

Étude de cercles tangents à des coniques

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Genève

pour obtenir le grade de

Docteur ès Sciences de l'Université de Genève, mention Mathématiques

par

Shaula FIORELLI VILMART

(Genève)

Thèse N° 4160

GENÈVE

Atelier d'impression ReproMail de l'Université de Genève

2009



**UNIVERSITÉ
DE GENÈVE**

FACULTÉ DES SCIENCES

**Doctorat ès sciences
mention mathématiques**

Thèse de *Madame Shaula FIORELLI VILMART*

intitulée :

" Etude de cercles tangents à des coniques "

La Faculté des sciences, sur le préavis de Messieurs T. VUST, docteur et directeur de thèse (Section de mathématiques), A. ALEKSEEV, professeur ordinaire (Section de mathématiques), P.-A. CHERIX, docteur (Section de mathématiques) et V. KLEPTSYN, docteur (Université de Rennes - Centre National de la Recherche Scientifique - Institut de Recherche mathématiques de Rennes - Unité mixte de recherche 6625 - Rennes, France), autorise l'impression de la présente thèse, sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont énoncées.

Genève, le 10 décembre 2009

Thèse - 4160 -



Le Doyen, Jean-Marc TRISCONE

N.B. - La thèse doit porter la déclaration précédente et remplir les conditions énumérées dans les "Informations relatives aux thèses de doctorat à l'Université de Genève".

Nombre d'exemplaires à livrer par colis séparé à la Faculté : - 4 -

à Mamma

à Felice

à Gilles

Remerciements

Un ami m'a dit que faire une thèse c'est comme se promener sur l'un de mes dessins : on part de très loin, on arrive sur un point de rebroussement et on change complètement de direction pour arriver ensuite asymptotiquement vers la fin. Par chance, le long du chemin il y a de nombreuses personnes pour nous guider, nous encourager et rendre inoubliables ces cinq années passées à résoudre un problème. Il est maintenant temps de remercier ces personnes.

Mes premières pensées vont à Felice Ronga qui a cru en moi et m'a donné un sujet de thèse passionnant.

Ma plus sincère gratitude va à Thierry Vust qui m'a recueillie lorsque Felice nous a quittés. Il a eu la patience de me diriger dans un sujet qui n'était pas le sien mais qui, je l'espère, lui a donné du plaisir.

Je suis très reconnaissante à Anton Alekseev, Pierre-Alain Cherix et Victor Kleptsyn qui m'ont fait l'honneur d'être membres du jury de soutenance. Un merci particulier à Victor Kleptsyn qui m'a aidé à transformer mes paraboles en droites et à voir d'un autre œil mes pelotes de courbes et mes systèmes d'équations.

Un autre grand merci à Pierre-Alain qui m'a permis de découvrir le monde magique de la vulgarisation scientifique au travers des collaborations avec, entre autres, le Musée d'histoire des sciences et sa Nuit de la science, le Jardin botanique et la Commission de l'Enseignement des Mathématiques. Grâce à lui, je suis devenue une spécialiste en percolation (de café), en pliages, en pives et en fougères !

Une thèse ne se fait pas sans recherches bibliographiques, c'est pourquoi je tiens à remercier Bernard Duzet et Anne-Sophie Crippa qui, outre des bibliothécaires efficaces et dynamiques, sont devenus au fil des ans des conseillers et des amis.

Je tiens aussi à remercier Annick Schmid et Najat Martinez, secrétaires de la Section, pour leur gentillesse.

Je remercie chaleureusement le Swiss Doctoral Program in Mathematics et ses directeurs dynamiques Bruno Colbois et Norbert Hungerbühler, pour les nombreuses et sympathiques rencontres de l'École Doctorale, et pour avoir financé certains déplacements.

Une section de mathématiques est une petite île où les assistants arrivent et repartent au gré des vents scientifiques. Un grand merci à Jérémy, Daniele, Benjamin, Felix, Alfredo, Heike, Rudolf, Jérôme, Emanuela, Macha, Yves et Yves, Nicola, Hugo, Renaud, Sébastien, Cyrille, Mucyo, Paola, Michele, Andrea, Luca et tous les autres. Un merci tout particulier à Grégoire, Benoît, Vincent, José et Madalina.

On dit souvent que pour aimer les math, il faut un professeur qui les fasse vivre. Ce professeur est pour moi Laurence Merminod, du Collège Calvin, qui, en premier, m'a fait découvrir la beauté des mathématiques.

Enfin, je remercie ma famille à commencer par ma mère qui m'a encouragée et soutenue jusqu'au bout. Merci à mon père qui m'a toujours soutenu avec fierté en me laissant toujours libre de mes choix. Un grand merci pour tout à ma sœur Sarah, à ma Nonna Hilde, à mon oncle Alberto à mon cousin Livio et sa petite famille et à toute ma famille pour m'avoir encouragée durant ces cinq années.

Je termine par un grand merci à mon mari conseiller-relecteur-encourageur Gilles, à qui l'on doit de nombreux dessins de cette thèse.

Table des matières

Introduction	1
I Trois coniques	5
1 Construction d'une configuration avec 136 cercles	7
1.1 Énoncé du résultat principal	7
1.2 Propositions principales	8
1.3 Preuve du Résultat principal	13
1.4 Preuve de la Proposition 1.2.8	14
1.4.1 Normalisation	14
1.4.2 Situation	16
1.4.3 Hyperboles d'asymptotes fixées tangentes à des cercles de centre fixé	17
1.4.3.1 Du cercle au point de tangence	18
1.4.3.2 Du point de tangence à l'hyperbole	21
1.4.3.3 Étude des fibres de $\tilde{E}_{P^0}$ au voisinage de R^0	23
1.4.3.4 Étude des fibres de $\tilde{E}_{P^0}$ au voisinage de L_i^0	25
1.4.4 De un à trois	27
2 Au voisinage des droites doubles	33
2.1 Des coniques aux cercles	33
2.2 Interprétation géométrique	35
2.2.1 Coniques complètes	35
2.3 De l'expérience à la théorie	37
2.4 Preuve du Théorème 2.3.2	40
2.4.1 Transformation du système	40
2.4.2 Linéarisation du système (2.4)	41
2.4.3 Preuve de (3)	43
2.5 Conséquences du Théorème 2.3.2	46
II Une hyperbole, une droite et un point	49
3 Lieu des centres des cercles	51
3.1 Généralités	51
3.1.1 Une paramétrisation de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$	53
3.1.2 À propos des asymptotes de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$	54
3.1.3 À propos des cercles osculateurs	55
3.1.3.1 La développée de l'hyperbole	60
3.1.4 À propos de la courbure de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$	62
3.1.5 À propos des cercles bitangents	63

3.1.6	En résumé	66
3.1.6.1	À propos de la position relative des points remarquables . .	67
3.2	Allure de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$	69
3.2.1	Cas où l'hyperbole est dégénérée en deux droites	69
3.2.2	Point F à l'intérieur de l'hyperbole	70
3.2.2.1	Point à l'intérieur d'un cercle hyperosculateur	70
3.2.2.2	Point à l'extérieur des cercles hyperosculateurs	70
3.2.3	Point F à l'extérieur de l'hyperbole	72
3.2.3.1	Point à l'extérieur des asymptotes	72
3.2.3.2	Point à l'intérieur des asymptotes	74
4	Le nombre maximal de cercles	79
4.1	La transformation	79
4.2	À propos de la courbure de la transformée de $\mathcal{S}_{q,F}$	80
4.3	Étude de l'intersection d'une droite avec la transformée de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$.	83
4.3.1	Point F à l'intérieur de l'hyperbole	88
4.3.1.1	Point F à l'intérieur d'un cercle hyperosculateur	88
4.3.1.2	Point F à l'extérieur des cercles hyperosculateurs	90
4.3.2	Point F à l'extérieur de l'hyperbole	94
4.3.2.1	Point F à l'extérieur des asymptotes	103
4.3.2.2	Point F à l'intérieur des asymptotes	108
4.3.3	Conclusion	113
5	Construction d'une configuration maximale	115
5.1	Résultats préliminaires	115
5.1.1	À propos des cercles osculateurs tangents entre eux	115
5.1.2	Position relative du profil d'un cusp par rapport à la développée $\mathcal{L}_q$.	121
5.1.3	Profils des cusps lorsque les cercles osculateurs sont tangents	122
5.2	Construction de la configuration maximale	127
Perspectives		131
III	Annexes	135
A	Preuve des Assertions 1.4 et 1.5	137
B	Figures en couleur	145
B.1	Chapitre 1	145
B.2	Chapitre 2	147
B.3	Chapitre 4	148
B.4	Chapitre 5	149
C	Code Maple permettant de trouver les 10 cercles tangents	151
Bibliographie		155
Table des figures		157

Introduction

Bref historique du problème Notre aventure commence avec deux célèbres problèmes de géométrie énumérative. Le premier est le problème d'Apollonius de Perge (env. 200 av. J.-C.) :

Problème (Apollonius). *Trouver le nombre maximal de cercles tangents à trois cercles donnés.*

Viète en donne la solution dans son *Apollonius Gallus* à la fin du XVIIe siècle : le nombre maximal est 8 (voir Fig. 1).

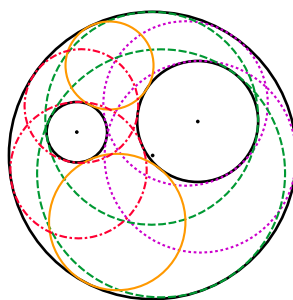


FIGURE 1 – 8 cercles tangents à 3 cercles donnés

Le deuxième est un problème classique de géométrie énumérative proposé en 1848 par J. Steiner :

Problème (Steiner - 1848). *Trouver le nombre maximal de coniques tangentes à cinq coniques données.*

Ce problème a été résolu en 1859 par de Jonquières et, en 1864, par Chasles, qui proposa une méthode permettant de plus de résoudre d'autres problèmes similaires : il existe 3264 coniques tangentes à cinq coniques données. Cependant, parmi ces 3264 coniques, il peut y avoir un certain nombre de coniques complexes. Ce n'est qu'en 1997 que F. Ronga, A. Tognoli et T. Vust ([RTV97]) donnent une configuration de cinq coniques réelles telle que les 3264 coniques tangentes soient toutes réelles. Cette solution se trouve au voisinage d'une configuration de cinq coniques chacune dégénérée en une paire de droites (voir Fig. 2). En 2005, J.-Y. Welschinger ([Wel06]) apporte sa contribution en démontrant que, pour cinq coniques d'intérieurs disjoints, il existe toujours au moins 32 coniques réelles tangentes à ces cinq coniques .

Le problème traité dans ce travail est en fait le mariage entre les deux problèmes précédents :

Problème. *Trouver le nombre maximal de cercles (réels) tangents à trois coniques réelles données.*

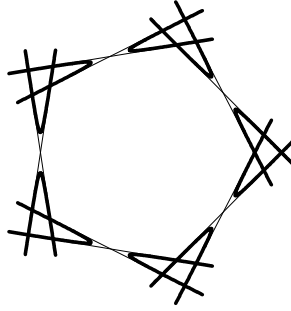


FIGURE 2 – Esquisse d’une configuration de cinq coniques réelles fournissant 3264 coniques réelles tangentes

Ce travail s’articule en deux parties ; dans la première, nous étudions le problème général, tandis que dans la deuxième partie, nous analysons un cas particulier.

Aperçu de la Première partie. Dans la Première partie, nous nous attaquons directement au problème proposé. Une première approche, traitée dans le **Chapitre 1**, consiste à adapter la méthode proposée dans [RTV97] ; autrement dit, on se place au voisinage d’une configuration de trois coniques dégénérées chacune en une paire de droites. On a alors le résultat suivant :

Théorème (Thm 1.1.1 et Corollaire p.14). *Il existe un triplet $\underline{r}^0$ de coniques dégénérées en deux droites tel que, dans un voisinage de $\underline{r}^0$, il existe un triplet d’hyperboles lisses $\underline{q}$ tel que le nombre de cercles tangents aux trois coniques du triplet $\underline{q}$ soit 136.*

De plus, 136 est le nombre maximal de cercles que l’on peut trouver au voisinage d’une configuration de trois coniques dégénérées en paires de droites.

En géométrie projective, un cercle n’est autre qu’une conique réelle passant par les deux points conjugués complexes $[1 : \pm i : 0]$. On remarque que le groupe des transformations projectives réelles du plan agit transitivement sur les paires de points conjugués complexes. Ainsi, nous pouvons reformuler notre problème de la manière suivante :

Problème. *Trouver le nombre maximal de coniques réelles tangentes à trois coniques réelles données et passant par deux points conjugués complexes distincts donnés.*

Cependant, le nombre de solutions complexes à ce problème est 184, et non 136¹. De plus, en s’inspirant de [RTV97], on peut trouver une configuration réelle de trois coniques lisses et deux points réels telle que le nombre de coniques passant par ces deux points et tangentes à ces trois coniques soit 184. On en déduit que, lorsque deux points réels deviennent complexes conjugués (non réels), on perd un certain nombre de solutions. Cette intuition est corroborée par le fait suivant : lorsque l’on observe le nombre maximal de coniques réelles et de cercles tangents à deux droites données et passant par le nombre adéquat de points, on remarque ce nombre est quatre pour les coniques tandis qu’il est de seulement deux pour les cercles (voir Fig. 3).

L’objet du **Chapitre 2** est donc d’étudier l’éventuel changement du nombre de coniques tangentes à trois coniques données et passant par deux points lorsque les deux points réels se confondent en un point double avant de passer dans le domaine complexe. Pour ce faire,

1. Pour une démonstration du fait que 184 est le nombre de solutions complexes à ce problème voir par exemple [BKT08].

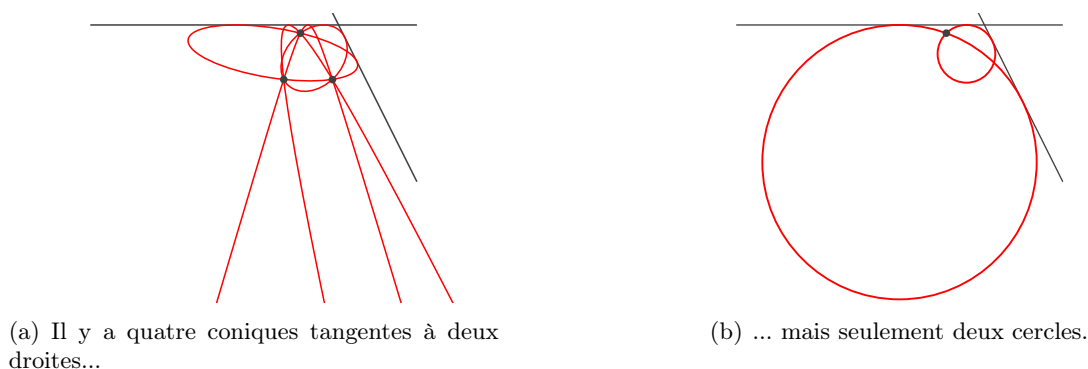


FIGURE 3 – Une différence entre coniques et cercles

nous fixons trois coniques réelles q_1 , q_2 et q_3 , un point P , un vecteur v et nous étudions les coniques tangentes aux trois coniques fixées et passant par les deux points $P + i\sqrt{\varepsilon}v$ et $P - i\sqrt{\varepsilon}v$ paramétrés par le scalaire réel ε . Des expériences numériques montrent qu'il existe deux comportements possibles lorsque ε tend vers 0. Certaines coniques deviennent tangentes à la droite passant par P et dirigée par le vecteur v tandis que d'autres dégénèrent en des droites doubles passant par le point P ; ce sont ces dernières qui deviennent purement complexes lorsque les points $P \pm i\sqrt{\varepsilon}v$ deviennent complexes conjugués.

Pour étudier les coniques qui dégénèrent en droites doubles passant par le point P , nous utilisons la notion de *conique complète*, présentée dans le livre de J. Harris [Har95]. Une conique dégénérée en une droite double est tangente à toute courbe qu'elle intersecte, au sens où elle possède un point d'intersection de multiplicité deux. Ainsi, toute droite double passant par le point P et intersectant les trois coniques fixées leur est tangente. Or, nous désirons étudier les seules coniques dégénérées qui sont limites d'une conique lisse tangente aux trois coniques. L'idée des coniques complètes est donc d'ajouter deux points marqués à la droite double et de changer la condition de tangence : une conique complète est tangente à une courbe donnée

- si la droite qui soutient la conique dégénérée est tangente à la courbe,
- ou bien si la droite intersecte la courbe à l'un des points marqués.

Ainsi, une conique complète est limite d'une famille de coniques lisses.

Le Théorème 2.3.2 montre que la disparition ou l'apparition de solutions réelles dépend de la position relative du point P et du point de tangence entre la conique complète et l'une des coniques fixées par rapport aux points marqués de la conique complète. Il permet de plus d'expliquer la disparition de 48 coniques au voisinage d'une configuration de trois coniques dégénérées en deux droites. Cependant, il peut a priori exister une configuration de trois coniques réelles et de deux points réels telle que le nombre de coniques tangentes à ces trois coniques et passant par ces deux points soit compris entre 136 et 184, lorsque les deux points considérés deviennent complexes conjugués.

Aperçu de la Deuxième partie. Dans la deuxième partie, nous considérons une version plus simple du problème initial à savoir :

Problème. *Trouver le nombre maximal de cercles tangents à une hyperbole et une droite données et passant par un point donné.*

Nous avons choisi ce problème en particulier, car il s'agit de la configuration la plus simple d'une conique lisse et de deux coniques (fortement) dégénérées telle que le nombre

total de coniques (éventuellement complexes) tangentes est égal au nombre de coniques réelles tangentes mais différent du nombre de cercles prévu par la méthode utilisée dans le Chapitre 1. En effet, le Théorème de Bézout prédit 12 coniques (complexes) tangentes à une hyperbole, une droite et passant par trois points et la méthode décrite dans [RTV97] permet effectivement de construire 12 coniques réelles passant par trois points réels et tangentes à une hyperbole et une droite. Cependant, le nombre de cercles tangents à une hyperbole, une droite et passant par un point (plus les deux points conjugués complexes $[1 : \pm i : 0]$) obtenus avec la méthode utilisée dans le Chapitre 1 est de seulement 8. Le but de la Deuxième partie est donc de répondre à la question suivante : est-ce que 8 est bien le nombre maximal de cercles tangents à une hyperbole, une droite et passant par un point fixés ?

Une première approche pour trouver le nombre de cercles tangents à une hyperbole, une droite et passant par un point fixés est d'étudier un certain polynôme de degré 12 et de déterminer le nombre de racines réelles. Cependant, une approche géométrique se relève plus efficace. L'idée est la suivante : on sait que le lieu des centres des cercles tangents à une droite et passant par un point est la parabole de directrice la droite fixée et de foyer le point fixé. Construisons alors le lieu des centres des cercles tangents à une hyperbole fixée et passant par un point et étudions son intersection avec la parabole.

Dans le **Chapitre 3**, nous étudions donc ce lieu qui possède un certain nombre de points singuliers intimement liés à des cercles tangents à l'hyperbole très particuliers. La manière la plus élégante pour décrire ce lieu est la suivante :

Théorème (Thm. 3.1.2). *Le lieu des cercles tangents à une hyperbole q et passant un point F fixé, noté $\mathcal{S}_{q,F}$, est l'enveloppe des médiatrices des segments $\overline{QF}$ pour tout point Q appartenant à l'hyperbole q .*

S'ensuit une description de l'allure de ce lieu pour les différentes positions respectives du point fixé F par rapport à l'hyperbole et ses asymptotes.

Dans le **Chapitre 4**, nous étudions l'intersection entre le lieu $\mathcal{S}_{q,F}$ et la parabole, lieu des centres des cercles passant par le point F et tangents à une droite donnée. L'étude de cette intersection peut se révéler très fastidieuse. L'idée est donc de transformer la parabole en une droite et d'étudier l'intersection de cette droite avec la transformée de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$. La transformation utilisée est l'application complexe bivaluée

$$\begin{aligned} \sqrt{\cdot} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sqrt{z} \end{aligned}$$

En effet, cette fonction envoie les paraboles dont le foyer est à l'origine sur des droites. Toute notre étude se base sur le fait que le signe de la courbure de la transformée $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ est le même que celui de l'hyperbole au point correspondant (Prop. 4.2.1). De plus, les composantes connexes de la transformée $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ privée de ses points singuliers vérifient les condition pour qu'il y ait équivalence entre courbure de signe constant et convexité. Ainsi notre étude repose essentiellement sur les propriétés des arcs convexes. Ceci nous permet de démontrer, contre toute attente, le résultat suivant :

Théorème (Thm. 4.0.2 et Chapitre 5). *Le nombre maximal de cercles passant par un point F et tangents à une droite d et à une hyperbole q est 10.*

Finalement, dans le **Chapitre 5**, nous construisons explicitement une configuration d'une hyperbole, une droite et un point fournissant le nombre maximal de cercles tangents, à savoir 10. L'idée principale est de choisir le point fixé au voisinage du point de tangence entre deux cercles osculateurs à l'hyperbole fixée.

