Culture

Conservatoire et Jardin

botaniques de Genève

Société de Physique et

d'Histoire Naturelle, Genève

SPHN

Coordination

Didier Roguet, commissaire

CJB

Direction

Pierre-André Loizeau

CJB