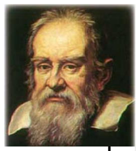
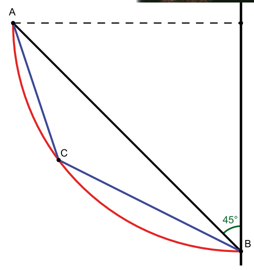
Quel est le toboggan le plus rapide?

1638: Galilée pense que la courbe plus rapide est un arc de cercle (*Discours sur deux sciences nouvelles*).





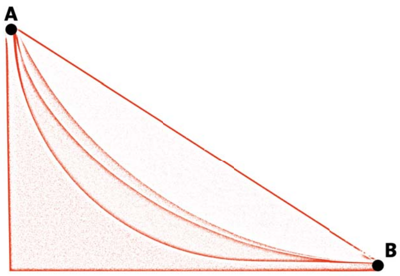
1696:
Johann Bernoulli propose un défi à la communauté mathématique dans le journal scientifique *Acta Eruditorum*. L'enjeu est de trouver

la courbe brachistochrone

du grec *brakhisto* = court

chronos = temps

C'est une des première fois dans l'histoire que la réponse à un problème n'est pas un nombre mais l'équation d'une courbe.



Étant donnés deux points A et B de hauteurs différentes, quelle est la courbe tracée par un point sur lequel agit uniquement la gravité, qui part du point A et arrive au point B le plus rapidement possible?

Quatre mathématiciens relèvent le défi de Johann Bernoulli:


Jacob Bernoulli

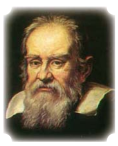

I. Newton

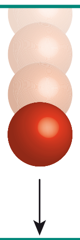

G. W. Leibniz


marquis de l'Hôpital

La réponse la plus élégante est celle de Johann Bernoulli.
En termes contemporains, il aboutit à cette **équation différentielle**:

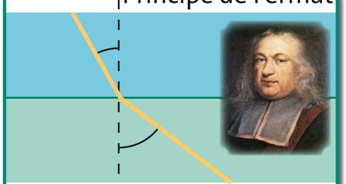
Calculs de Galilée



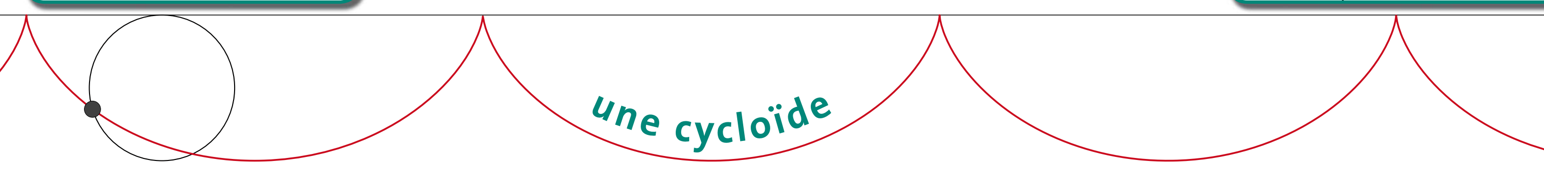


$$y(x)(1+y'(x)^2) = -D$$

Principe de Fermat



dont la solution est:



une cycloïde

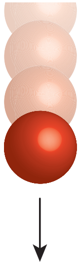
Conception : Shaula Fiorelli Vilmart

L'expérience de pensée de Johann Bernoulli

La lumière emprunte toujours le chemin le plus rapide.

Partant de ce principe, Johann Bernoullli établit son expérience de pensée pour trouver la courbe brachistochrone; cette courbe est le trajet suivi par un rayon de lumière dans un milieu où la vitesse de la lumière est égale à la vitesse induite par l'attraction terrestre.

Calculs de Galilée



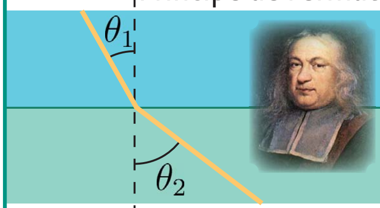
$$v = \sqrt{2gh}$$

où g est l'attraction terrestre et h représente la perte d'altitude par rapport au point de départ

L'idée est de subdiviser l'espace entre les deux points en des couches minces. Dans chacune de ces couches, la lumière se propage en ligne droite. Mais lorsque la lumière passe d'une couche à l'autre, elle est déviée selon le **Principe de Fermat**.

L'indice de réfraction de chaque couche sera tel que la vitesse de la lumière aura exactement la vitesse de chute d'un corps à la même altitude. Cette vitesse de chute est déterminée par les **calculs de Galilée**.