Première partie

Cercles tangents à trois coniques

Chapitre 1

Construction d'une configuration avec 136 cercles

Dans ce chapitre, nous nous appuyons sur la méthode décrite par F. Ronga, A. Tognoli et T. Vust dans [RTV97] pour construire les 3264 coniques réelles tangentes à cinq coniques réelles. Leur idée est de se placer au voisinage d'une configuration de cinq coniques dégénérées chacune en deux droites. Il est en effet plus facile de compter le nombre de coniques tangentes à des droites et passant par des points. Le Théorème 8 de [RTV97] leur permet ensuite compter le nombre de solutions lorsqu'on passe des coniques dégénérées à des coniques lisses proches.

En supposant que le Théorème 8 de [RTV97] s'applique de la même manière aux cercles tangents à trois coniques, un simple argument de combinatoire permet d'affirmer qu'il existe au plus 136 cercles tangents à trois coniques lisses dans un voisinage de trois coniques dégénérées.

On se propose dans ce chapitre de démontrer qu'il existe une configuration de trois coniques lisses pour laquelle le nombre de cercles réels tangents à ces trois coniques est 136. Pour ce faire, nous donnons, dans la Proposition 1.2.8, un analogue du Théorème 8 qui s'applique spécialement à notre problème.

1.1 Énoncé du résultat principal

Notons $\mathbb{PQ}$ l'espace des coniques réelles du plan affine $\mathbb{R}^2$. Nous montrons que, pour un triplet $\underline{r}^0 = (r_1^0, r_2^0, r_3^0) \in (\mathbb{PQ})^3$ de coniques dégénérées en deux droites bien choisi, il existe un triplet $\underline{q} = (q_1, q_2, q_3) \in (\mathbb{PQ})^3$ d'hyperboles lisses¹ voisines de $\underline{r}^0$ dans $(\mathbb{PQ})^3$, tel que le nombre de cercles tangents aux coniques du triplet $\underline{q}$ soit égal à 136. Pour cela, notons $\mathcal{O}$ l'ensemble des cercles de $\mathbb{R}^2$ et considérons l'ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{O} \times (\mathbb{PQ})^3$ défini par :

$$\mathcal{T} = \left\{ (\mathcal{C}, q_1, q_2, q_3) \mid \text{le cercle } \mathcal{C} \text{ est tangent aux coniques } q_i, i = 1, 2, 3 \right\}$$

Nous étudions les fibres de la projection sur le deuxième facteur :

$$\begin{array}{ccc} \pi & : & \mathcal{T} \rightarrow (\mathbb{PQ})^3 \\ & & (\mathcal{C}, q_1, q_2, q_3) \mapsto (q_1, q_2, q_3) \end{array}$$

1. On précise ici que l'hyperbole est lisse, car par la suite nous appelons hyperboles non seulement les hyperboles au sens strict mais aussi les coniques dégénérées en deux droites.

Notons (E, P) un voisinage du point P dans l'espace topologique E . Le résultat principal peut alors être énoncé de la manière suivante :

Théorème 1.1.1. *Il existe un triplet de coniques dégénérées $\underline{r}^0 = (r_1^0, r_2^0, r_3^0) \in (\mathbb{P}\mathcal{Q})^3$ ayant la propriété suivante :
Dans un voisinage $((\mathbb{P}\mathcal{Q})^3, \underline{r}^0)$ du triplet $\underline{r}^0$, il existe un triplet d'hyperboles lisses $\underline{q} = (q_1, q_2, q_3)$ tel que le nombre de préimages par π du triplet $\underline{q}$ est égal à 136.*

Notation : Pour la suite, nous noterons toujours r les coniques dégénérées en deux droites, $R = (x_R, y_R)$ leur point singulier et $\underline{r}$ un triplet de coniques dégénérées.

1.2 Propositions principales

Définissons tout d'abord les ensembles dans lesquels nous travaillerons. Pour ce faire, munissons le plan $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé.

Définition 1.2.1. Notons $\mathcal{O}$ l'espace des cercles $\mathcal{C}$ du plan $\mathbb{R}^2$ dont on normalise l'équation sous la forme

$$\mathcal{C} = \{(x - u)^2 + (y - v)^2 - s^2 = 0\}.$$

En particulier, $\mathcal{O} \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0} \ni ((u, v), s)$.

Par la suite, nous distinguons quatre notions :

- l'espace des coniques en tant que courbes de $\mathbb{R}^2$, noté $\mathbb{P}\mathcal{Q}$, et la sous-variété $\mathbb{P}\mathcal{X}$ de $\mathbb{P}\mathcal{Q}$ des coniques dégénérées en deux droites ;
- l'espace des équations qui les donnent, noté respectivement $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{X}$ (Déf. 1.2.2) ;
- le sous-espace $\mathcal{X}_n$ de $\mathcal{X}$ des équations normalisées de coniques dégénérées en deux droites, normalisation que l'on définira dans la Section 1.4.1 (Déf. 1.4.1) ;
- le sous-espace $\mathcal{X}_n$ de $\mathcal{Q}$ des équations d'hyperboles construites à partir d'un élément de $\mathcal{X}_n$ (Déf. 1.4.3).

Définition 1.2.2. Notons $\mathcal{X}$ l'espace des fonctions quadratiques qui définissent les coniques r du plan dégénérées en deux droites (non parallèles).

- Si le point singulier R de la conique dégénérée r est l'origine, l'équation de la conique r prend la forme

$$r(x, y) = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

où A est une matrice symétrique de déterminant non nul et de signature $\sigma(A) = (1, 1)$.
Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble de telles matrices.

- Si le point singulier R a pour coordonnées $(x_R, y_R) \neq (0, 0)$, l'équation de la conique r prend la forme

$$r(x, y) = (x - x_R, y - y_R)A^\ell \begin{pmatrix} x - x_R \\ y - y_R \end{pmatrix} = 0 \quad (1.1)$$

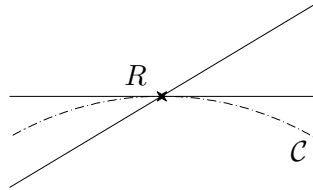
où A^ℓ est une matrice associée à la conique $r^\ell \in \mathbb{P}\mathcal{X}$ dont les droites sont parallèles à celles de r et dont le point singulier est à l'origine $(0, 0)$.

En particulier $\mathcal{X} \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathcal{A} \ni ((x_R, y_R), A)$.

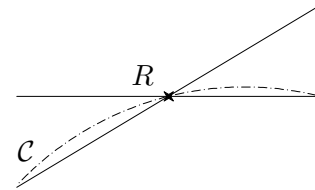
Comme nous étudions les cercles tangents à des coniques dégénérées, il s'agit maintenant de définir ces tangences.

Définition 1.2.3. Un cercle est *tangent* à une conique dégénérée en deux droites s'il est tangent à l'une des droites ou s'il passe par le point singulier.

Définition 1.2.4. Une tangence d'un cercle à une conique dégénérée en deux droites est dite *dégénérée* si le cercle passe par le point singulier en étant tangent à l'une des deux droites (voir Fig. 1.1(a)). Dans le cas contraire, on parle de tangence *non dégénérée* (voir Fig. 1.1(b)).



(a) Une tangence dégénérée



(b) Une tangence non dégénérée

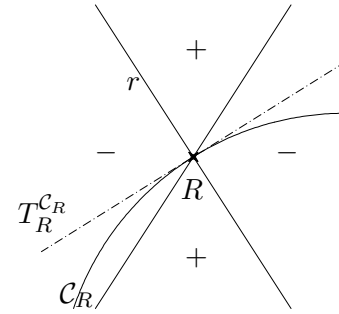
FIGURE 1.1 – Les tangences dégénérées et non dégénérées

Soit $r \in \mathbb{P}\mathcal{X}$ une conique dégénérée en deux droites et un cercle $\mathcal{C}_R \in \mathcal{O}$ passant par le point singulier R de la conique et tangent à r de manière non dégénérée.

La conique r sépare le plan en quatre secteurs auxquels nous allons associer des signes.

Définition 1.2.5. Soit $T_R^{\mathcal{C}_R}$ la droite tangente au cercle $\mathcal{C}_R$ au point R .

Si $\mathcal{C}_R$ est tangent de manière non dégénérée à la conique r , la droite $T_R^{\mathcal{C}_R}$ est contenue dans deux secteurs de r . Ces secteurs seront alors les *secteurs négatifs de r définis par le cercle $\mathcal{C}_R$* (Voir Fig. 1.2).

FIGURE 1.2 – Les secteurs négatifs de r définis par le cercle $\mathcal{C}_R$

Le point singulier d'une conique dégénérée peut être lissé de deux manières (voir Fig. 1.3). Suivant comment la conique est lissée, il y aura plusieurs cercles proches du cercle initial et tangents à l'hyperbole ou aucun. La définition et la proposition suivantes l'énoncent de manière rigoureuse.

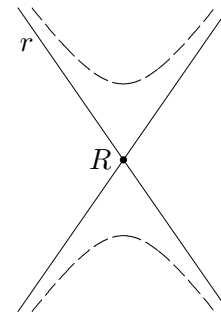
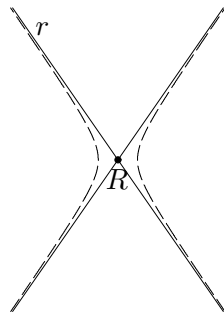


FIGURE 1.3 – Les deux manières de lisser le point singulier d'une conique dégénérée

Définition 1.2.6. Soit une conique dégénérée $r \in \mathbb{P}\mathcal{X}$ et $\mathcal{C}_R$ un cercle de centre (u, v) tangent de manière non dégénérée à r au point singulier R . Soit une hyperbole $q \in (\mathbb{P}\mathcal{Q}, r)$.

- Si les asymptotes de q sont les droites de r , on dit que la conique q est *en accord avec le cercle* $\mathcal{C}_R$ si elle est incluse dans les secteurs positifs de r définis par le cercle $\mathcal{C}_R$.
- Sinon, soit r_q les asymptotes de la conique q vues comme une conique dégénérée et $\mathcal{C}_Q$ le cercle concentrique à $\mathcal{C}_R$ passant par le point singulier de r_q . La conique q est dite *en accord avec le cercle* $\mathcal{C}_R$ si elle est en accord avec $\mathcal{C}_Q$.

Soit $\underline{r}_k$, $k = 1, \dots, 3$, un k -uplet de coniques dégénérées et un cercle $\mathcal{C}_k \in \mathcal{O}$ tangent aux coniques r_j en R_j , $j = 1, \dots, k$, de manière non dégénérée. On dit qu'un k -uplet $\underline{q}_k \in ((\mathbb{P}\mathcal{Q})^k, \underline{r}_k)$ d'hyperboles lisses est en accord avec le cercle $\mathcal{C}_k$ si chacune des coniques du k -uplet est en accord avec $\mathcal{C}_k$.

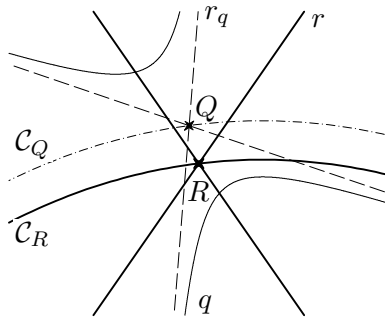


FIGURE 1.4 – Une conique en accord avec le cercle

Il est maintenant nécessaire d'introduire des conditions de généricité sur les triplets de coniques dégénérées $\underline{r}$. Notons $l_{1,j}$ et $l_{2,j}$ les deux droites de r_j et définissons le sous-ensemble de $\mathbb{P}\mathcal{X}$ constitué des triplets $\underline{r}$ tels que :

- (1) les points singuliers R_i ne sont pas alignés, (en particulier, $R_i \neq R_j$ pour $i \neq j$).
- (2) pour tout triplet $(i_1, i_2, i_3) \in \{1, 2\}^3$, les droites $l_{i_1,1}, l_{i_2,2}$ et $l_{i_3,3}$ ne sont pas concourantes.
- (3) pour tout $m, n \in \{1, 2, 3\}$ avec $m \neq n$, on a $R_m \notin r_n$.

Par abus de notation, nous continuerons d'appeler $\mathbb{P}\mathcal{X}$ ce sous-ensemble.

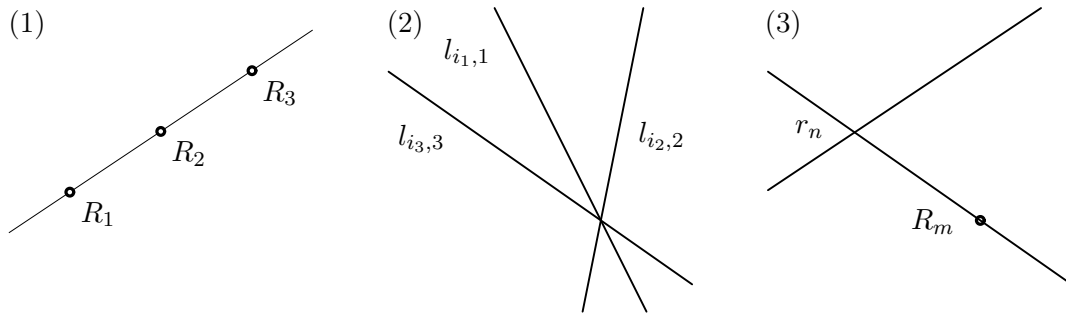


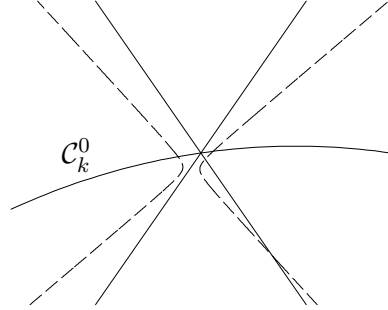
FIGURE 1.5 – Les configurations que l'on ne veut pas

Proposition 1.2.7. Soit $\underline{r}_k^0 = (r_1^0, \dots, r_k^0) \in (\mathbb{P}\mathcal{X})^k$, $k \in \{1, 2, 3\}$, un k -uplet de coniques dégénérées et $\mathcal{C}_k^0$ un cercle tangent à r_i^0 en R_i^0 de manière non dégénérée, $i = 1, \dots, k$.

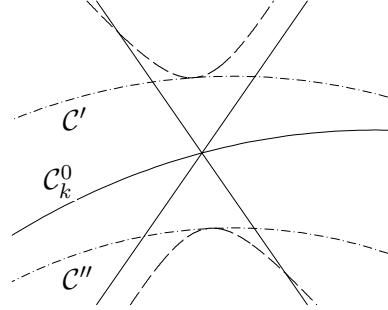
Soit $\underline{q}_k = (q_1, \dots, q_k)$ un k -uplet d'hyperboles dans un voisinage de $\underline{r}_k^0$. Alors deux cas se présentent :

- (i) si le k -uplet $\underline{q}_k$ n'est pas en accord avec le cercle $\mathcal{C}_k^0$, alors il n'y a aucun cercle tangent à $\underline{q}_k$ dans un voisinage de $\mathcal{C}_k^0$ (Fig. 1.6(a)) ;

- (ii) si le k -uplet $\underline{q}_k$ est en accord avec le cercle $\mathcal{C}_k^0$, alors il y aura 2^k cercles tangents à $\underline{q}_k$ dans un voisinage de $\mathcal{C}_k^0$ (Fig 1.6(b)).



(a) Proposition 1.2.7(i) : Aucun cercle dans un voisinage de $\mathcal{C}_k^0$ n'est tangent à la conique



(b) Proposition 1.2.7(ii) : Deux cercles dans un voisinage de $\mathcal{C}_k^0$ tangents à une conique dans un voisinage du point singulier

FIGURE 1.6 – Illustration de la Proposition 1.2.7

Par la suite, nous ferons un petit abus de vocabulaire : on dira qu'un cercle est tangent à un triplet de coniques $\underline{q}$ s'il est tangent à chacune des coniques du triplet.

Pour démontrer la Proposition 1.2.7, il est nécessaire d'introduire un système de coordonnées sur l'ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{O} \times (\mathbb{P}\mathcal{Q})^3$ en un voisinage $(\mathcal{T}, (\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0))$ contenant le k -uplet $\underline{q}_k$, où $\mathcal{C}_k^0$ et $\underline{q}_k$ sont respectivement le cercle et le k -uplet de coniques lisses de la Prop. 1.2.7.

Le système de coordonnées idéal doit d'une part admettre le point $(\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0)$ comme origine. D'autre part, les trois coordonnées d'un cercle $\mathcal{C}$ doivent être liées aux coordonnées des trois coniques auquel il est tangent de manière à traduire la Proposition 1.2.7.

La proposition suivante prouve l'existence d'un tel système de coordonnées.

Proposition 1.2.8. Soit un triplet de coniques dégénérées $\underline{r}^0 \in (\mathbb{P}\mathcal{X})^3$ et un nombre $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Soit un cercle $\mathcal{C}_k^0 \in \mathcal{O}$ tel que

- si $k \neq 0$, le cercle $\mathcal{C}_k^0$ est tangent aux coniques r_j en R_j , $j = 1, \dots, k$, de manière non dégénérée et aux droites $l_{i_{\bar{j}}, \bar{j}}^0$ de $r_{\bar{j}}^0$ en un point $L_{i_{\bar{j}}, \bar{j}}^0$, pour $\bar{j} = k+1, \dots, 3$ et $(i_{k+1}, \dots, i_3)$ fixés ;
- si $k = 0$, le cercle $\mathcal{C}_k^0$ est tangent aux droites $l_{i_{\bar{j}}, \bar{j}}^0$ de $r_{\bar{j}}^0$ en un point $L_{i_{\bar{j}}, \bar{j}}^0$, pour $\bar{j} = 1, 2, 3$ et (i_1, i_2, i_3) fixés.

Alors, on peut choisir un système de coordonnées local

$$\left(t_1, t_2, t_3; \left(c_j^x, c_j^y, a_j, b_j \right)_{j=1, \dots, k}, \left(c_{\bar{j}}^x, c_{\bar{j}}^y, d_{1, \bar{j}}, d_{2, \bar{j}} \right)_{\bar{j}=k+1, \dots, 3}; e_1, e_2, e_3 \right) \in \mathbb{R}^{18}$$

dans un voisinage $(\mathcal{O} \times (\mathbb{P}\mathcal{Q})^3, (\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0))$ tel que pour les coordonnées d'un quadruplet $(\mathcal{C}, \underline{q})$ on a

- $(c_j^x, c_j^y, a_j, b_j, e_j)$ (respectivement $(c_{\bar{j}}^x, c_{\bar{j}}^y, d_{1, \bar{j}}, d_{2, \bar{j}}, e_{\bar{j}})$) sont les coordonnées dans $\mathbb{P}\mathcal{Q}$ de la conique q_j , pour $j = 1, \dots, k$, (resp. $\bar{j} = k+1, \dots, 3$) ;
- le point $(\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0)$ est l'origine du système de coordonnées.
- $e_j = 0$ si et seulement si la conique q_j est dégénérée ;
- si $k \neq 0$, pour $j = 1, \dots, k$, on a $e_j > 0$ si et seulement si la conique q_j est en accord avec le cercle $\mathcal{C}_k^0$;
- $e_{\bar{j}} = t_{\bar{j}}$ pour $\bar{j} = k+1, \dots, 3$ et, si $k \neq 0$, $e_j = t_j^2$ pour $j = 1, \dots, k$ si et seulement si le cercle $\mathcal{C}$ est tangent aux trois coniques q_j .

Cette proposition sera démontrée dans la Section 1.4.

Remarque 1.2.9. La Proposition 1.2.8 fournit un système de coordonnées local sur $(\mathbb{P}\mathcal{Q})^3$ dont les seules 3 coordonnées (e_1, e_2, e_3) permettent de déterminer le nombre de préimages de la projection π .

