FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

UNIVERSITÉ DE GENÈVE

# Sans frontière, pas de limite

## ou l'étrange démarche des mathématiciens

Posons un problème à un mathématicien. Que fait-il ?

Avant tout, je me demande si ce problème a une solution, par exemple en faisant une approximation. Ensuite, je vérifie si celle-ci est unique ou non.

Mais comment les mathématiciens peuvent-ils s'assurer de l'existence d'une solution sans la trouver explicitement ?

### Existe-t-il un nombre X dont le carré vaut 2 ?

Essayons d'encadrer ce nombre.

$1^2 = 1$ c'est trop petit et $2^2 = 4$ c'est trop grand. Donc, en première approximation, $1 < X < 2$.

Comme $(1{,}1)^2 = 1{,}21 < (1{,}2)^2 = 1{,}44 < (1{,}3)^2 = 1{,}69 < (1{,}4)^2 = 1{,}96 < (1{,}5)^2 = 2{,}25$ ...

... je peux même dire que $1{,}4 < X < 1{,}5$.

Voire même $1{,}41 < X < 1{,}42$ puisque $(1{,}41)^2 = 1{,}9881$ et $(1{,}42)^2 = 2{,}0164$

Et ainsi de suite
$1{,}414 < X < 1{,}415$
$1{,}4142 < X < 1{,}4143$
$1{,}41421 < X < 1{,}41422$
....

Si la suite de nombres 1 ; 1,4 ; 1,41 ; 1,414 ; 1,4142 ; 1,41421 ; 1,414213 ... se tasse vers une valeur, cette valeur limite sera le X cherché. On appelle ce nombre la racine carrée de deux et on le note $\sqrt[2]{2}$.

Attention! J'ai démontré depuis longtemps que $\sqrt[2]{2}$ n'est pas rationnel.

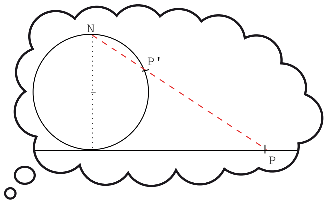


Un **trou** ! Voici le premier problème que peut rencontrer un mathématicien. En effet, si on se limite aux nombre rationnels, la suite se tasse bien mais elle n'atteindra jamais la valeur limite qu'est $\sqrt[2]{2}$.

Je sais résoudre ce problème! Il me suffit de **compléter** l'espace.

En mathématiques, *compléter un espace E* signifie construire un nouvel espace qui contient E ainsi que tous les éléments qui permettent de «boucher les trous». Dans notre exemple, cela revient à construire les nombres réels

Deuxième problème, la suite peut ne pas se tasser mais **partir de plus en plus loin**, à l'infini.




Je sais aussi résoudre ce problème! Il me suffit de **compactifier** l'espace.

En mathématiques, *compactifier un espace E* signifie comprimer E pour l'inclure dans un espace limité et contenant ses bornes.

Conception : Shaula Fiorelli Vilmart

# Sans frontière, pas de limite

## ou comment mettre un espace infiniment grand dans un espace borné

Pour pouvoir trouver la limite d'une suite qui tend vers l'infini dans mon espace de départ, je le compactifie !

Toutefois, un problème se pose: lorsque je compactifie, je change aussi la manière de mesurer les distances.

Si je change la distance, mon nouvel espace ne ressemblera plus à l'espace de départ ?

Non, mais je pourrai mieux comprendre le sujet de mon étude.

Faisons un exemple : prenons un voyageur français.

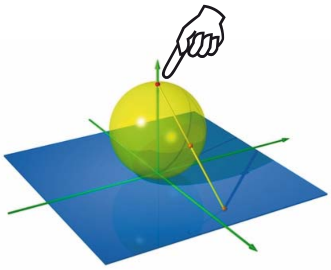
S'il voyage en voiture, il préfèrera une carte où il peux mesurer des distances kilométriques.


S'il voyage en train, une carte qui illustre les temps de parcours lui sera plus utile.

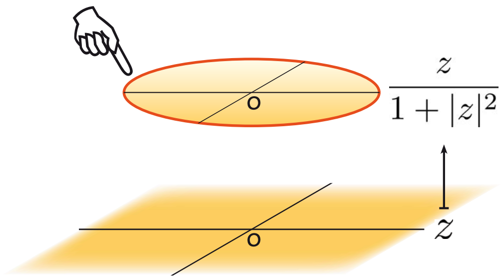
## Différentes compactifications du plan

Suivant mes besoins, je peux choisir une compactification du plan.

Tout dépend de la forme que je veux donner à l'infini.

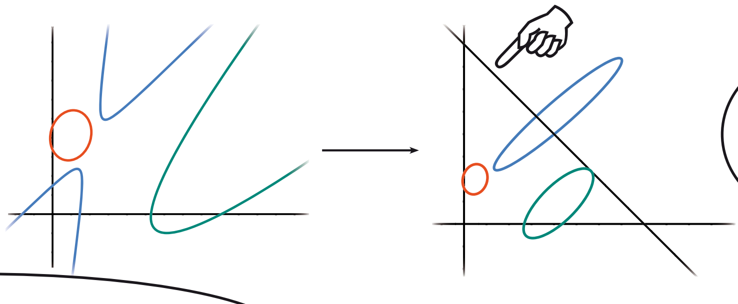


Ici, l'infini est un point unique.




Ici, c'est un cercle.

M.C. Escher - Limite circulaire I (1958)



Et ici, c'est une droite.

Maintenant qu'on a l'infini, toute suite admet un point d'adhérence.

Conception : Shaula Fiorelli Vilmart