Principe de Fermat



$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2} = \text{Constante}$$

où θ_1 et θ_2 représentent l'angle par rapport à la verticale

En insérant la formule de Fermat dans la formule de la vitesse établie par Galilée, on constate deux choses:

1. Au point de départ, lorsque la vitesse est nulle, l'angle doit nécessairement être nul.
   Donc la courbe brachistochrone est tangente à la verticale au point de départ.
2. La vitesse est bornée, car le sinus ne peut pas être supérieur à 1. Cette vitesse maximum est atteinte lorsque le rayon passe par l'horizontale.

On suppose que la particule part du point (0,0) et que la vitesse maximale est atteinte à l'altitude *-D*. Les conditions au bord impliquent donc que

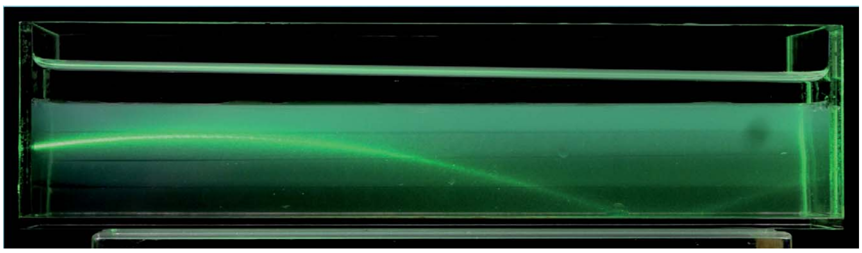
$$\frac{\sin\theta}{\sqrt{-2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2gD}}$$

Sachant que la particule se déplace sur une courbe, on a la relation $\sin\theta = \dfrac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$

En insérant cette expression dans la formule précédente et en réarrangeant les termes, on trouve:

$$\boxed{y(x)(1 + y'(x)^2) = -D}$$

Et voici la réalisation de l'expérience de pensée de Johann Bernoulli:



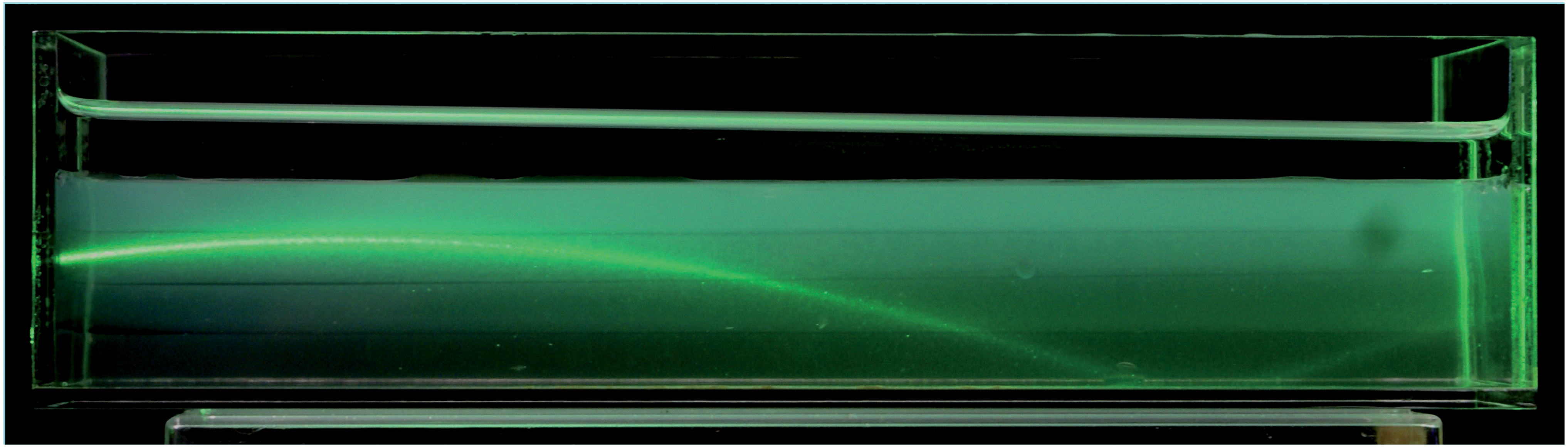
Si vous voulez voir l'expérience en vrai et en savoir plus sur les rayons lumineux traversant des milieux différents, allez voir nos amis chimistes !

Conception : Shaula Fiorelli Vilmart

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

L'expérience de pensée de Johann Bernoulli

Et voici la réalisation de l'expérience de pensée de Johann Bernoulli:



Si vous voulez voir l'expérience en vrai et en savoir plus sur les rayons lumineux traversant des milieux différents, allez voir nos amis chimistes !

Conception : Shaula Fiorelli Vilmart