En effet, le nombre de préimages d'un triplet d'hyperboles lisses (q_1, q_2, q_3) pour la projection

$$\pi : \mathcal{T} \cap (\mathcal{T}, (\mathcal{C}^0, r_1^0, r_2^0, r_3^0)) \longrightarrow (\mathbb{P}\mathcal{Q})^3$$

est égal à 2^k si $(e_1, \dots, e_k)$ se trouve dans l'octant $\underbrace{(+, \dots, +, \dots)}_k$, et 0 sinon (Fig. 1.7).

Un comportement d'un tel type pour les *perturbations dans une direction* a été décrit dans le Théorème 8 de l'article [RTV97]. Ce théorème est applicable dans la situation générique d'une "projection" de partie linéaire dégénérée. Sous certaines hypothèses sur les formes quadratiques, il donne la même conclusion (2^k ou 0) pour les *perturbations dans une direction*.

Cependant, la conclusion de la Proposition 1.2.8 est plus forte et il faut aussi souligner que ce résultat n'est pas générique; génériquement, dans un voisinage d'un point (qui est l'image d'un point où la différentielle est dégénérée) le nombre de préimages prend des valeurs entre les valeurs minimale et maximale. Voir par exemple la Fig. 1.8 pour l'application $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^3 \\ y^2 + x^3 \end{pmatrix}$. On voit sur la Fig. 1.8 deux zones

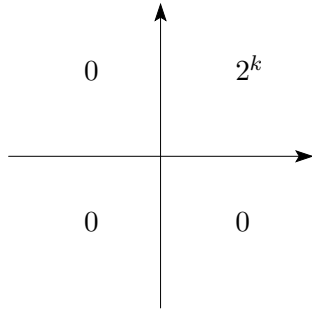


FIGURE 1.7 – Comportement du nombre de préimages donné par la Proposition 1.2.8

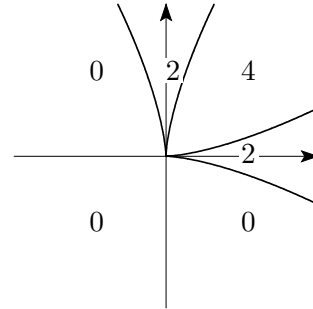


FIGURE 1.8 – Comportement du nombre de préimages pour l'application F

délimitées par des cusps où le nombre de préimages est égal à 2. Ces cusps deviennent tangents aux axes Ox et Oy et, par le Théorème 8 de [RTV97], tout vecteur de coordonnées non nulles multiplié par un facteur assez petit doit être contenu soit dans la zone de 0, soit dans la zone de 2^k préimages.

La Proposition 1.2.8 permet maintenant de démontrer aisément la Proposition 1.2.7.

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.2.7.

- (i) Si pour l'un des k points singuliers, disons, quitte à les renommer, le point singulier de r_1^0 , la conique q_1 n'est pas en accord avec le cercle $\mathcal{C}$, par la Prop. 1.2.8, on a $e_1 < 0$ et donc $t_1^2 < 0$; par conséquent $t_1 \notin \mathbb{R}$. Il n'existe donc aucun cercle réel tangent au triplet $\underline{r}$ au voisinage de $\mathcal{C}$.
- (ii) Soit un k -uplet de coniques $(q_1, \dots, q_k)$ en accord avec $\mathcal{C}^0$. Par la Prop. 1.2.8, on peut paramétrer les cercles par $(\pm\sqrt{e_1}, \dots, \pm\sqrt{e_k}, e_{k+1}, \dots, e_3)$; on obtient ainsi 2^k cercles différents.

□

1.3 Preuve du Résultat principal

Dans cette section, nous déduisons le Théorème 1.1.1 de la Proposition 1.2.7. Étant donné que cette proposition est elle-même déduite de la Proposition 1.2.8, après la fin de cette section, il restera à démontrer la Proposition 1.2.8.

PREUVE DU THÉORÈME 1.1.1. Pour appliquer la Proposition 1.2.7, nous devons trouver un triplet $\underline{r}^0$ de coniques dégénérées telles que tous les cercles passant par un point singulier des coniques r_i^0 , $i = 1, 2, 3$, passent dans le même quadrant défini par r_i^0 .

L'idée est de remarquer qu'un cercle passant par k points marqués, $k = 1, 2, 3$, sur k différents côtés $\{a_1, \dots, a_k\}$ d'un triangle et tangent aux $3 - k$ droites supportant les autres côtés est transverse aux côtés $\{a_1, \dots, a_k\}$ (Fig. 1.9).

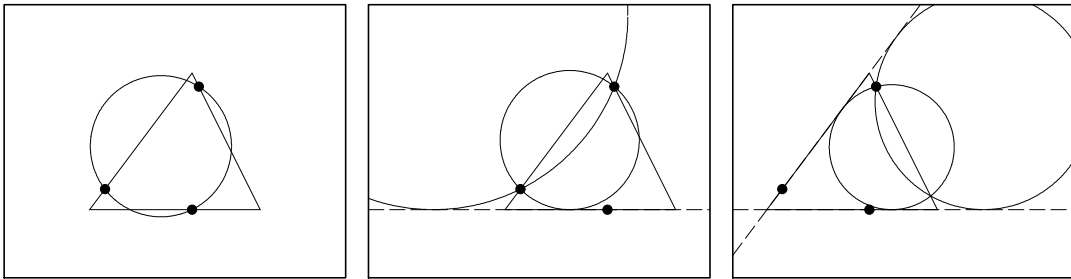


FIGURE 1.9 – Un cercle passant par k points marqués sur k différents côtés d'un triangle et tangent aux $3 - k$ droites supportant les autres côtés est transverse aux côtés.

Considérons alors un triangle sur lequel on marque un point sur chacun des côtés. Considérons de plus les trois droites supportant les côtés du triangle. Soit N_k le nombre de cercles passant par k points et tangents à $3 - k$ droites génériques. On peut facilement voir que $N_0 = 4$, $N_1 = 2$, $N_2 = 2$, et $N_3 = 1$. Un choix judicieux des trois points marqués permet de construire les 13 cercles passant par au moins un point marqué pour qu'ils soient transverses aux côtés du triangle (Fig. B.1, p.145). Nous considérons les droites supportant les côtés comme des coniques dégénérées en droites doubles.

Ouvrons maintenant les droites doubles comme des ciseaux. Nous obtenons ainsi une famille $\underline{r}^0$ de coniques dégénérées en deux droites très proches. De cette manière, tous les cercles passant par un des points marqués passeront dans les mêmes secteurs S_i^1 et S_i^2 définis par la conique $r_i^0 \in \underline{r}^0$, qui recouvrent en fait presque tout le plan (voir Fig. 1.10, B.2 et B.3 p.146).

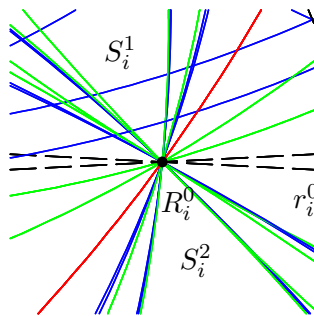


FIGURE 1.10 – Les secteurs S_i^1 et S_i^2 recouvrent presque tout le plan

Nous pouvons alors appliquer la Proposition 1.2.7 à la famille $\underline{r}^0$. Dans la construction décrite ci-dessus, par k points singuliers passent $C_k^3 2^{3-k} N_k$ cercles tangents à trois coniques

dégénérées en deux droites proches l'une de l'autre (le facteur 2^{3-k} correspondant aux choix des droites), et les tangences sont (génériquement) non dégénérées. Par la Proposition 1.2.7, chacun de ces cercles donne lieu à 2^k cercles lorsque l'on lisse les coniques. On aura ainsi :

$$\sum_{k=0}^3 2^{3-k} 2^k C_k^3 N_k = 8 \cdot (4 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 1) = 136 \text{ cercles.}$$

□

Corollaire de la Preuve. *136 est le nombre maximal de cercles que l'on peut obtenir avec la méthode décrite dans [RTV97].*

En effet, la configuration de coniques dégénérées fournit ici un nombre maximal de cercles pour chaque type de tangence et chacun d'eux a donné naissance à un nombre maximal de cercles dans la configuration perturbée.

1.4 Preuve de la Proposition 1.2.8

Passons maintenant à la preuve de la Proposition 1.2.8. Pour ce faire, nous devons avant tout choisir une normalisation des équations des coniques. Munis de cette normalisation, nous expliquons, dans la Section 1.4.2, l'articulation de la preuve.

1.4.1 Normalisation

Pour définir un système de coordonnées local sur $(\mathbb{P}\mathcal{Q})^3$, il faut avant tout normaliser au signe près les équations des coniques dégénérées (le fait que la normalisation soit au signe près est justifiée par la Définition 1.4.4). Remarquons que pour les cercles, nous avons déjà choisi une normalisation en posant que les coefficients de x^2 et y^2 sont égaux à 1. Cette normalisation au signe près des équations des coniques dégénérées est choisie de la manière suivante :

Définition 1.4.1. On dit qu'un polynôme de degré 2 $r \in \mathcal{X}$ est *normalisé au signe près* si le coefficient devant x^2 est égal à ± 1 .

Par abus de vocabulaire, nous appellerons un tel polynôme *une conique normalisée* (quand, formellement, il s'agit d'un polynôme qui est normalisé).

Nous notons $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}$ l'ensemble des coniques dégénérées ainsi normalisées.

Remarque 1.4.2. Avec ce choix de normalisation, aucune conique appartenant à l'ensemble $\mathcal{X}_n$ ne passe par le point $[1, 0, 0] \in \mathbb{P}^2$.

Nous pouvons maintenant définir le sous-espace de $\mathcal{Q}$ des équations des hyperboles (lisses ou dégénérées en deux droites).

Définition 1.4.3. Remarquons qu'une hyperbole q d'asymptotes $r \in \mathcal{X}_n$ s'écrit comme :

$$q = r - \varepsilon \quad \text{où } \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Nous pouvons alors définir l'ensemble $\mathfrak{X}_n$ comme l'image de l'application naturelle :

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} : \mathcal{X}_n \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathfrak{X}_n \subset \mathcal{Q} \\ (r, \varepsilon) &\longmapsto q := r - \varepsilon \end{aligned} \tag{1.2}$$

qui s'étend par

$$\begin{aligned} \lambda : (\mathcal{X}_n)^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathfrak{X}_n^3 \\ (\underline{x}, \underline{\varepsilon}) &\longmapsto \underline{q} \end{aligned} \quad (1.3)$$

L'ensemble $\mathfrak{X}_n$ est donc le sous-ensemble de $\mathcal{Q}$ contenant les équations normalisées des hyperboles (lisses ou dégénérées en deux droites). En particulier $\mathcal{X}_n \subset \mathfrak{X}_n \subset \mathcal{Q}$.

Si $r(x, y)$ est une conique dégénérée normalisée, la matrice A^ℓ de sa partie quadratique peut s'écrire, à l'aide de l'application $\text{sign}(x)$, qui vaut soit 1 soit -1 suivant le coefficient de x , comme

$$A^\ell = \text{sign}((A^\ell)_{1,1}) \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \quad \text{avec } \beta - \alpha^2 < 0. \quad (1.4)$$

Notons σ l'application suivante :

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{X}_n &\longrightarrow \{+1, -1\} \\ r &\longmapsto \text{sign}((A^\ell)_{1,1}) \end{aligned}$$

Rappelons que, par hypothèse, nous travaillons au voisinage du quadruplet $(\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0) \in \mathcal{O} \times \mathbb{P}\mathcal{X}^3$ où, quitte à renommer les coniques, le cercle $\mathcal{C}_k^0$ passe par le point singulier des coniques r_j^0 pour $j = 0, \dots, k$, et est tangent aux droites $l_{i\bar{j}}^0$ de $r_{\bar{j}}^0$ pour $\bar{j} = k+1, \dots, 3$ et $i_{\bar{j}} \in \{1, 2\}$. Rappelons de plus qu'un cercle $\mathcal{C}_R$ passant par le point singulier R d'une conique dégénérée r affecte déjà un signe aux secteurs définis par la conique r (Déf. 1.2.5). L'idée est donc de choisir le signe $\sigma(r)$ pour que les secteurs négatifs définis par un cercle $\mathcal{C}_R$ passant par le point singulier R soient les mêmes que ceux obtenus par l'évaluation de la conique sur les points du plan.

Définition 1.4.4. Soit un couple $(\mathcal{C}, r) \in (\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n, (\mathcal{C}_k^0, r^0))$.

Si $\mathcal{C}$ passe par R et est tangent à r de manière non dégénérée, on peut alors choisir le système de coordonnées pour la conique normalisée $r \in \mathcal{X}_n$ tel que, pour tout point P appartenant à la droite tangente à $\mathcal{C}$ en R ,

$$r(P) \leq 0$$

Dans ce cas, nous dirons que r est *une conique normalisée en accord avec $\mathcal{C}$* .

Si $\mathcal{C}$ ne passe pas par R , soit alors $\mathcal{C}_R$ le cercle concentrique à $\mathcal{C}$ passant par R . On choisit alors le système de coordonnées pour normaliser la conique r en accord avec $\mathcal{C}_R$. La conique ainsi normalisée est aussi la *conique normalisée en accord avec $\mathcal{C}$* .

Remarquons que cette définition a un sens pour une conique dégénérée r appartenant à un ouvert dépendant du centre du cercle $\mathcal{C}$.

Le fait que $r \in \mathcal{X}_n$ soit l'équation normalisée d'une conique dégénérée en deux droites nous fournit une autre écriture de son équation. En effet,

$$r(x, y) = \sigma(r) l_1(x, y) l_2(x, y) \quad (1.5)$$

où l_1 et l_2 sont les fonctions affines correspondant aux deux droites de r dont l'équation est donnée par

$$\begin{aligned} l_i(x, y) &= (x - x_R) + a_i(y - y_R) \\ &= x + a_i y - (x_R + a_i y_R). \end{aligned}$$

Cette écriture de r est liée à la matrice A^ℓ (voir (1.4)) par les relations :

$$\alpha = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad \text{et} \quad \beta = a_1 a_2 \quad . \quad (1.6)$$

Remarque 1.4.5. Puisque l_i est une fonction affine, le gradient $\nabla_P l_i$ au point P est indépendant du point P . Nous le noterons alors ∇l_i . De plus, la droite d'équation $l_i(x, y) = 0$ est décrite par $\left\langle \nabla l_i \mid \begin{pmatrix} x - x_R \\ y - y_R \end{pmatrix} \right\rangle = 0$.

L'Équation (1.1) avec la matrice définie en (1.4) et l'Équation (1.5) permettent de définir deux types de systèmes de coordonnées sur $\mathcal{X}_n$ reliés entre eux par les relations (1.6).

Assertion 1.1. *Soit une conique dégénérée $r \in \mathcal{X}_n$ de matrice associée A^ℓ comme ci-dessus. Alors $((x_R, y_R), \alpha, \beta, +1)$ et $((x_R, y_R), \alpha, \beta, -1)$ sont deux systèmes de coordonnées sur $\mathcal{X}_n$.*

PREUVE. En effet, nous avons les difféomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} \rho_A^+ : \mathbb{R}^2 \times \{\beta - \alpha^2 < 0\} &\longrightarrow \mathcal{X}_n \\ ((x_R, y_R), \alpha, \beta) &\longmapsto +(x - x_R, y - y_R) \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - y_R \\ y - y_R \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \rho_A^- : \mathbb{R}^2 \times \{\beta - \alpha^2 < 0\} &\longrightarrow \mathcal{X}_n \\ ((x_R, y_R), \alpha, \beta) &\longmapsto -(x - x_R, y - y_R) \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - y_R \\ y - y_R \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.8)$$

□

Assertion 1.2. *Soit une conique dégénérée $r \in \mathcal{X}_n$. Alors*

$$((x_R, y_R), a_1, a_2, +1) \quad \text{et} \quad ((x_R, y_R), a_1, a_2, -1)$$

sont deux systèmes de coordonnées sur $\mathcal{X}_n$.

PREUVE. En effet, nous avons les difféomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} \rho_l^+ : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathcal{X}_n \\ ((x_R, y_R), a_1, a_2) &\longmapsto +((x - x_R) + a_1(y - y_R))((x - x_R) + a_2(y - y_R)) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \rho_l^- : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathcal{X}_n \\ ((x_R, y_R), a_1, a_2) &\longmapsto -((x - x_R) + a_1(y - y_R))((x - x_R) + a_2(y - y_R)) \end{aligned} \quad (1.10)$$

□

Avant de continuer, introduisons des conditions de genericité sur les quadruplets $(\mathcal{C}, \underline{r}) \in \mathcal{O} \times \mathcal{X}_n^3$. Notons C le centre du cercle $\mathcal{C}$ et définissons le sous-ensemble de $\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n^3$ constitué des quadruplets $(\mathcal{C}, \underline{r})$ tels que :

- (1) pour tout $j \in 1, 2, 3$, le centre C n'appartient pas à r_j ,
- (2) pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, on a $R_j \neq C$.

Par abus de notation, nous continuerons d'appeler $\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n^3$ ce sous-ensemble.

1.4.2 Situation

Rappelons que nous voulons étudier les fibres de la projection :

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{T} &\longrightarrow (\mathbb{P}\mathcal{Q})^3 \\ (\mathcal{C}, q_1, q_2, q_3) &\longmapsto (q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

où $\mathcal{T} \subset \mathcal{O} \times (\mathbb{P}\mathcal{Q})^3$ est défini comme :

$$\mathcal{T} = \left\{ (\mathcal{C}, q_1, q_2, q_3) \mid \text{le cercle } \mathcal{C} \text{ est tangent aux coniques } q_i, i = 1, 2, 3 \right\}$$

Concentrons maintenant notre étude sur la projection π au voisinage du quadruplet $(\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0)$. Choisissons pour cela les normalisations des coniques $\underline{r}^0$ en accord avec le cercle $\mathcal{C}_k^0$ et prenons l'ensemble $\mathcal{T}_k^0$ défini par

$$\mathcal{T}_k^0 := \mathcal{T} \cap (\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n^3, (\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0))$$

Par l'isomorphisme λ défini en (1.3), un élément de $\mathcal{T}_k^0$ peut s'écrire comme un septuplet $(\mathcal{C}, \underline{r}, \underline{\varepsilon})$. Cette écriture permet de redéfinir la projection π et de définir une nouvelle projection, nommée δ , comme dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_k^0 & \xrightarrow{\pi} & (\mathcal{X}_n^3, \underline{r}^0) \\ \downarrow \delta & \searrow & \downarrow \\ (\mathcal{C}, \underline{r}, \underline{\varepsilon}) & \xrightarrow{\quad} & (r - \varepsilon) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{C}, \underline{r}) & & \\ \downarrow & & \\ \mathcal{O} \times (\mathcal{X}_n)^3 & & \end{array}$$

Cette projection δ nous suggère alors, pour étudier les fibres de la projection π , d'utiliser l'approche décrite par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_k^0 & \xrightarrow{\pi} & (\mathcal{X}_n^3, \underline{r}^0) \\ \downarrow \delta & \searrow & \downarrow \\ (\mathcal{C}, \underline{r}, \underline{\varepsilon}) & \xrightarrow{\quad} & (r - \varepsilon) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{C}, \underline{r}) & \xrightarrow{\quad} & (\theta_1, \dots, \theta_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_3, \underline{r}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{O} \times (\mathcal{X}_n)^3, (\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0)) & \xrightarrow{(2)} & (\mathbb{R}^3 \times (\mathcal{X}_n)^3, (\underline{0}, \underline{r}^0)) \\ & \xleftarrow{(3)} & \end{array}$$

(1) $\theta_i^2 = \pm \sqrt{\varepsilon_i}$ $i = 1, \dots, k$

La preuve de la Proposition 1.2.8 s'articule en deux parties. En un premier temps (Section 1.4.3), nous définissons une application $\tilde{E}_{P^0}$ qui associe à un cercle $\mathcal{C}$ et une conique dégénérée $r \in \underline{r}$ un paramètre ε qui n'est autre que l'évaluation de r en un point bien déterminé (Déf. 1.4.10). Ainsi, la conique lisse d'asymptotes r tangente au cercle $\mathcal{C}$ est donnée par $r - \varepsilon$. De plus, nous montrons (Lemme 1.4.13) que, au voisinage du point singulier R^0 , l'application $\tilde{E}_{P^0}$ peut s'exprimer comme le carré d'une certaine fonction $\tilde{\Theta}$.

Dans un deuxième temps (Section 1.4.4), nous construisons à l'aide des applications $\tilde{E}_{P^0}$ et $\tilde{\Theta}$ la réciproque locale de la projection δ (flèche (1) du diagramme - Lemme 1.4.17) d'une part et l'application Γ (flèche (2) du diagramme - Déf. 1.4.18) d'autre part. Enfin, nous montrons (Lemme 1.4.19) que l'application Γ est inversible au voisinage de $(\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0)$ (flèche (3) du diagramme).

1.4.3 Étude d'hyperboles d'asymptotes fixées tangentes à des cercles de centre fixé

Comme nous l'avons expliqué précédemment, nous voulons déterminer un paramètre ε , dépendant d'un cercle $\mathcal{C}$ et d'une conique dégénérée r tel que la conique lisse $q = r - \varepsilon$

d'asymptotes r soit tangente au cercle $\mathcal{C}$. La manière la plus simple pour déterminer ce paramètre est d'évaluer la conique dégénérée r en un point par lequel doit passer la conique lisse q . Nous déterminons donc dans la Section 1.4.3.1 le point de tangence entre un cercle $\mathcal{C}$ et une conique lisse d'asymptotes r , puis le paramètre ε dans la Section 1.4.3.2.

1.4.3.1 Du cercle au point de tangence

Définition 1.4.6. Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre (u, v) et une conique dégénérée r . On appelle L_1 et L_2 les projections orthogonales du point (u, v) sur chacune des droites de la conique dégénérée r .

Lemme 1.4.7. Soit une conique dégénérée $r^0 \in \mathcal{X}_n$ et un cercle $\mathcal{C}^0 \in \mathcal{O}$ tangent à la conique r^0 en $P^0 \in \{R^0, L_1^0, L_2^0\}$ de manière non dégénérée. Alors, il existe un voisinage $(\mathbb{R}^2, P^0)$, un voisinage $(\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n, (\mathcal{C}^0, r^0))$ et une application C^∞

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{P^0} : (\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n, (\mathcal{C}^0, r^0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, P^0) \\ (\mathcal{C}, r) &\longmapsto P_{\mathcal{C}, r, P^0} \end{aligned}$$

telle que $P_{\mathcal{C}, r, P^0}$ est le point de tangence entre le cercle $\mathcal{C}$ et une hyperbole d'asymptotes r dans un voisinage de P^0 .

Précisons avant tout la notion de tangence.

Assertion 1.3. Soit P un point d'intersection entre deux courbes planes $\mathcal{Z}_1$ et $\mathcal{Z}_2$. Supposons que le point P soit un point lisse sur les deux courbes. Alors les deux courbes $\mathcal{Z}_1$ et $\mathcal{Z}_2$ sont tangentes en P si et seulement si leurs gradients sont colinéaires.

Ainsi, au point de tangence entre un cercle $\mathcal{C}$ et une hyperbole (lisse) q d'asymptotes r , les gradients de $\mathcal{C}$ et q sont colinéaires. Puisque une telle hyperbole q s'écrit $q = r + cte$, on a :

$$\nabla_P q = \nabla_P (r + cte) = \nabla_P r + \vec{0} = \nabla_P r \quad (1.11)$$

Introduisons alors l'application $g_{\mathcal{C}, r}$ pour un couple $(\mathcal{C}, r) \in \mathcal{O} \times \mathcal{X}_n$ fixé :

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{C}, r} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{1}{4} \det(\nabla_{(x, y)} \mathcal{C}, \nabla_{(x, y)} r) \end{aligned}$$

Les points pour lesquels les deux gradients sont colinéaires représentent la fibre au-dessus de 0 de $g_{\mathcal{C}, r}$; nommons cette fibre $\mathcal{L}_{\mathcal{C}, r}$.

Remarque 1.4.8. On déduit de la relation (1.11) qu'on peut définir de la même manière l'application $g_{\mathcal{C}, q}$ pour toute hyperbole lisse q d'asymptotes r ; dans ce cas $\mathcal{L}_{\mathcal{C}, q} = \mathcal{L}_{\mathcal{C}, r}$.

Assertion 1.4. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}, r} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_{\mathcal{C}, r}(x, y) = 0\}$$

vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $\mathcal{L}_{\mathcal{C}, r}$ est une hyperbole équilatère passant par les points R , (u, v) , L_1 et L_2 et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de symétrie de r et s'intersectent au point

$$G_0 = \left(\frac{x_{L_1} + x_{L_2}}{2}, \frac{y_{L_1} + y_{L_2}}{2} \right) ;$$

- (ii) les points L_1, L_2 et R sont des points lisses de $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$;
- (iii) les points L_1, L_2 et R sont les seuls points d'intersection entre $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ et la conique dégénérée r ;
- (iv) tout point $P \in \mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ détermine un cercle $\mathcal{C}'$ concentrique à $\mathcal{C}$ et une hyperbole q_r d'asymptotes r tangents entre eux au point P . En particulier, si $P \in \{R, L_1, L_2\}$, l'hyperbole q_r est la conique dégénérée r elle-même ;

Soit $\mathcal{C}_R$ le cercle concentrique à $\mathcal{C}$ passant par le point singulier R

- (v) si le cercle $\mathcal{C}_R$ est tangent à r au point R de manière non dégénérée alors, dans un voisinage de R , la courbe $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ passe dans les secteurs positifs de r définis par le cercle $\mathcal{C}$;
- (vi) le cercle $\mathcal{C}_R$ est tangent à $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ en R de tangente la droite l_i si et seulement si $\mathcal{C}_R$ est tangent de manière dégénérée à r .

Ainsi, pour un cercle $\mathcal{C}$ fixé, l'intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ nous fournit les points de tangence entre le cercle $\mathcal{C}$ et une hyperbole d'asymptotes r .

Remarquons que, si le point (u, v) , centre du cercle $\mathcal{C}$, est sur la bissectrice des droites de r , la conique $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ est dégénérée en deux droites l'une étant la bissectrice elle-même et l'autre passant par les points L_1 et L_2 . En particulier, si $(u, v) = R$, la conique $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ est dégénérée en deux droites et confondue avec les axes de symétrie de r .

La preuve de l'Assertion 1.4 est donnée dans l'Annexe A.

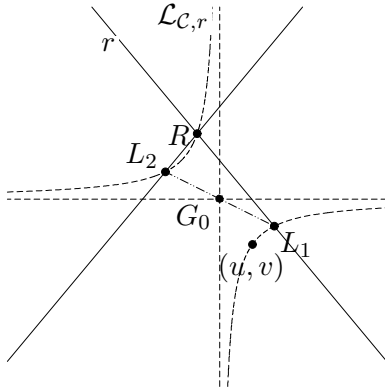


FIGURE 1.11 – La courbe $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$

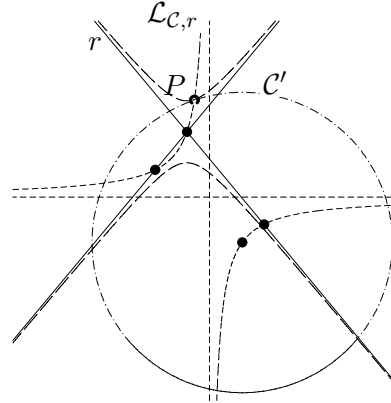


FIGURE 1.12 – Assertion 1.4(iv)

Remarque 1.4.9. Par définition, si le cercle $\mathcal{C}$ est tangent à la conique dégénérée r au point P alors P appartient à $\{R, L_1, L_2\} \cap (\mathbb{R}^2, P^0)$.

Considérons maintenant l'application

$$\begin{aligned}
 h : \quad \mathcal{O} \times \mathcal{X}_n \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
 (\mathcal{C}, r, (x, y)) &\longmapsto (\mathcal{C}(x, y), g_{\mathcal{C},r}(x, y))
 \end{aligned}$$

La préimage $h^{-1}(0, 0)$ est constituée des triplets $(\mathcal{C}, r, P_{\mathcal{C},r,P^0})$ où $P_{\mathcal{C},r,P^0} \in (\mathbb{R}^2, P^0)$ est un point de tangence entre le cercle $\mathcal{C}$ et une hyperbole (lisse ou dégénérée) d'asymptotes r . Ou encore, si on note $C = (u, v)$, on a

$$\begin{aligned}
 h^{-1}(0, 0) &= \{((C, s), r, P) \mid g_{\mathcal{C},r}(P) = 0 \quad s = \|C - P\|\} \\
 &\cong \{(C, r, P) \mid g_{\mathcal{C},r}(P) = 0\}
 \end{aligned}$$

Pour démontrer le Lemme 1.4.7, nous devons donc trouver une application qui, au voisinage de certains points, fournisse, pour $\mathcal{C}$ et r donnés, le point de tangence entre $\mathcal{C}$ et une hyperbole d'asymptotes r . Autrement dit, nous voulons montrer qu'au voisinage de certains points, $h^{-1}(0,0)$ est le graphe d'une application $\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n \rightarrow \mathbb{R}^2$. Il s'agit donc d'appliquer le Théorème des fonctions implicites et pour cela étudions la restriction $h|_{(\mathcal{C},r)}$ du jacobien de h à $\{(\mathcal{C},r)\} \times \mathbb{R}^2$, c'est à dire l'application :

$$\begin{aligned} Jac(h|_{(\mathcal{C},r)}) : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ P &\longmapsto det(\nabla_P \mathcal{C}, \nabla_P g_{\mathcal{C},r}) \end{aligned}$$

Les points $P \in \mathbb{R}^2$ tels que $Jac(h|_{(\mathcal{C},r)})(P) = g_{\mathcal{C},r}(P) = \mathcal{C}(P) = 0$ sont les points pour lesquels l'application h ne satisfait pas le Théorème des fonctions implicites. Il faut donc étudier les points d'intersection entre les courbes $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ et $\{Jac(h|_{(\mathcal{C},r)})(P) = 0\}$. Or, $\{g_{\mathcal{C},r}(x,y) = 0\}$ est l'hyperbole $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$, donc par la Remarque 1.4.8, on a

$$\{Jac(h|_{(\mathcal{C},r)})(P) = 0\} = \mathcal{L}_{\mathcal{C},\bar{g}}$$

où $\bar{g}$ sont les asymptotes de $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ vues comme une conique dégénérée en deux droites (voir Rem. A.0.2). Nous pouvons donc appliquer l'Assertion 1.4 à $\{Jac(h|_{(\mathcal{C},r)})(P) = 0\}$:

- 1.4(i)** $\{Jac(h|_{(\mathcal{C},r)})(P) = 0\}$ est une hyperbole équilatère passant par G_0 , le centre (u,v) et par les projections orthogonales $P_{\bar{g}_1}$ et $P_{\bar{g}_2}$ de (u,v) sur $\bar{g}$ et dont les deux asymptotes sont parallèles aux axes de symétrie de $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ et se croisant en un point H_0 , le milieu du segment $[P_{\bar{g}_1}P_{\bar{g}_2}]$.

Comme les asymptotes de $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ sont orthogonales, le quadrilatère $P_{\bar{g}_1}G_0P_{\bar{g}_2}(u,v)$ est un rectangle, donc

$$H_0 = \left(\frac{x_{G_0} + u}{2}, \frac{y_{G_0} + v}{2} \right)$$

- 1.4(vi)** Le cercle $\mathcal{C}_R$ est tangent de manière dégénérée à r en R si et seulement si $\mathcal{C}_R$ est tangent à $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ en R donc si et seulement si $Jac(h|_{(\mathcal{C},r)})(R) = 0$. Dans ce cas, l'application h ne satisfait pas le Théorème des fonctions implicites au voisinage de R .

- 1.4(iv)** Tout point $P \in \{Jac(h|_{(\mathcal{C},r)})(P) = 0\}$ détermine un cercle $\mathcal{C}'$ concentrique à $\mathcal{C}$ et une hyperbole équilatère d'asymptotes $\bar{g}$ tangents entre eux au point P .

Par définition, les points d'intersection entre $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ et $\{Jac(h|_{(\mathcal{C},r)})(P) = 0\}$ sont les points où il existe un cercle concentrique à $\mathcal{C}$ tangent à $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$.

L'étude des points d'intersections entre $\{Jac(h|_{(\mathcal{C},r)})(P) = 0\}$ et $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ se ramène ainsi à l'étude des points de tangence entre les cercles de centre (u,v) et $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$. Le résultat de cette étude est l'assertion suivante

Assertion 1.5. *Soit une hyperbole équilatère q et un point C sur l'une des branches de q . Alors il existe un unique cercle de centre C tangent à q . De plus, le point de tangence se situe sur la branche de q qui ne contient pas le point C . (voir Fig. 1.13)*

La preuve de cette assertion est donnée dans l'Annexe A.

Ainsi, par les Assertions 1.5 et 1.4(i), il existe seulement deux points d'intersection entre $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ et $\{Jac(h|_{(\mathcal{C},r)})(P) = 0\}$, à savoir le centre $C = (u,v)$ du cercle $\mathcal{C}$ et l'unique point de tangence entre le cercle $\mathcal{C}$ et la courbe $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ (Fig. 1.14). De plus, par l'Assertion 1.4(vi), le point de tangence entre $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ et un cercle de centre (u,v) appartient à l'ensemble $\{R, L_1, L_2\}$ si et seulement si le cercle $\mathcal{C}_R$ est tangent de manière dégénérée à r . Donc, pour tout point $P^0 \in \{R^0, L_1^0, L_2^0\}$, nous pouvons construire un voisinage $(\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n \times \mathbb{R}^2, (\mathcal{C}^0, r^0, P^0))$ tel que

$$Jac(h|_{(\mathcal{C},r)})(P) \neq 0 \quad \text{pour tout point } (\mathcal{C}, r, P) \in (\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n \times \mathbb{R}^2, (\mathcal{C}^0, r^0, P^0))$$

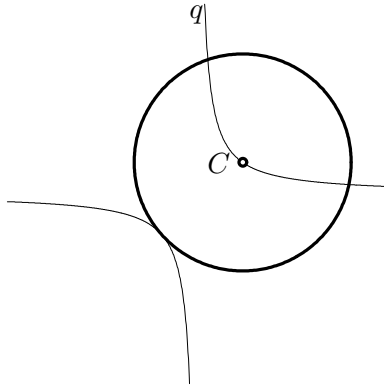
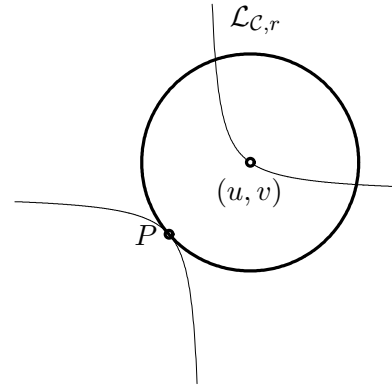
FIGURE 1.13 – Assertion 1.5 : Le cercle de centre C tangent à q 

FIGURE 1.14 – Les deux points que l'on ne veut pas

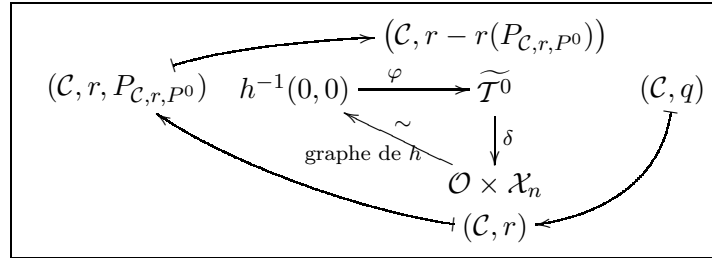
ce qui démontre l'assertion suivante :

Assertion 1.6. *Si le cercle $\mathcal{C}^0$ est tangent à la conique dégénérée r^0 au point L_i^0 , l'application h satisfait les conditions du Théorème des fonctions implicites pour les coordonnées (x, y) au voisinage de $(\mathcal{C}^0, r^0, L_i^0)$.*

De plus, si le cercle $\mathcal{C}^0$ passe par le point singulier R^0 , alors l'application h satisfait les conditions du Théorème des fonctions implicites pour les coordonnées (x, y) au voisinage de $(\mathcal{C}^0, r^0, R^0)$ si le cercle $\mathcal{C}^0$ est tangent à r^0 de manière non dégénérée.

Par l'Assertion 1.6, nous pouvons appliquer le Théorème des fonctions implicites à h , ce qui démontre le Lemme 1.4.7 : $h^{-1}(0, 0)$ est localement le graphe de $\tilde{\eta}_{P^0}$.

En résumé, localement, on a le diagramme commutatif suivant :



L'application φ est injective sur un ouvert (en enlevant les bitangentes)

1.4.3.2 Du point de tangence à l'hyperbole

Puisque l'équation de r est normalisée, on peut considérer l'évaluation de r en un point de $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.4.10. Soit un cercle $\mathcal{C}^0$ tangent de manière non dégénérée à la conique dégénérée r^0 au point $P^0 \in \{R^0, L_1^0, L_2^0\}$. On définit l'application suivante

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{P^0} : \quad (\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n, (\mathcal{C}^0, r^0)) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathcal{C}, r) &\longmapsto r(P_{\mathcal{C},r,P^0}) \end{aligned}$$

où $P_{\mathcal{C},r,P^0} = \tilde{\eta}_{P^0}(\mathcal{C}, r)$ est le point de tangence entre le cercle $\mathcal{C}$ et une hyperbole d'asymptotes r au voisinage du point P^0 .

Lemme 1.4.11. *L'application $\tilde{E}_{P^0}$ est C^∞ et jouit des propriétés suivantes :*

- (i) *Si $\tilde{E}_{P^0}(\mathcal{C}, r) \neq 0$, alors la conique $q = r - \tilde{E}_{P^0}(\mathcal{C}, r)$ est lisse et tangente au cercle $\mathcal{C}$;*
- (ii) *le cercle $\mathcal{C}$ est tangent à r en $P \in (\{R, L_1, L_2\} \cap (\mathbb{R}^2, P^0))$ si et seulement si*

$$\tilde{E}_{P^0}(\mathcal{C}, r) = 0.$$

Ce lemme permet de construire une hyperbole tangente à $\mathcal{C}$ à partir d'une conique dégénérée r .

PREUVE DU LEMME 1.4.11.

- (i) la conique $q = r - \tilde{E}_{P^0}(\mathcal{C}, r)$ passe par le point $P_{\mathcal{C}, r, P^0}$ puisque

$$q(P_{\mathcal{C}, r, P^0}) = r(P_{\mathcal{C}, r, P^0}) - \tilde{E}_{P^0}(\mathcal{C}, r) = r(P_{\mathcal{C}, r, P^0}) - r(P_{\mathcal{C}, r, P^0}) = 0$$

et, par construction, le point $P_{\mathcal{C}, r, P^0}$ est le point de tangence entre le cercle $\mathcal{C}$ et la conique q .

- (ii) Si le cercle $\mathcal{C}$ est tangent à r en $P \in (\{R, L_1, L_2\} \cap (\mathbb{R}^2, P^0))$, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{P^0}(\mathcal{C}, r) &= r(P) \quad \text{avec } P \in (\{R, L_1, L_2\} \cap (\mathbb{R}^2, P^0)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Réciproquement, si $\tilde{E}_{P^0}(\mathcal{C}, r) = 0$, cela implique que le point $P_{\mathcal{C}, r, P^0}$ appartient à la conique r , donc, par la Remarque 1.4.9, $P_{\mathcal{C}, r, P^0} \in (\{R, L_1, L_2\} \cap (\mathbb{R}^2, P^0))$.

□

Remarque 1.4.12. Au voisinage de R^0 , l'hyperbole $\mathcal{L}_{\mathcal{C}, r}$ passe dans le secteur positif de r défini par $\mathcal{C}$ (voir l'Assertion 1.4(v)), ainsi

$$\tilde{E}_{R^0}(\mathcal{C}, r) = r(\underbrace{P_{\mathcal{C}, r, R^0}}_{\in \mathcal{L}_{\mathcal{C}, r} \cap (\mathbb{R}^2, R^0)}) > 0.$$

Remarquons que la fibre au-dessus de $\tilde{E}_{P^0}(\mathcal{C}, r)$ ne se comporte pas de la même manière si l'on est au voisinage de R^0 ou de L_i^0 ; dans les sections suivantes nous étudions donc ces comportements.

Avant de continuer, rappelons qu'il existe un système de coordonnées canonique sur $\mathcal{O}$, à savoir

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0} &\longrightarrow \mathcal{O} \\ (u, v, s) &\longmapsto \mathcal{C}_{can}(x, y) := (x - u)^2 + (y - v)^2 - s^2 \end{aligned}$$

où (u, v) sont les coordonnées du centre du cercle et s son rayon.

1.4.3.3 Étude des fibres de $\tilde{E}_{R^0}$ au voisinage de R^0

Comme il est suggéré par les figures 1.6(a) et 1.6(b), au voisinage de R^0 , d'une part l'application $\tilde{E}_{R^0}$ ne prend que des valeurs positives ; d'autre part, l'image réciproque d'un voisinage $(\mathbb{R}_{>0}, \varepsilon)$ consiste localement en deux composantes connexes. Ceci motive le lemme suivant :

Lemme 1.4.13. *Soit $\mathcal{C}^0$ tangent de manière non dégénérée à r^0 en R^0 . Alors, il existe une application C^∞*

$$\tilde{\Theta} : (\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n, (\mathcal{C}^0, r^0)) \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que

$$\tilde{\Theta}^2(\mathcal{C}, r) = \tilde{E}_{R^0}(\mathcal{C}, r).$$

PREUVE. L'idée est d'utiliser le Lemme de Morse :

Lemme 1.4.14 (Morse). *Soit $f : (\mathbb{R}^{1+n}, (0, \vec{a})) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ . Si, pour tout $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, la fonction est telle que*

$$\begin{array}{lll} 1. f(0, \vec{a}) = 0 & 2. \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0, \vec{a})} = 0 & 3. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(0, \vec{a})} > 0 \end{array}$$

Alors, localement, il existe une application $\varphi : (\mathbb{R}^{1+n}, (0, \vec{a})) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{array}{lll} 1. \varphi \text{ est } C^\infty & 2. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{(0, \vec{a})} > 0 & 3. f = \varphi^2 \end{array}$$

Pour utiliser le Lemme de Morse, nous avons besoin d'une application dont la source soit un ouvert de $\mathbb{R}^{1+n}$. Choisissons alors un système de coordonnées sur $\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n$ en utilisant l'application $\rho^{\sigma(r)}$ définie dans l'Assertion 1.1 :

$$\begin{aligned} \gamma \times \rho^{\sigma(r)} : \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^2 \times \{\beta - \alpha^2 < 0\}) &\longrightarrow \mathcal{O} \times \mathcal{X}_n \\ ((\xi, u, v), (x_R, y_R, \alpha, \beta)) &\longmapsto \left(\left\{ \begin{array}{l} (x-u)^2 - (x_R-u)^2 \\ +(y-v)^2 - (y_R-v)^2 + \xi = 0 \end{array} \right\}, r \right) \end{aligned}$$

où la coordonnée ξ est en fait la valeur que prend l'équation canonique du cercle $\mathcal{C}$ de centre (u, v) au point singulier R de la conique r ; autrement dit

$$\xi = \mathcal{C}_{can}(R). \quad (1.12)$$

Par construction, $\tilde{E}_{R^0}(\mathcal{C}, r) = r(P_{\mathcal{C}, r, R^0})$ où $P_{\mathcal{C}, r, R^0} = \tilde{\eta}_{R^0}(\mathcal{C}, r)$.

Considérons alors les applications $\tilde{E}_{R^0} \circ (\gamma \times \rho^{\sigma(r)})$ et $\tilde{\eta}_{R^0} \circ (\gamma \times \rho^{\sigma(r)})$ que nous noterons respectivement $\tilde{E}_{R^0, \gamma, \rho}$ et $\tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho}$. Nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^2 \times \{\beta - \alpha^2 < 0\}) & \xrightarrow{\gamma \times \rho^{\sigma(r)}} & (\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n, (\mathcal{C}^0, r^0)) \\ & \searrow \tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho} & \downarrow \tilde{\eta}_{R^0} \times Id \\ & & \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}_n \\ & \searrow \tilde{E}_{R^0, \gamma, \rho} & \downarrow \\ & & \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} \tilde{E}_{R^0} \\ \tilde{\eta}_{R^0} \end{array} \right\} \\ \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} (\mathcal{C}, r) \\ \downarrow \\ (P_{\mathcal{C}, r, R^0}, r) \\ \downarrow \\ r(P_{\mathcal{C}, r, R^0}) \end{array}$$

Vérifions alors les hypothèses du Lemme de Morse pour $\tilde{E}_{R^0, \gamma, \rho}$:

$\boxed{\tilde{E}_{R^0, \gamma, \rho}(0, u, v; r) = 0}$ Par l'égalité (1.12), $\xi = \mathcal{C}(R)$. Si $\xi = \mathcal{C}(R) = 0$, le cercle $\mathcal{C}$ passe par le point R . Donc, par le Lemme 1.4.11(ii), on a $\tilde{E}(\mathcal{C}, r) = 0$.

$\boxed{\left. \frac{\partial \tilde{E}_{R^0, \gamma, \rho}}{\partial \xi} \right|_{(0, u, v; r)} = 0}$ Rappelons que r est une conique dégénérée en deux droites l_1 et l_2 ; nous pouvons donc écrire

$$\tilde{E}_{R^0}(\mathcal{C}, r) = r(P_{\mathcal{C}, r, R^0}) = l_1(P_{\mathcal{C}, r, R^0})l_2(P_{\mathcal{C}, r, R^0})$$

donc :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{R^0, \gamma, \rho}(\xi, u, v; r) &= r(\tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho}(\xi, u, v; r)) \\ &= l_1(\tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho}(\xi, u, v; r)) \cdot l_2(\tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho}(\xi, u, v; r)) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \tilde{E}_{R^0, \gamma, \rho}}{\partial \xi} \right|_{(0, u, v; r)} &= l_1(\tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho}(0, u, v; r)) \left. \frac{\partial (l_2 \circ \tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho})}{\partial \xi} \right|_{(0, u, v; r)} \\ &\quad + l_2(\tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho}(0, u, v; r)) \left. \frac{\partial (l_1 \circ \tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho})}{\partial \xi} \right|_{(0, u, v; r)} \end{aligned}$$

Si $0 = \xi = \mathcal{C}(R)$, le cercle $\mathcal{C}$ passe par le point R ; donc, par la Remarque 1.4.9, $\tilde{\eta}_{R^0}(\mathcal{C}, r) = R$. De plus, comme le point R est le point d'intersection entre les droites d'équation $l_1(x, y) = 0$ et $l_2(x, y) = 0$, on a $l_1(R) = l_2(R) = 0$. D'où

$$\left. \frac{\partial \tilde{E}_{R^0, \gamma, \rho}}{\partial \xi} \right|_{(0, u, v; r)} = 0$$

$\boxed{\left. \frac{\partial^2 \tilde{E}_{R^0, \gamma, \rho}}{\partial \xi^2} \right|_{(0, u, v; r)} > 0}$ Par le même raisonnement que précédemment,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \tilde{E}_{R^0, \gamma, \rho}}{\partial \xi^2} \right|_{(0, u, v; r)} &= \underbrace{l_1(\tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho}(0, u, v; r))}_{=0} \left. \frac{\partial^2 (l_2 \circ \tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho})}{\partial \xi^2} \right|_{(0, u, v; r)} \\ &\quad + \underbrace{l_2(\tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho}(0, u, v; r))}_{=0} \left. \frac{\partial^2 (l_1 \circ \tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho})}{\partial \xi^2} \right|_{(0, u, v; r)} \\ &\quad + 2 \cdot \left. \frac{\partial (l_1 \circ \tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho})}{\partial \xi} \right|_{(0, u, v; r)} \cdot \left. \frac{\partial (l_2 \circ \tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho})}{\partial \xi} \right|_{(0, u, v; r)} \end{aligned}$$

Reste à montrer que

$$\left. \frac{\partial (l_1 \circ \tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho})}{\partial \xi} \right|_{(0, u, v; r)} \cdot \left. \frac{\partial (l_2 \circ \tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho})}{\partial \xi} \right|_{(0, u, v; r)} > 0.$$

Les fonctions l_i sont affines, donc

$$\left. \frac{\partial (l_i \circ \tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho})}{\partial \xi} \right|_{(0, u, v; r)} = (l_i)^\ell \left(\left. \frac{\partial \tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho}}{\partial \xi} \right|_{(0, u, v; r)} \right)$$

où $(l_i)^\ell$ est la partie linéaire de l_i .

Si on fixe la conique dégénérée $\bar{r}$ et le centre $(\bar{u}, \bar{v})$ du cercle $\mathcal{C}$, l'application

$$\xi \longmapsto \tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho}(\xi, \bar{u}, \bar{v}; \bar{r})$$

est un paramétrage de la courbe $\mathcal{L}_{\mathcal{C}, \bar{r}}$.

Donc, la dérivée $\left. \frac{\partial \tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho}}{\partial \xi} \right|_{(0, u, v; r)}$ est un vecteur tangent à $\mathcal{L}_{\mathcal{C}, r}$ au point R . Comme, par l'Assertion 1.4(iv), la tangente à la courbe $\mathcal{L}_{\mathcal{C}, r}$ au point R passe dans le quadrant positif de r défini par $\mathcal{C}$, on a bien :

$$(l_1)^\ell \left(\left. \frac{\partial \tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho}}{\partial \xi} \right|_{(0, u, v; r)} \right) \cdot (l_2)^\ell \left(\left. \frac{\partial \tilde{\eta}_{R^0, \gamma, \rho}}{\partial \xi} \right|_{(0, u, v; r)} \right) > 0.$$

Nous pouvons donc appliquer le Lemme de Morse qui nous donne une application C^∞

$$\tilde{\Theta} : (\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n, (C^0, r^0)) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$$

telle que $\tilde{\Theta}^2 = \tilde{E}_{R^0}$. □

1.4.3.4 Étude des fibres de $\tilde{E}_{P^0}$ au voisinage de L_i^0

Au voisinage de L_i^0 , lorsque l'on lisse une conique dégénérée, le cercle tangent à la conique au voisinage de C^0 varie continûment. L'image réciproque d'un voisinage de $\varepsilon \in \mathbb{R}$ est alors constituée d'une seule composante connexe. Ainsi, pour un point (u, v) fixé, l'application $\tilde{E}_{L_i^0}(\mathcal{C}, r)$ permet de construire un système de coordonnées pour les cercles $\mathcal{C}$ de centre (u, v) .

Puisque nous travaillons avec les deux droites $l_i(x, y) = 0$ de r , nous pouvons choisir un système de coordonnées sur $\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n$ pour un $i = 1, 2$ fixé, en utilisant les applications $\rho_l^{\sigma(r)}$ définies en (1.9) et (1.10).

$$\begin{aligned} \gamma_l \times \rho_l^{\sigma(r)} : \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathcal{O} \times \mathcal{X}_n \\ ((\Delta_i, u, v), (x_R, y_R, a_1, a_2)) &\longmapsto \left(\left\{ \begin{aligned} (x - u)^2 + (y - v)^2 \\ - \left(\frac{\Delta_i}{4\|\nabla l_i\|^2} + \frac{l_i(u, v)^2}{\|\nabla l_i\|^2} \right) = 0 \end{aligned} \right\}, r \right) \end{aligned}$$

où Δ_i est donné par

$$\Delta_i = \text{discrim}(\mathcal{C}_{\text{can}}(-(a_i y - (x_R + a_i y_R)), y)) \quad (1.13)$$

avec $\text{discrim}(Ax^2 + Bx + C) = B^2 - 4AC$.

Remarque 1.4.15. Si $\Delta_i = 0$, par construction, le cercle $\mathcal{C}$ est tangent à l_i en L_i .

Par construction, $\tilde{E}_{L_i^0}(\mathcal{C}, r) = r(P_{\mathcal{C}, r, L_i^0})$ où $P_{\mathcal{C}, r, L_i^0} = \tilde{\eta}_{L_i^0}(\mathcal{C}, r)$.

Considérons alors les applications $\tilde{E}_{L_i^0} \circ (\gamma_l \times \rho_l^{\sigma(r)})$ et $\tilde{\eta}_{L_i^0} \circ (\gamma_l \times \rho_l^{\sigma(r)})$ que nous noterons respectivement $\tilde{E}_{L_i^0, \gamma, \rho}$ et $\tilde{\eta}_{L_i^0, \gamma, \rho}$. Nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\gamma_l \times \rho_l^{\sigma(r)}} & (\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n, (C^0, r^0)) \\ & \searrow \tilde{\eta}_{L_i^0, \gamma, \rho} & \downarrow \tilde{\eta}_{L_i^0} \times Id \\ & & \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}_n \\ & \searrow \tilde{E}_{L_i^0, \gamma, \rho} & \downarrow \\ & & \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{c} \tilde{E}_{L_i^0} \\ \left(\begin{array}{c} \mathcal{C}, r \\ \downarrow \\ (P_{\mathcal{C}, r, L_i^0}, r) \\ \downarrow \\ r(P_{\mathcal{C}, r, L_i^0}) \end{array} \right) \end{array}$$

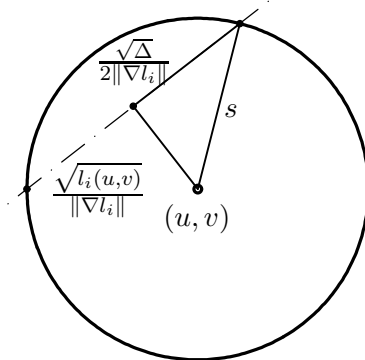


FIGURE 1.15 – Interprétation géométrique du discriminant

Assertion 1.7.

(i) $\tilde{E}_{L_i^0, \gamma, \rho}(0, u, v; r) = 0$ pour tout $(u, v; r) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4$

(ii) on a

$$\left. \frac{\partial \tilde{E}_{L_i^0, \gamma, \rho}}{\partial \Delta_i} \right|_{(0, u, v)} \neq 0$$

PREUVE.

(i) Par définition

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{L_i^0, \gamma, \rho}(\Delta_i, u, v; r) &= r(\tilde{\eta}_{L_i^0, \gamma, \rho}(\Delta_i, u, v; r)) \\ &= l_1(\tilde{\eta}_{L_i^0, \gamma, \rho}(\Delta_i, u, v; r)) \cdot l_2(\tilde{\eta}_{L_i^0, \gamma, \rho}(\Delta_i, u, v; r)) \end{aligned}$$

Or, par les remarques 1.4.9 et 1.4.15, si $\Delta_i = 0$ alors $\tilde{\eta}_{L_i^0, \gamma, \rho}(0, u, v; r) = L_i \in l_i$.

D'où, $\tilde{E}_{L_i^0, \gamma, \rho}(0, u, v; r) = 0$.

(ii) Faisons le calcul pour $i = 1$. Par le même raisonnement que précédemment,

$$\left. \frac{\partial \tilde{E}_{L_1^0, \gamma, \rho}}{\partial \Delta_1} \right|_{(0, u, v; r)} = \underbrace{l_2(\tilde{\eta}_{L_1^0, \gamma, \rho}(0, u, v; r))}_{\neq 0} \left. \frac{\partial (l_1 \circ \tilde{\eta}_{L_1^0, \gamma, \rho})}{\partial \Delta_1} \right|_{(0, u, v; r)}$$

La fonction l_1 est affine, donc

$$\left. \frac{\partial (l_1 \circ \tilde{\eta}_{L_1^0, \gamma, \rho})}{\partial \Delta_1} \right|_{(0, u, v; r)} = (l_1)^\ell \left(\left. \frac{\partial \tilde{\eta}_{L_1^0, \gamma, \rho}}{\partial \Delta_1} \right|_{(0, u, v; r)} \right)$$

où $(l_1)^\ell$ est la partie linéaire de l_1 .

Si on fixe la conique dégénérée r et le centre (u, v) du cercle $\mathcal{C}$, l'application

$$\Delta_1 \mapsto \tilde{\eta}_{L_1^0, \gamma, \rho}(\Delta_1, u, v; r)$$

est un paramétrage de la courbe $\mathcal{L}_{\mathcal{C}, r}$.

Par conséquent, la dérivée $\left. \frac{\partial \tilde{\eta}_{L_1^0, \gamma, \rho}}{\partial \Delta_1} \right|_{(0, u, v; r)}$ est un vecteur tangent à $\mathcal{L}_{\mathcal{C}, r}$ au point L_1 .

Il s'agit donc de vérifier que $\mathcal{L}_{\mathcal{C}, r}$ est transverse à l_1 en L_1 .

L'intersection de la conique $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ avec la droite l_1 contient deux points (réels ou complexes). Dans notre cas, par l'Assertion 1.4(ii), l'intersection contient exactement deux points réels, à savoir $\{L_1, R\} \in \mathcal{L}_{\mathcal{C},r} \cap l_1$. L'hyperbole $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ est alors tangente à la droite l_1 si et seulement si $L_1 = R$, ce qui est le cas uniquement lorsque le cercle $\mathcal{C}$ est tangent de manière dégénérée à r .

□

1.4.4 De un à trois

Si nous appliquons le Lemme 1.4.11 pour chacune des trois coniques du triplet $\underline{r}$, nous obtenons le triplet d'hyperboles lisses $\underline{q}$ d'asymptotes $\underline{r}$ tangentes à $\mathcal{C}$ dans un voisinage $(\mathcal{O} \times \mathfrak{X}_n^3, (\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0))$.

Définition 1.4.16. Soit un cercle $\mathcal{C}_k^0$ tangent de manière non dégénérée à $\underline{r}^0$ en les points $(P_1^0, P_2^0, P_3^0) = \mathcal{P}$, où $P_j^0 \in \{R_j^0, L_{1,j}^0, L_{2,j}^0\}$.

On définit l'application suivante

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{P}} : (\mathcal{O} \times (\mathcal{X}_n)^3, (\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0)) &\longrightarrow \mathcal{O} \times (\mathcal{X}_n)^3 \times \mathbb{R}^3 \\ (\mathcal{C}, \underline{r}) &\longmapsto (\mathcal{C}, \underline{r}, \tilde{E}_{P_1^0}(\mathcal{C}, r_1), \tilde{E}_{P_2^0}(\mathcal{C}, r_2), \tilde{E}_{P_3^0}(\mathcal{C}, r_3)) \end{aligned}$$

où $(\mathcal{O} \times (\mathcal{X}_n)^3, (\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0))$ est un voisinage suffisamment petit pour que

$$(\mathcal{C}, \underline{r}) \in (\mathcal{O} \times (\mathcal{X}_n)^3, (\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0)) \implies (\mathcal{C}, r_j) \in (\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n, (\mathcal{C}_k^0, r_j^0))$$

et $(\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n, (\mathcal{C}_k^0, r_j^0))$ est le domaine de définition de $\tilde{E}_{P_j^0}$.

Le lemme suivant découle directement de la construction de l'application $E_{\mathcal{P}}$.

Lemme 1.4.17. L'application $E_{\mathcal{P}}$ est la réciproque locale de la projection δ .

Finalement, nous avons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{T}_k^0 & \xrightarrow{\pi} (\mathfrak{X}_n^3, \underline{r}^0) \\ & \uparrow & \uparrow \\ \delta \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right. & (\mathcal{C}, \underline{r}, \underline{\varepsilon}) & \longmapsto (\underline{r}, \underline{\varepsilon}) \\ & \downarrow E_{\mathcal{P}} & \downarrow \\ & (\mathcal{C}, \underline{r}) & \\ & \uparrow & \uparrow \\ & (\mathcal{O} \times (\mathcal{X}_n)^3, (\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0)) & \end{array}$$

Groupons maintenant en une unique application les applications $\tilde{\Theta}$ correspondant aux couples $(\mathcal{C}_k^0, r_j^0)$ pour lesquels $\mathcal{C}_k^0$ passe par le point singulier de r_j^0 et les applications $\tilde{E}_{L_{i_j,j}^0}$ correspondant aux couples $(\mathcal{C}_k^0, r_j^0)$ pour lesquels $\mathcal{C}_k^0$ est tangent à l'une des droites de r_j^0 .

Définition 1.4.18. Soit un cercle $\mathcal{C}_k^0 \in \mathcal{O}$ passant par le point singulier des coniques r_j^0 , pour $j = 0, \dots, k$ et tangent aux droites $l_{i_j,j}^0$ de r_j^0 en un point $L_{i_j,j}^0$, pour $(i_{k+1}, \dots, i_3)$ fixé, $j = k+1, \dots, 3$. Soit l'application Γ définie par :

$$\begin{aligned} \Gamma : (\mathcal{O} \times (\mathcal{X}_n)^3, (\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0)) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \times (\mathcal{X}_n)^3 \\ (\mathcal{C}, \underline{r}) &\longmapsto \left(\left(\tilde{\Theta}(\mathcal{C}, r_j) \right)_{j=1, \dots, k}, \left(\tilde{E}_{L_{i_j,j}^0}(\mathcal{C}, r_j) \right)_{j=k+1, \dots, 3}, \underline{r} \right) \end{aligned}$$

où $(\mathcal{O} \times (\mathcal{X}_n)^3, (\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0))$ est un voisinage suffisamment petit pour que

$$(\mathcal{C}, \underline{r}) \in (\mathcal{O} \times (\mathcal{X}_n)^3, (\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0)) \implies (\mathcal{C}, r_j) \in (\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n, (\mathcal{C}_k^0, r_j^0))$$

où $(\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n, (\mathcal{C}_k^0, r_j^0))$ est le domaine de définition de $\tilde{\Theta}$ ou $\tilde{E}_{L_{i_j, j}^0}$.

Lemme 1.4.19. Γ est inversible au voisinage de $(\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0)$.

Avant de démontrer ce lemme, choisissons un système de coordonnées local sur $\mathcal{O}$.

Assertion 1.8. Pour $k = 0, \dots, 3$ et $(i_{k+1}, \dots, i_3)$ fixés, le triplet

$$(\xi_1, \dots, \xi_k, \Delta_{i_{k+1}, k+1}, \dots, \Delta_{i_3, 3})$$

formés des ξ_j et $\Delta_{i_j, j}$ définis en (1.12) et (1.13) respectivement, est un système de coordonnées local sur $\mathcal{O}$.

PREUVE. Cas où $k = 3$

Pour un triplet de coniques dégénérées $\underline{r}$ fixé, le triplet (ξ_1, ξ_2, ξ_3) est bien un système de coordonnées sur $\mathcal{O}$. En effet, un cercle $\mathcal{C}$ est donné par les zéros de l'équation

$$\mathcal{C}(x, y) = x^2 + \mu x + y^2 + \nu y + \zeta.$$

Les ξ_i sont donnés par définition par $\mathcal{C}(R_i) = \xi_i$. Pour trouver le cercle de coordonnées (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , il s'agit de résoudre le système non homogène de 3 équations en les 3 inconnues μ, ν, ζ :

$$\{ x_{R_i}^2 + \mu x_{R_i} + y_{R_i}^2 + \nu y_{R_i} + \zeta = \xi_i \quad i = 1, 2, 3$$

Or, ce système admet une unique solution si et seulement si le système homogène admet une unique solution. Or, résoudre le système homogène c'est exactement chercher le nombre de cercles passant par les 3 points singuliers R_1, R_2 et R_3 . Si on suppose les 3 points non alignés, il existe une unique solution.

Cas où $k = 0, \dots, 2$

Pour $(i_{k+1}, \dots, i_3)$ fixés, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, s) &\longmapsto (\xi_1, \dots, \xi_k, \Delta_{i_{k+1}, k+1}, \dots, \Delta_{i_3, 3}) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme local au voisinage des coordonnées (u, v, s) de $\mathcal{C}_k^0 \in \mathcal{O}$.

En effet,

$$\Delta_{i_j, j}(u, v, s) = 4s^2 \|\nabla l_{i_j, j}\|^2 - 4l_{i_j, j}(u, v)^2$$

et

$$\xi_j(u, v, s) = (x_{R_j} - u)^2 + (y_{R_j} - v)^2 - s^2$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_{i_j, j}}{\partial u} &= -8l_{i_j, j}(u, v) & \frac{\partial \xi_j}{\partial u} &= 2(u - x_{R_j}) \\ \frac{\partial \Delta_{i_j, j}}{\partial v} &= -8a_{i_j, j}l_{i_j, j}(u, v) & \frac{\partial \xi_j}{\partial v} &= 2(v - y_{R_j}) \\ \frac{\partial \Delta_{i_j, j}}{\partial s} &= 8\|\nabla l_{i_j, j}\|^2 s & \frac{\partial \xi_j}{\partial s} &= -2s \end{aligned}$$

Par les conditions de généricité sur $\mathcal{O} \times \mathcal{X}_n^3$ (p.16), la matrice jacobienne n'est pas dégénérée et l'application est bien un difféomorphisme local. $\square$

Remarque 1.4.20. Dans le cas où $k = 0$, la fibre au-dessus de $(0, 0, 0)$ est composée des 4 cercles tangents aux trois droites $l_{i_1,1}, l_{i_2,2}$ et $l_{i_3,3}$.

PREUVE DU LEMME 1.4.19. Pour $(i_{k+1}, \dots, i_3)$ fixé, choisissons comme système de coordonnées sur $\mathcal{O} \times (\mathcal{X}_n)^3$ le 15-uplet

$$\left((\xi_j)_{j=1,\dots,k}, (\Delta_{i_j,j})_{j=k+1,\dots,3}, (x_{Rj}, y_{Rj}, \alpha_j, \beta_j)_{j=1,\dots,k}, (x_{Rj}, y_{Rj}, d_{1,j}, d_{2,j})_{j=k+1,\dots,3} \right)$$

où $\xi_j = \mathcal{C}_{can}(R_j)$ pour $j = 0, \dots, k$, et $\Delta_{i_j,j} = \text{discrim}(\mathcal{C}_{can}(-(a_{i,j}y - (x_{Rj} + a_{i,j}x_{Rj})), y))$ avec

$$l_{i_j,j}(x, y) = x + a_{i,j}y - (x_{Rj} + a_{i,j}x_{Rj})$$

pour $j = k+1, \dots, 3$ et $i_j \in \{1, 2\}$.

Pour la suite, notons $\tilde{\Theta}_j = \tilde{\Theta}(\mathcal{C}, r_j)$, $j = 0, \dots, k$, les composantes $\tilde{\Theta}$ de l'application Γ et $\tilde{E}_j = \tilde{E}_{P_{i_j,j}}(\mathcal{C}, r_j)$, $j = k+1, \dots, 3$, les composantes $\tilde{E}_{P_{i_j,j}}$ de l'application Γ

Comme Γ ne change pas les coordonnées $\underline{r}$, pour démontrer le Lemme 1.4.19, il s'agit de vérifier que la matrice

$$d\Gamma_{(\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0)} = \left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial \tilde{\Theta}_j}{\partial \xi_m} \Big|_{(\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0)} \right)_{j,m=0,\dots,k} & \left(\frac{\partial \tilde{\Theta}_j}{\partial \Delta_{i_m,m}} \Big|_{(\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0)} \right)_{j=0,\dots,k, m=k+1,\dots,3} \\ \hline \left(\frac{\partial \tilde{E}_j}{\partial \xi_m} \Big|_{(\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0)} \right)_{j=k+1,\dots,3, m=0,\dots,k} & \left(\frac{\partial \tilde{E}_j}{\partial \Delta_{i_m,m}} \Big|_{(\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0)} \right)_{j,m=k+1,\dots,3} \end{array} \right)$$

soit non dégénérée en $(\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0)$ avec $(i_{k+1}, \dots, i_3)$ fixé.

$$\boxed{\text{Bloc} \left(\frac{\partial \tilde{E}_j}{\partial \Delta_{i_m,m}} \Big|_{(\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0)} \right)_{j,m=k+1,\dots,3}}$$

Par l'Assertion 1.7, le bloc est diagonal de diagonale

non nulle.

$$\boxed{\text{Bloc} \left(\frac{\partial \tilde{\Theta}_j}{\partial \xi_m} \Big|_{(\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0)} \right)_{j,m=0,\dots,k}}$$

Le Lemme de Morse nous donnant que

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}_j}{\partial \xi_j}(\xi_j, u, v; r_j) > 0, \quad (1.14)$$

la diagonale de la matrice est non nulle. Reste à voir ce que valent les

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}_j}{\partial \xi_m} \Big|_{(0,0,0;r_j)} \quad j \neq m.$$

Faisons le calcul pour $j = 1$ et $m = 2$:

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}_1}{\partial \xi_2} \Big|_{(0,0,0;r_1)} = \frac{\partial}{\partial \xi_2} \tilde{\Theta}_1(0, \xi_2, 0; r_1) \Big|_{\xi_2=0}$$

Or, en vérifiant les hypothèses du Lemme de Morse, on a montré que

$$\tilde{E}_{R^0, \gamma, \rho}(\xi_1, u, v; r_1) = 0 \quad \text{en } \xi_1 = 0$$

et comme $\tilde{\Theta}^2 = \tilde{E}_{R^0}$, on a aussi

$$\tilde{\Theta}(0, u, v; r_1) = 0 \quad (1.15)$$

en particulier

$$\tilde{\Theta}(0, \xi_2, 0; r_1) = 0 \quad \forall \xi_2$$

d'où

$$\left. \frac{\partial}{\partial \xi_2} \tilde{\Theta}_1(0, \xi_2, 0; r_1) \right|_{\xi_2=0} = 0.$$

De même, pour tout $j \neq m$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Theta}_j}{\partial \xi_m} \right|_{(0,0,0;r_j)} = 0.$$

Donc le bloc $\left(\frac{\partial \tilde{\Theta}_j}{\partial \xi_m} \right)_{j,m=0,\dots,k}$ est diagonal de diagonale non nulle.

$\text{Bloc} \left(\left. \frac{\partial \tilde{\Theta}_j}{\partial \xi_m} \right _{(\mathcal{C}_k^0, \underline{x}^0)} \right)_{j=0,\dots,k, m=k+1,\dots,3}$	Faisons le calcul pour $k = 1, j = 1$ et $m = 2$:
--	--

l'équation (1.15) nous donne en particulier que

$$\tilde{\Theta}(0, \Delta_{i_2,2}, \Delta_{i_3,3}; r_1) = 0$$

d'où

$$\left. \frac{\partial}{\partial \xi_2} \tilde{\Theta}_1(0, \Delta_{i_2,2}, 0; r_1) \right|_{\Delta_{i_2,2}=0} = 0.$$

De même pour tout $j = 0, \dots, k$ et $m = k+1, \dots, 3$. Donc le bloc est nul.

$\text{Bloc} \left(\left. \frac{\partial \tilde{E}_j}{\partial \xi_m} \right _{(\mathcal{C}_k^0, \underline{x}^0)} \right)_{j=k+1,\dots,3, m=0,\dots,k}$	Par l'Assertion 1.7(1.7(i)), le bloc est nul.
---	---

Donc la matrice $d\Gamma_{(\mathcal{C}_k^0, \underline{x}^0)}$ est diagonale de diagonale non nulle. Nous pouvons donc appliquer le lemme d'inversion locale à Γ . $\square$

Finalement, nous obtenons le diagramme suivant :

$\mathcal{T}_k^0$	$\xrightarrow{\pi}$	$(\mathcal{X}_n^3, \underline{r}^0)$	
$(\mathcal{C}, \underline{x}, \underline{\varepsilon})$	$\mapsto$	$(\underline{r} - \underline{\varepsilon})$	
$\downarrow \uparrow$		$\uparrow \downarrow$	
$(\mathcal{C}, \underline{x})$	$\longleftrightarrow$	$(\theta_1, \dots, \theta_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_3, \underline{x})$	θ_i^2
			$i = 1, \dots, k$
$(\mathcal{O} \times (\mathcal{X}_n)^3, (\mathcal{C}_k^0, \underline{r}^0))$	$\xrightleftharpoons[\Gamma^{-1}]{\Gamma}$	$(\mathbb{R}^3 \times (\mathcal{X}_n)^3, (\underline{0}, \underline{r}^0))$	

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.2.8. L'applications $E_{\mathcal{P}} \circ \Gamma^{-1}$ permet de construire le système de coordonnées cherché

$$\left(\theta_1, \dots, \theta_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_3; (x_{Rj}, y_{Rj}, \alpha_j, \beta_j)_{j=1,\dots,k}, (x_{R\bar{j}}, y_{R\bar{j}}, a_{1,\bar{j}}, a_{2,\bar{j}})_{\bar{j}=k+1,\dots,3}; \right. \\ \left. \theta_1^2, \dots, \theta_k^2, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_3 \right)$$

où les coordonnées $(x_{Rj}, y_{Rj}, \alpha_j, \beta_j)$ et $(x_{R\bar{j}}, y_{R\bar{j}}, a_{1,\bar{j}}, a_{2,\bar{j}})$ sont définies dans les Assertions 1.1 et 1.2 respectivement. Par construction, ce système de coordonnées satisfait toutes les propriétés demandées. $\square$

Chapitre 2

Au voisinage des droites doubles

2.1 Des coniques aux cercles

En se rappelant que, en géométrie algébrique, un cercle est une conique réelle passant par les deux points conjugués complexes $[1 : \pm i : 0] \in \mathbb{P}\mathbb{C}^2$, nous pouvons reformuler notre problème, à savoir trouver le nombre maximal de cercles tangents à trois coniques données, de la manière suivante :

Problème. *Trouver le nombre maximal de coniques réelles tangentes à trois coniques réelles données et passant par deux points conjugués complexes distincts donnés.*

En effet, on remarque que le groupe des transformations projectives réelles du plan agit transitivement sur les paires de points conjugués complexes. Une telle paire de points (non réels) est donnée en coordonnées homogènes comme $[P_{\mathbb{R}} + iv_{\mathbb{C}}]$ et $[P_{\mathbb{R}} - iv_{\mathbb{C}}]$, où $P_{\mathbb{R}}, v_{\mathbb{C}} \in \mathbb{R}^3$ sont non proportionnels; $GL(3, \mathbb{R})$ agit donc transitivement sur les paires de tels points. Ainsi, le nombre de solutions réelles du problème reste invariant pour un choix quelconque de deux points conjugués complexes (non réels).

En s'inspirant de [RTV97], on peut trouver une configuration réelle de trois coniques lisses et deux points telle que le nombre de coniques passant par ces deux points et tangentes à ces trois coniques soit 184, qui est le nombre de solutions complexes à ce problème (voir [BKT08]). Or, dans le Chapitre 1, nous avons trouvé une configuration avec seulement 136 cercles. Le but de ce chapitre est alors de mieux comprendre où nous avons perdu 48 coniques.

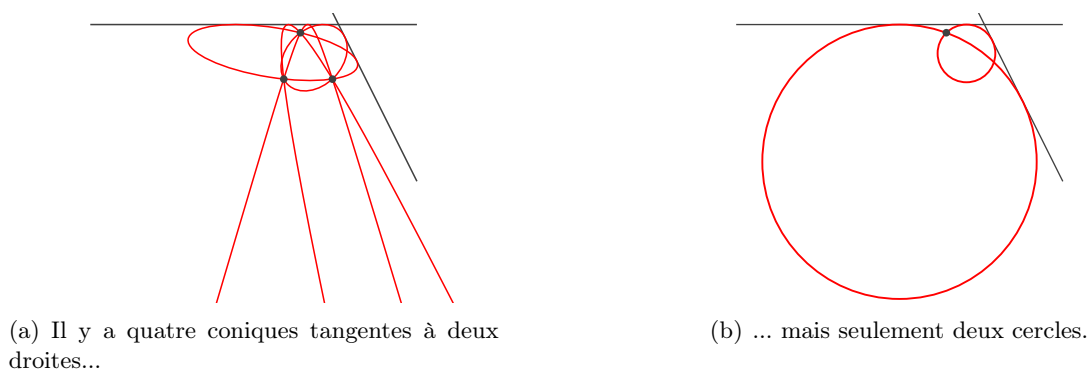


FIGURE 2.1 – Une différence entre coniques et cercles

Une différence entre coniques et cercles. Observons le nombre maximal de coniques réelles et de cercles tangents à deux droites données et passant par le nombre adéquat de points. On remarque que ce nombre est quatre pour les coniques tandis qu'il est de seulement deux pour les cercles (voir Fig. 2.1). D'une part, ceci nous fait espérer que 136 soit effectivement le nombre maximal de cercles tangents à trois coniques données. D'autre part, ceci motive l'étude, dans ce chapitre, de bifurcations où deux points réels se confondent en un point double avant de passer dans le domaine complexe.

Comment deux points réels deviennent complexes conjugués? L'idée est de prendre un paramètre réel ε , un point réel P et un vecteur v et de considérer les points $P + i\sqrt{\varepsilon}v$ et $P - i\sqrt{\varepsilon}v$; le but est maintenant d'étudier le comportement des coniques tangentes à trois coniques réelles et passant par les points $P \pm i\sqrt{\varepsilon}v$.

Remarque 2.1.1. Supposons que $P = [1 : 0 : 0]$ et $v = (0, 1, 0)$ et étudions les coniques passant les deux points $[1 : \pm i\sqrt{\varepsilon} : 0]$ lorsque ε tend vers 0. On peut décrire l'ensemble de ces coniques par

$$\{c(\varepsilon x^2 + y^2) + z l(x, y, z) = 0\}$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante et $l(x, y, z)$ une application linéaire. Lorsque $\varepsilon = 0$, on obtient :

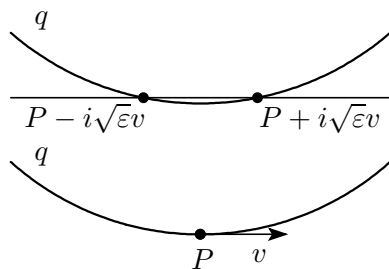
$$\{cy^2 + z l(x, y, z) = 0\}$$

qui est l'ensemble des coniques passant par P et tangentes à la droite $y = 0$ en ce point.

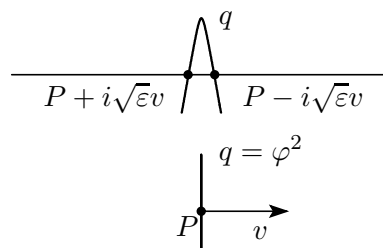
Observons à l'aide d'expériences numériques le comportement des coniques tangentes à trois coniques réelles et passant par les points $P \pm i\sqrt{\varepsilon}v$ lorsque ε tend vers 0.

Lorsque $\varepsilon < 0$, les points $P \pm i\sqrt{\varepsilon}v$ sont réels et notre étude se réduit à l'étude de coniques tangentes à trois coniques réelles et passant par deux points réels.

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^-$, on s'attend à ce que les coniques deviennent tangentes au point P à une droite passant par P et dirigée par le vecteur v (Fig. 2.2(a) et Rem. 2.1.1). Or, les expériences numériques montrent qu'il existe un autre comportement possible : certaines coniques dégénèrent en une droite double $\{\varphi^2 = 0\}$ où φ est une forme linéaire passant par le point P (Fig. 2.2(b)). Ce comportement n'est pas contradictoire avec la Remarque 2.1.1, puisqu'une conique dégénérée en une droite double est tangente à toute droite qu'elle intersecte.



(a) Le comportement attendu.



(b) Certaines coniques peuvent dégénérer en une droite double φ^2 passant par P .

FIGURE 2.2 – Les deux comportements observés pour des coniques passant par les deux points $P \pm i\sqrt{\varepsilon}v$ lorsque ε tend vers zéro par valeurs négatives.

On observe que les coniques du type (a) restent réelles lorsque ε devient positif tandis que les coniques du deuxième type (b) disparaissent dans le domaine complexe. Le Théorème 2.3.2 permettra d'établir précisément dans quelles situations les coniques disparaissent (ou éventuellement apparaissent).

2.2 Interprétation géométrique

Avant de commencer l'étude formelle, expliquons géométriquement les transformations que l'on va effectuer. Rappelons que le triplet de coniques $\underline{q} = (q_1, q_2, q_3)$, le point P et le vecteur v restent fixés. Dans l'espace $\mathbb{P}\mathcal{Q} \times (\mathbb{R}, 0)$, on considère les trois variétés

$$W_j = \{([q], \varepsilon) \in \mathbb{P}\mathcal{Q} \times \mathbb{R} \mid q \text{ est lisse, passe par } P \pm i\sqrt{\varepsilon}v \text{ et est tangente à } q_j\} \quad j = 1, 2, 3.$$

Nous voulons étudier le comportement au-dessus de $\varepsilon = 0$ de $\overline{W_1 \cap W_2 \cap W_3}$ et la difficulté que l'on va rencontrer est que chaque $\overline{W_j}$ contient entièrement l'ensemble $V \times \{0\}$ des coniques dégénérées en droites doubles passant par P . Par contre, l'ensemble $\overline{W_1 \cap W_2 \cap W_3}$ ne contient pas entièrement l'ensemble $V \times \{0\}$, car toute conique dégénérée en droite double passant par P n'est pas nécessairement limite d'une famille de coniques lisses tangentes au triplet $\underline{q}$. Nous devons donc éliminer $V \times \{0\}$ comme composante "parasite" du système d'équations algébriques

$$\begin{cases} q & \in \overline{W_1} \\ q & \in \overline{W_2} \\ q & \in \overline{W_3} \end{cases}$$

Une des manières d'éliminer cette composante parasite est d'éclater le long de $V \times \{0\}$ (plusieurs fois si nécessaire) pour que chaque point "parasite" de $V \times \{0\}$, c'est-à-dire qui n'appartient pas à l'adhérence de $W_1 \cap W_2 \cap W_3$, disparaisse. Éclater $V \times \{0\}$, autrement dit spécifier les "directions d'approche", éliminera ces points. Par abus de notation, nous noterons par la suite V l'ensemble $V \times \{0\}$.

Cependant, il semble plus facile de travailler au niveau formel en transformant le système d'équations. L'idée est de trouver une équation décrivant spécifiquement les coniques q tangentes au triplet $\underline{q}$ qui dégénèrent en des droites doubles ; les coniques complètes décrites dans le livre de J. Harris [Har95] apportent une solution élégante.

2.2.1 Coniques complètes

Commençons par donner une interprétation algébrique de la notion de *conique complète* (Voir [Har95, Ex. 22.27]). Identifions l'ensemble de toutes les coniques de $\mathbb{P}^2$ avec $\mathbb{P}^5$; de même, identifions l'espace des coniques du plan dual $\mathbb{P}^{2*}$ avec l'espace projectif dual $\mathbb{P}^{5*}$. Soit $U \subset \mathbb{P}^5$ et $U^* \subset \mathbb{P}^{5*}$ les sous-ensembles ouverts correspondant aux coniques lisses et considérons la bijection

$$\tilde{\phi} : U \longrightarrow U^*$$

qui associe à une conique lisse sa duale. Cette bijection s'étend en une application rationnelle

$$\phi : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^{5*}.$$

Soit $\Gamma \subset \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^{5*}$ le graphe de cette application. Alors Γ est appelé la variété des *coniques complètes*.

D'un point de vue plus géométrique, on considère une famille continue de coniques $\{q_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ qui dégénère, lorsque λ tend vers 0, sur une droite double $q_0 = \varphi^2$, où φ est la droite correspondant à la conique dégénérée. Chaque conique q_λ , $\lambda \neq 0$ intersecte φ en deux points P_λ et Q_λ . On considère la suite de ces points ; elle converge en deux points P_0 et Q_0 . On construit ainsi l'élément $(\varphi, \{P_0, Q_0\}) \in (\mathbb{P}^2)^* \times (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)/S_2$ qu'on appelle *conique complète* associée à la famille $\{q_\lambda\}$; on appelle P_0 et Q_0 les *points marqués*. Cette construction permet de conserver la "direction d'approche" vers la conique dégénérée.

La notion de tangence doit alors être modifiée de la manière suivante : une conique complète $(\varphi, \{P_0, Q_0\})$ est tangente à une conique lisse

- si la droite φ est tangente à la conique ;
- ou si la conique passe par l'un des points marqués P_0 ou Q_0 .

Après l'éclatement, il y aura des droites tangentes à l'une des trois coniques et qui coupent les deux autres en les points marqués.

Appliquons maintenant cette notion de conique complète à notre étude du nombre de coniques tangentes à un triplet de coniques $\underline{q}$ et passant les points $P \pm i\sqrt{\varepsilon}v$ lorsque $\varepsilon \in (\mathbb{R}, 0)$. Considérons une droite φ^0 passant par le point P fixé et tangente à la conique q_3 en un point Q_3^0 . Cette droite intersecte les coniques q_1 et q_2 aux points Q_1^0 et Q_2^0 respectivement. L'élément $(\varphi^0, \{Q_1^0, Q_2^0\})$ forme donc une conique complète.

Les Figures 2.3 et 2.4 suggèrent que, suivant la position relative des points P et Q_3^0 par rapport aux points marqués Q_1^0 et Q_2^0 , deux comportements différents peuvent se produire.

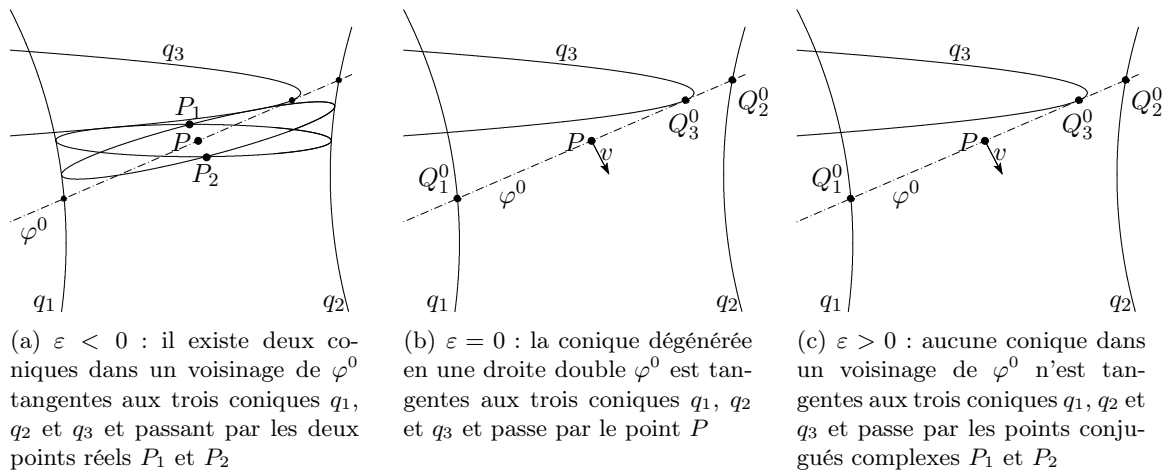


FIGURE 2.3 – Le point P et le point de tangence sont sur le même intervalle joignant les deux points marqués

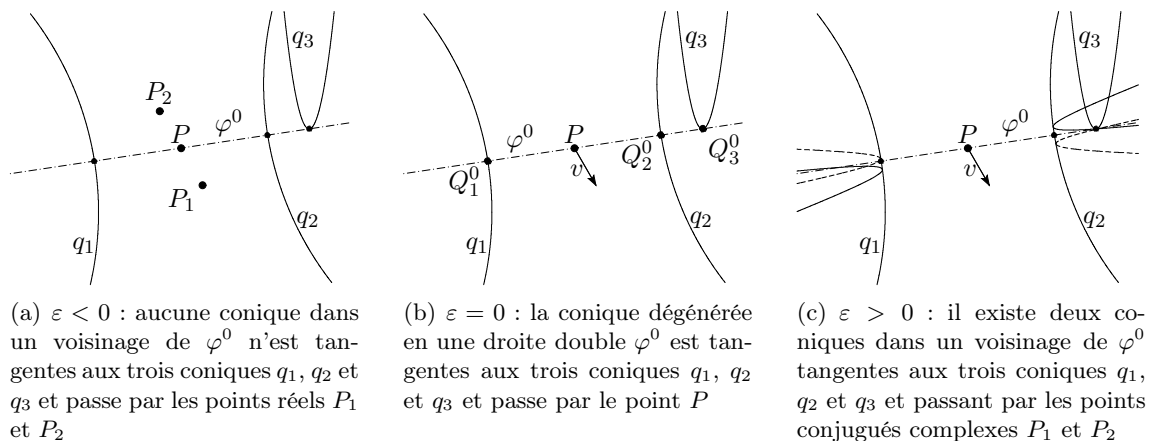


FIGURE 2.4 – Le point P et le point de tangence ne sont pas sur le même intervalle joignant les deux points marqués

Dans le cas de la Figure 2.3, le point P et le point de tangence q_3^0 sont sur le même intervalle, défini sur la droite φ^0 , joignant les deux points marqués Q_1^0 et Q_2^0 . Pour $\varepsilon < 0$, il y a deux coniques réelles passant par les points $P \pm i\sqrt{\varepsilon}v$ qui sont réels dans ce cas (Fig.2.3(a)) et zéro si $\varepsilon > 0$, i.e. si les points $P \pm i\sqrt{\varepsilon}v$ sont imaginaires (Fig.2.3(c)). Dans le cas de la Figure 2.4, le point P et le point de tangence Q_3^0 ne sont pas sur le même intervalle joignant les deux points marqués Q_1^0 et Q_2^0 ; il y aura zéro solution pour $\varepsilon < 0$ (Fig.2.4(a)), et deux si $\varepsilon > 0$ (Fig.2.4(c)).

Pour démontrer cela rigoureusement, nous considérons la variété des solutions possibles au système de tangence dans l'espace $\mathbb{P}\mathcal{Q} \times (\mathbb{R}, 0)$. Nous montrons en premier lieu que cette variété se paramètre localement à l'aide d'un paramètre scalaire $\tilde{s}$; en deuxième lieu, nous montrons que, au voisinage des points de la variété où $\varepsilon = 0$, il existe une paramétrisation $\tilde{s}$ telle que, localement, on a soit $\varepsilon = \tilde{s}^2$ soit $\varepsilon = -\tilde{s}^2$ suivant les positions respectives du point de tangence et P par rapport aux points marqués.

2.3 De l'expérience à la théorie

Fixons un point $P \in \mathbb{P}^2$, un vecteur $v \in T_P\mathbb{P}^2$, un triplet $\underline{q} = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{P}\mathcal{Q}^3$ de coniques réelles lisses ainsi qu'une carte affine sur $\mathbb{P}^2$ au voisinage de P et étudions le comportement du nombre de coniques tangentes aux triplet de coniques $\underline{q}$ et passant par les points $P \pm i\sqrt{\varepsilon}v$ quand ε tend vers 0.

On peut associer à une conique q une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$. Les conditions de passage par les points $P \pm i\sqrt{\varepsilon}v$ s'écrivent alors comme :

$$q(P + i\sqrt{\varepsilon}v, P + i\sqrt{\varepsilon}v) = 0 \quad \text{et} \quad q(P - i\sqrt{\varepsilon}v, P - i\sqrt{\varepsilon}v) = 0$$

Ces équations peuvent être transformées de la sorte; d'une part

$$\begin{array}{rclcl} q(P, P) & + & 2i\sqrt{\varepsilon}q(P, v) & - & \varepsilon q(v, v) & = & 0 \\ + & q(P, P) & - & 2i\sqrt{\varepsilon}q(P, v) & - & \varepsilon q(v, v) & = & 0 \\ \hline 2q(P, P) & & & & - & 2\varepsilon q(v, v) & = & 0 \end{array}$$

d'autre part

$$\begin{array}{rclcl} q(P, P) & + & 2i\sqrt{\varepsilon}q(P, v) & - & \varepsilon q(v, v) & = & 0 \\ - & (& q(P, P) & - & 2i\sqrt{\varepsilon}q(P, v) & - & \varepsilon q(v, v) & = & 0 &) \\ \hline & & 4i\sqrt{\varepsilon}q(P, v) & & & = & 0 \end{array}.$$

En dehors de $\varepsilon = 0$, cette dernière équation est donc équivalente à $q(P, v) = 0$. L'expression $q(P, v)$ peut être interprétée comme le produit scalaire entre le vecteur v et le gradient de q évalué au point P . Donc l'équation $q(P, v) = 0$ exprime le fait que le gradient de q au point P est orthogonal au vecteur v ; cette équation décrit donc bien le comportement observé dans la Remarque 2.1.1.

Soit Q_1, Q_2 et Q_3 des points appartenant respectivement aux coniques q_1, q_2 et q_3 . Les coniques tangentes au triplet $\underline{q}$ et passant par les points $P \pm i\sqrt{\varepsilon}v$ sont alors décrites par la variété suivante :

$$W_0 = \left\{ ([q], [Q_1], [Q_2], [Q_3], \varepsilon) \in \mathbb{P}\mathcal{Q} \times (\mathbb{P}^2)^3 \times \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} \text{le système (2.1) soit satisfait} \\ \text{et que } q \text{ soit lisse} \end{array} \right. \right\}$$

$$\begin{cases} \text{I.} & q(Q_i, Q_i) = 0, & i = 1, 2, 3 \\ \text{II.} & dq|_{Q_i} \text{ et } dq_i|_{Q_i} \text{ sont proportionnels,} & i = 1, 2, 3 \\ \text{III.} & q(P, P) - \varepsilon q(v, v) = 0 \\ \text{IV.} & q(P, v) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Le sujet de notre étude sera alors l'adhérence $\overline{W_0}$ de la variété W_0 .

Notons que le seul système (2.1) décrit non seulement les coniques dégénérées en une droite double qui sont limite de coniques lisses satisfaisant ce système, sujet de notre étude, mais aussi toutes les coniques dégénérées en droites doubles qui passent par le point P . Autrement dit, le système (2.1) décrit une variété $\widetilde{W_0}$ contenant une composante parasite V formée de coniques dégénérées en droites doubles passant par P . Si nous notons $\mathcal{V}$ un voisinage de V , il nous faut donc considérer un nouveau système qui soit équivalent au système (2.1) sur $\mathcal{V} \setminus V$, qui ne s'annule pas identiquement sur V et qui décrive à lui seul la variété W_0 .

Remarque 2.3.1. Choisissons deux points Q_1 et Q_2 appartenant respectivement aux coniques q_1 et q_2 , et considérons le pinceau de coniques tangentes à q_1 et q_2 en Q_1 et Q_2 respectivement.

Appelons φ la droite passant par Q_1 et Q_2 et considérons, pour $i = 1, 2$, la droite θ_i tangente à la conique q_i au point Q_i . Alors, toute conique q appartenant au pinceau s'écrit de manière unique comme

$$q = \varphi^2 + \lambda \theta_1 \theta_2$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ (voir Fig. 2.5)

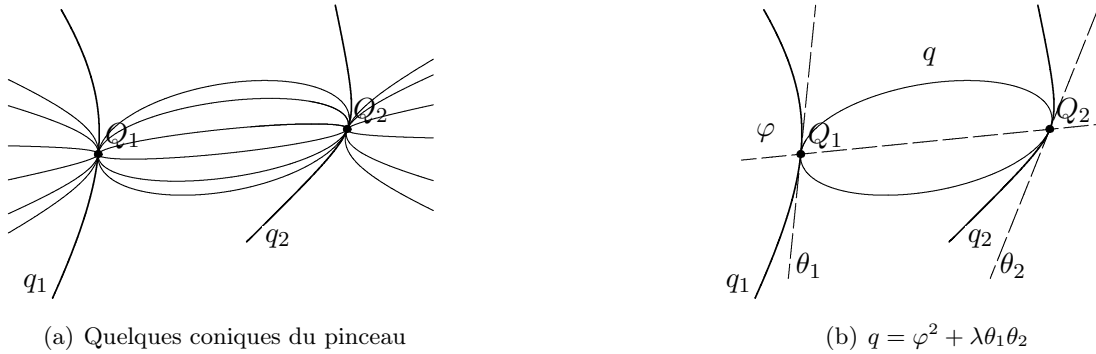


FIGURE 2.5 – Illustration de la Remarque 2.3.1

À l'aide de la Remarque 2.3.1, nous pouvons alors décrire la variété W_0 comme :

$$W_0 = \{([q], [Q_1], [Q_2], [Q_3], \varepsilon) \in \mathbb{P}\mathcal{Q} \times (\mathbb{P}^2)^3 \times \mathbb{R} \mid \exists \varphi, \theta_1 \theta_2 \in (\mathbb{P}\mathbb{R}^2)^* \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}^*, \text{ tels que}$$

- | | | |
|-------------------|--|------------|
| • | φ est une droite passant par Q_j | $j = 1, 2$ |
| • | θ_j est la droite tangente à q_j en Q_j | $j = 1, 2$ |
| • | $q = \varphi^2 + \lambda \theta_1 \theta_2$ | |
| I ₃ . | $q(Q_3, Q_3) = 0$ | |
| II ₃ . | $dq _{Q_3}$ et $dq_3 _{Q_3}$ sont proportionnels | |
| III. | $q(P, P) - \varepsilon q(v, v) = 0$ | |
| IV. | $q(P, v) = 0$ | |

Par la suite, nous noterons $\Theta := \theta_1 \theta_2$ la fonction bilinéaire définie par les droites θ_1 et θ_2 .

Remarquons que, sous certaines conditions de généricité données plus loin, l'hypothèse que la conique q soit lisse est assurée par le fait que le paramètre λ est non nul. En effet, une conique peut dégénérer soit en une droite double, et dans ce cas λ serait nul, soit en une paire de droites. Dans ce dernier cas, la conique q s'écrit $q = \lambda \theta'_1 \theta'_2$. Or, le coefficient de φ^2 étant égal à 1, une telle dégénérescence ne peut pas se produire. Par conséquent, pour $\lambda \neq 0$, la conique $q = \varphi^2 + \lambda \theta_1 \theta_2$ est lisse.

Pour la suite, il est plus agréable de travailler avec une paramétrisation des coniques q_1 , q_2 et q_3 , plutôt qu'avec les points Q_1 , Q_2 et Q_3 . Mais pour cela, il faut fixer des conditions initiales. Puisque notre but est d'étudier les coniques tangentes au triplet de coniques q qui dégénèrent en une droite double passant par P , nommons φ^0 une droite passant par P et tangente à q_3 en un point appelé Q_3^0 . Cette droite φ^0 intersecte chacune des coniques q_1 et q_2 en deux points. Chaque choix d'un point d'intersection avec q_1 et d'un point d'intersection avec q_2 détermine une conique complète; il existe donc quatre coniques complètes associées à la droite φ^0 . Choisissons donc un point d'intersection entre φ^0 et q_1 et un point d'intersection entre φ^0 et q_2 et nommons-les Q_1^0 et Q_2^0 respectivement; nous obtenons ainsi la conique complète $(\varphi^0, \{Q_1^0, Q_2^0\})$. Il est nécessaire ici de remarquer que nous ne travaillons pas avec la notion de conique complète; celle-ci nous est nécessaire uniquement comme base pour écrire nos équations.

Pour $i = 1, 2$, nommons de plus θ_i^0 la droite tangente à la conique q_i au point Q_i^0 et appelons $\Theta^0 := \theta_1^0 \theta_2^0$ la forme bilinéaire définie par les droites θ_1^0 et θ_2^0 .

Il est nécessaire maintenant d'introduire des conditions de généralité.

- (i) Les points Q_1^0 et Q_2^0 et Q_3^0 sont distincts,
- (ii) les droites θ_1^0 et θ_2^0 ne passent pas par le point Q_3^0 ,
- (iii) le vecteur v n'est pas un vecteur directeur de la droite φ^0 .

Paramétrons maintenant les coniques q_1, q_2, q_3 au voisinage des points Q_1^0, Q_2^0 et Q_3^0 respectivement, par des applications $\alpha_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ $j = 1, 2, 3$ telles que

$$\alpha_j(s) \in q_j \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad Q_j^0 := \alpha_j(0) \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, 3$$

Cette paramétrisation induit le morphisme suivant au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^5, (0, 0, 0, 0, 0)) &\longrightarrow (\overline{W_0}, (\varphi_0^2, 0, Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0)) \\ (\lambda, \varepsilon, s_1, s_2, s_3) &\longmapsto (\varphi_{s_1, s_2}^2 + \lambda \theta_{s_1} \theta_{s_2}, \varepsilon, \alpha_1(s_1), \alpha_2(s_2), \alpha_3(s_3)) \end{aligned}$$

Donc, au lieu de considérer la variété $\overline{W_0}$, nous allons étudier la variété définie par :

$$W_1 = \left\{ (\lambda, \varepsilon, s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^5 \mid \exists \varphi, \theta_1, \theta_2 \in (\mathbb{P}\mathbb{R}^2)^* \text{ satisfaisant le système (2.2)} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{I}_j' & \varphi(\alpha_j(s_j)) = 0 \quad j = 1, 2 \\ \text{I}_j'' & \theta_j(\alpha_j(s_j)) = 0 \quad j = 1, 2 \\ \text{II}_j & \left. \frac{\partial \theta_j(\alpha_j(s_j))}{\partial s_j} \right|_0 = 0 \quad j = 1, 2 \\ \text{I}_3 & \varphi^2(\alpha_3(s_3)) + \lambda \Theta(\alpha_3(s_3), \alpha_3(s_3)) = 0 \\ \text{II}_3 & 2\varphi(\alpha_3(s_3)) \left. \frac{\partial \varphi(\alpha_3(s_3))}{\partial s_3} \right|_{s_3} + \lambda \left. \frac{\partial \Theta(\alpha_3(s_3), \alpha_3(s_3))}{\partial s_3} \right|_{s_3} = 0 \\ \text{III} & \varphi^2 + \lambda \theta_1 \theta_2 = q \\ \text{IV} & q(P, P) - \varepsilon q(v, v) = 0 \\ & q(P, v) = 0 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Observons que le point $w_0 := (0, 0, 0, 0, 0)$ appartient à W_1 et correspond à la conique dégénérée en une droite double passant par les points P, Q_1^0 et Q_2^0 et tangente à la conique q_3 au point Q_3^0 .

Théorème 2.3.2. *Avec les notations ci-dessus, au voisinage de $w_0 = (0, 0, 0, 0, 0) \in W_1$ nous avons :*

- (1) la variété W_1 est lisse de dimension 1 ;
 (2) la projection

$$(\lambda, \varepsilon, s_1, s_2, s_3) \longmapsto s_1$$

induit un difféomorphisme $W_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ au voisinage de $w_0 = (0, 0, 0, 0, 0) \in W_1$.

- (3) soit $[P, Q_3^0]$ l'intervalle sur la droite φ^0 délimité par P et Q_3^0 ; alors il existe une application ω telle que

$$\begin{aligned} \omega : (\mathbb{R}, 0) &\rightarrow (W_1, w_0) \\ \tilde{s} &\mapsto \begin{cases} (\lambda(\tilde{s}), -\tilde{s}^2, \tilde{s}, s_2(\tilde{s}), s_3(\tilde{s})) & \text{si } Q_1^0, Q_2^0 \in [P, Q_3^0] \\ & \text{ou } Q_1^0, Q_2^0 \notin [P, Q_3^0] \\ (\lambda(\tilde{s}), \tilde{s}^2, \tilde{s}, s_2(\tilde{s}), s_3(\tilde{s})) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Le Théorème 2.3.2 exprime donc bien les intuitions déduites des Figures 2.3 et 2.4.

2.4 Preuve du Théorème 2.3.2

Notation : Pour alléger la notation, nous noterons

- $f(P) := f(P, P)$ pour f une fonction bilinéaire ;
- α_{s_i} la paramétrisation $\alpha_i(s_i)$;
- $\underline{s}$ un couple (s_1, s_2) .

2.4.1 Transformation du système

Par les trois premières équations du système (2.2), on remarque que la droite φ et la fonction bilinéaire $\Theta := \theta_1\theta_2$ sont entièrement définies par s_1 et s_2 . Nous pouvons donc écrire $\varphi := \varphi_{\underline{s}}$ et $\Theta := \Theta_{\underline{s}}$. En particulier, la droite φ^0 s'écrit alors φ_0 .

Remarque 2.4.1. Pour $\lambda \neq 0$, la droite $\varphi_{\underline{s}}$ ne passe pas par le point $\alpha_3(s_3)$, point de tangence entre la conique $q = \varphi_{\underline{s}}^2 + \lambda\Theta_{\underline{s}}$ et la conique q_3 . En effet, si $\lambda \neq 0$, la conique q est lisse et les seuls points d'intersection entre q et $\varphi_{\underline{s}}$ sont les points Q_1 et Q_2 .

Étudions maintenant les conditions de tangence en Q_3 . Elles sont données par les équations I_3 . et II_3 . du système (2.2) :

$$\begin{cases} I_3. & \varphi_{\underline{s}}^2(\alpha_{s_3}) + \lambda\Theta_{\underline{s}}(\alpha_{s_3}) = 0 \\ II_3. & 2\varphi_{\underline{s}}(\alpha_{s_3}) \frac{\partial \varphi_{\underline{s}}(\alpha_{s_3})}{\partial s_3} \Big|_{s_3} + \lambda \frac{\partial \Theta_{\underline{s}}(\alpha_{s_3})}{\partial s_3} \Big|_{s_3} = 0 \\ & \varphi_{\underline{s}}^2 + \lambda\Theta_{\underline{s}} = q \\ III. & q(P, P) - \varepsilon q(v, v) = 0 \\ IV. & q(P, v) = 0 \end{cases}$$

Cependant, lorsque ε tend vers 0, pour les coniques qui tendent vers des droites doubles, le paramètre λ tend aussi vers 0. Or, lorsque $\varepsilon = \lambda = 0$, le système (2.2) se résume à

$$\begin{cases} I_3. & \varphi_{\underline{s}}^2(\alpha_{s_3}) = 0 \\ II_3. & 2\varphi_{\underline{s}}(\alpha_{s_3}) \frac{\partial \varphi_{\underline{s}}(\alpha_{s_3})}{\partial s_3} \Big|_{s_3} = 0 \\ & \varphi_{\underline{s}}^2 = q \\ III. & q(P, P) = 0 \\ IV. & q(P, v) = 0 \end{cases}$$

Autrement dit, lorsque $\varepsilon = \lambda = 0$, toute conique dégénérée en une droite double $\varphi_{\underline{s}}$ passant par le point P et intersectant la conique q_3 satisfait au système. On fait ainsi réapparaître des solutions appartenant à la composante parasite V que l'on cherchait à éliminer.

Passons donc à un système équivalent au système (2.2) en dehors de $\lambda = 0$, et tel que, pour $\varepsilon = \lambda = 0$, il soit satisfait uniquement par les coniques dégénérées en droites doubles qui sont limite d'une conique lisse tangente aux trois coniques; il suivra de notre étude qu'il s'agit des droites doubles passant par P tangentes à la conique q_3 .

Pour ce faire, multiplions l'équation I_3 . par $2 \frac{\partial \varphi_{\underline{s}}(\alpha_{s_3})}{\partial s_3} \Big|_{s_3}$ et l'équation II_3 . par $\varphi_{\underline{s}}(\alpha_{s_3})$, la deuxième quantité étant non nulle par la Remarque 2.4.1. En soustrayant les équations ainsi obtenues, nous trouvons :

$$\lambda \left(2\Theta_{\underline{s}}(\alpha_{s_3}) \frac{\partial \varphi_{\underline{s}}(\alpha_{s_3})}{\partial s_3} \Big|_{s_3} - \varphi_{\underline{s}}(\alpha_{s_3}) \frac{\partial \Theta_{\underline{s}}(\alpha_{s_3})}{\partial s_3} \Big|_{s_3} \right) = 0 \quad (2.3)$$

Pour $\lambda \neq 0$, le système (2.2) est donc équivalent à

$$\begin{cases} \text{I'.} & \varphi_{\underline{s}}^2(\alpha_{s_3}) + \lambda \Theta_{\underline{s}}(\alpha_{s_3}) = 0 \\ \text{II'.} & 2\Theta_{\underline{s}}(\alpha_{s_3}) \frac{\partial \varphi_{\underline{s}}(\alpha_{s_3})}{\partial s_3} \Big|_{s_3} - \varphi_{\underline{s}}(\alpha_{s_3}) \frac{\partial \Theta_{\underline{s}}(\alpha_{s_3})}{\partial s_3} \Big|_{s_3} = 0 \\ \text{III.} & q(P, P) - \varepsilon q(v, v) = 0 \\ \text{IV.} & q(P, v) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

En effet, pour retrouver le système (2.2) à partir du système (2.4), il suffit de multiplier l'équation II' . par λ , lui soustraire $2 \frac{\partial \varphi_{\underline{s}}(\alpha_{s_3})}{\partial s_3} \Big|_{s_3}$ fois l'équation I' . et diviser finalement par $\varphi_{\underline{s}}(\alpha_{s_3})$. Pour avoir l'équivalence des deux systèmes, il suffit donc de s'assurer que la quantité $\varphi_{\underline{s}}(\alpha_{s_3})$ soit non nulle. Or, dans le système (2.4), l'équation I' . nous assure que la Remarque 2.4.1 peut toujours s'appliquer et que, par conséquent $\varphi_{\underline{s}}(\alpha_{s_3}) \neq 0$.

Remarquons que pour $(\lambda, \varepsilon, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 0, 0, 0)$ le système (2.4) nous donne ensemble :

$$\begin{cases} \text{I.} & \varphi_0(\alpha_3(0)) = 0 \\ \text{II.} & 2\Theta_0(\alpha_3(0)) \frac{\partial \varphi_0(\alpha_3(0))}{\partial s_3} \Big|_0 = 0 \\ \text{III.} & q(P, P) = 0 \\ \text{IV.} & q(P, v) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \text{I.} & \varphi_0(\alpha_3(0)) = 0 \\ \text{II.} & \frac{\partial \varphi_0(\alpha_3(0))}{\partial s_3} \Big|_0 = 0 \\ \text{III.} & q(P, P) = 0 \\ \text{IV.} & q(P, v) = 0 \end{cases}$$

puisque $\Theta_0(\alpha_3(0)) \neq 0$ (condition de genericité (ii)). Autrement dit, φ_0 passant par P est tangente à la conique q_3 en $Q_3^0 = \alpha_3(0)$, ce qui est bien que nous attendions.

Nous étudierons le système (2.4) en les cinq inconnues $\lambda, \varepsilon, s_1, s_2$ et s_3 au voisinage du point $(\lambda, \varepsilon, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

2.4.2 Linéarisation du système (2.4)

Calculons maintenant le Jacobien associé au système (2.4), qui sera donc un système linéaire en $d\lambda, d\varepsilon, ds_1, ds_2$ et ds_3 , et vérifions qu'il satisfait les hypothèses du théorème des applications implicites.

Equation I. Au point $(\lambda, \varepsilon, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 0, 0, 0)$, la droite $\varphi_{\underline{0}}$ passe par Q_3^0 , autrement dit $\varphi_{\underline{0}}(Q_3^0) = 0$. Ainsi le développement de Taylor de $\varphi_{\underline{0}}^2$ s'annule au deuxième ordre au voisinage de $s_3 = 0$. Donc l'équation I. linéarisée s'écrit :

$$dI. \quad \Theta_{\underline{0}}(Q_3^0) \cdot d\lambda = 0$$

Equation II. L'équation II. ne dépend ni de λ ni de ε . Comme la droite $\varphi_{\underline{0}}$ est tangente à q_3 en Q_3^0 , l'application $\varphi_{\underline{s}}(\alpha_{s_3})$ et la dérivée $\frac{\partial \varphi_{\underline{s}}(\alpha_{s_3})}{\partial s_3}$ s'annulent en $s_3 = 0$. Donc l'équation II. linéarisée s'écrit :

$$\begin{aligned} dII. \quad & 2\Theta_{\underline{0}}(\alpha_{s_3}) \frac{\partial^2 \varphi_{\underline{s}}(\alpha_{s_3})}{\partial s_3^2} \Big|_{(0,0,0)} ds_3 + 2\Theta_{\underline{0}}(\alpha_{s_3})(\dots ds_1 + \dots ds_2) \\ & - (\dots ds_1 + \dots ds_2) \frac{\partial \Theta_{\underline{s}}(\alpha_{s_3})}{\partial s_3} \Big|_{(0,0,0)} \\ = \quad & (\dots ds_1 + \dots ds_2) + 2\Theta_{\underline{0}}(\alpha_{s_3}) \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi_{\underline{s}}(\alpha_{s_3})}{\partial s_3^2} \Big|_{(0,0,0)}}_{=\kappa(Q_3^0)} ds_3 \end{aligned}$$

où $\kappa(Q_3^0)$ est la courbure de la conique q_3 au point Q_3^0 .

Equation III. L'équation III. est de la forme

$$III. \quad \varphi_{\underline{s}}^2(P) + \lambda \Theta_{\underline{s}}(P) - \varepsilon \left(\varphi_{\underline{s}}^\ell(v) \right)^2 - \varepsilon \lambda \Theta_{\underline{s}}^\ell(v) = 0$$

où $\varphi_{\underline{s}}^\ell$ est la partie linéaire de $\varphi_{\underline{s}}$ (appliquée aux vecteurs au lieu des points), de même pour $\Theta_{\underline{s}}^\ell$. Par hypothèse, la droite $\varphi_{\underline{s}}$ passe par P en $(\lambda, \varepsilon, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 0, 0, 0)$, donc, par les mêmes arguments que ci-dessus, l'équation linéarisée est donnée par :

$$dIII. \quad \Theta_{\underline{0}}(P) \cdot d\lambda - \left(\varphi_{\underline{0}}^\ell(v) \right)^2 \cdot d\varepsilon = 0.$$

Equation IV. L'équation IV. est de la forme

$$IV. \quad \varphi_{\underline{s}}(P) \varphi_{\underline{s}}^\ell(v) + \lambda \Theta_{\underline{s}}(P, v) = 0.$$

Donc sa linéarisation en $(\lambda, \varepsilon, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 0, 0, 0)$ est donnée par

$$dIV. \quad \varphi_{\underline{0}}^\ell(v) \cdot d(\varphi_{\underline{s}}(P)) + \Theta_{\underline{0}}(P, v) \cdot d\lambda = 0$$

D'où la matrice de la linéarisation en $(\lambda, \varepsilon, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 0, 0, 0)$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \Theta_{\underline{0}}(Q_3^0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 2\Theta_{\underline{0}}(Q_3^0) \kappa(Q_3^0) \\ \Theta_{\underline{0}}(P) & -\left(\varphi_{\underline{0}}^\ell(v)\right)^2 & 0 & 0 & 0 \\ \Theta_{\underline{0}}(P, v) & 0 & \varphi_{\underline{0}}^\ell(v) \frac{\partial \varphi_{\underline{s}}(P)}{\partial s_1} \Big|_{\underline{0}} & \varphi_{\underline{0}}^\ell(v) \frac{\partial \varphi_{\underline{s}}(P)}{\partial s_2} \Big|_{\underline{0}} & 0 \end{pmatrix}$$

En permutant les lignes, on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} \Theta_{\mathcal{Q}}(Q_3^0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Theta_{\mathcal{Q}}(P) & -(\varphi_{\mathcal{Q}}^{\ell}(v))^2 & 0 & 0 & 0 \\ \Theta_{\mathcal{Q}}(P, v) & 0 & \varphi_{\mathcal{Q}}^{\ell}(v) \frac{\partial \varphi_{\mathcal{Z}}(P)}{\partial s_1} \Big|_{\mathcal{Q}} & \varphi_{\mathcal{Q}}^{\ell}(v) \frac{\partial \varphi_{\mathcal{Z}}(P)}{\partial s_2} \Big|_{\mathcal{Q}} & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 2\Theta_{\mathcal{Q}}(Q_3^0) \kappa(Q_3^0) \end{pmatrix}$$

qui est de rang maximal et s_1 peut être pris comme un système de coordonnées sur la courbe donnée par le système (2.4), ce qui démontre (1) et (2). Pour démontrer (3), il faut maintenant calculer la deuxième dérivée de ε en s_1 et vérifier qu'elle est non nulle. Dans ce cas, le lemme de Morse nous permettra de conclure.

2.4.3 Preuve de (3)

Pour pouvoir appliquer le lemme de Morse, nous devons calculer les deux premières dérivées de l'application $\varepsilon(s_1)$ en $s_1 = 0$ et vérifier les hypothèses.

$\boxed{\varepsilon(0) = 0}$ Ceci est vrai par construction.

$\boxed{\frac{d\varepsilon(s_1)}{ds_1} \Big|_0 = 0}$ L'équation dI. nous permet de dire que

$$\frac{d\lambda(s_1)}{ds_1} \Big|_0 = 0. \quad (2.5)$$

En effet, comme $\Theta_{\mathcal{Z}}$ ne passe par le point Q_3^0 , l'équation dI. s'écrit :

$$\underbrace{\Theta_{\mathcal{Q}}(Q_3^0)}_{\neq 0} \frac{d\lambda(s_1)}{ds_1} \Big|_0 = 0 \quad .$$

D'autre part, par la condition de généricité (iii), le vecteur v n'est pas directeur de la droite φ^0 . Ainsi, l'équation dIII. nous donne

$$\Theta_{\mathcal{Q}}(P) \cdot \underbrace{\frac{d\lambda(s_1)}{ds_1} \Big|_0}_{=0} - \underbrace{(\varphi_{\mathcal{Q}}^{\ell}(v))^2}_{\neq 0} \cdot \frac{d\varepsilon(s_1)}{ds_1} \Big|_0 = 0.$$

d'où $\frac{d\varepsilon(s_1)}{ds_1} \Big|_0 = 0$.

$\boxed{\frac{d^2\varepsilon(s_1)}{ds_1^2} \Big|_0 > 0}$ Sachant que $\varepsilon(0) = \frac{d\varepsilon(s_1)}{ds_1} \Big|_0 = 0$, le développement de Taylor de $\varepsilon(s_1)$ au voisinage de $s_1 = 0$ s'écrit comme

$$\varepsilon(s_1) = As_1^2 + O(s_1^3) \quad (2.6)$$

Par ailleurs, l'équation III. nous fournit une formule explicite pour $\varepsilon(s_1)$:

$$\varepsilon(s_1) = \frac{\varphi_{\mathcal{Z}}^2(P) + \lambda(s_1)\Theta_{\mathcal{Z}}(P)}{(\varphi_{\mathcal{Z}}^{\ell}(v))^2 + \lambda(s_1)\Theta_{\mathcal{Z}}^{\ell}(v)} \quad . \quad (2.7)$$

Notons que le dénominateur $\left(\varphi_{\underline{s}}^\ell(v)\right)^2 + \lambda(s_1)\Theta_{\underline{s}}(v)$ est non nul en $s_1 = 0$, car $\varphi_{\underline{0}}^\ell(v) \neq 0$ et $\lambda(0) = 0$.

Il s'agit maintenant de trouver le coefficient de s_1^2 dans cette formulation.

D'une part, l'équation dIV. nous permet d'écrire

$$\varphi_{\underline{s}}(P) = s_1^2 B(s_1) \quad (2.8)$$

puisque $\underbrace{\varphi_{0,0}^\ell(v)}_{\neq 0} \frac{d\varphi_{\underline{s}(s_1)}(P)}{ds_1} \Big|_0 + \underbrace{\Theta_{0,0}(P, v)}_{=0} \frac{d\lambda(s_1)}{ds_1} \Big|_0 = 0$ et donc

$$\frac{d\varphi_{\underline{s}(s_1)}(P)}{ds_1} \Big|_0 = 0. \quad (2.9)$$

D'autre part, on tire de l'équation (2.5) que

$$\lambda(s_1) = s_1^2 L(s_1). \quad (2.10)$$

Ainsi $\varepsilon(s_1)$ s'écrit :

$$\varepsilon(s_1) = \frac{\left(s_1^2 B(s_1)\right)^2 + s_1^2 L(s_1)\Theta_{\underline{s}}(P)}{\left(\varphi_{\underline{s}}^\ell(v)\right)^2 + O(s_1^2)} = \frac{L(s_1)\Theta_{\underline{s}}(P)}{\left(\varphi_{\underline{s}}^\ell(v)\right)^2} s_1^2 + O(s_1^3) \quad (2.11)$$

Finalement

$$A = \frac{1}{2} \frac{d^2 \varepsilon(s_1)}{ds_1^2} \Big|_0 = \frac{L(0)\Theta_{\underline{0}}(P)}{\left(\varphi_{\underline{0}}^\ell(v)\right)^2}$$

est l'équation dont on doit étudier le signe.

L'équation I. nous fournit une expression pour $\lambda(s_1)$:

$$s_1^2 L(s_1) = \lambda(s_1) = -\frac{\varphi_{\underline{s}}^2(\alpha_{s_3})}{\Theta_{\underline{s}}(\alpha_{s_3})} \quad (2.12)$$

Si le terme en s_1^2 provient de $\varphi_{\underline{s}}^2(\alpha_{s_3})$, autrement dit, si

$$\varphi_{\underline{s}}(\alpha_{s_3}) = s_1 C(s_1) \quad \text{avec } C(0) \neq 0 \quad (2.13)$$

alors on aurait une expression du type

$$\lambda(s_1) = -\frac{(C(s_1))^2}{\Theta_{\underline{s}}(\alpha_{s_3})} s_1^2$$

D'où

$$\frac{d^2 \varepsilon(s_1)}{ds_1^2} \Big|_0 = -\frac{(C(0))^2 \Theta_{\underline{0}}(P)}{\underbrace{\left(\varphi_{\underline{0}}^\ell(v)\right)^2}_{>0} \Theta_{\underline{0}}(Q_3^0)}$$

Et le signe de $\frac{d^2 \varepsilon(s_1)}{ds_1^2} \Big|_0$ serait alors donné par le rapport

$$-\frac{\Theta_{\underline{0}}(P)}{\Theta_{\underline{0}}(Q_3^0)} \quad (2.14)$$

Si le rapport (2.14) est négatif, les points P et Q_3^0 sont dans le même intervalle sur φ^0 délimité par Q_1^0 et Q_2^0 , sinon P et Q_3^0 sont dans des intervalles différents.

En appliquant le Lemme de Morse, on aura ainsi achevé la preuve.

Il reste cependant à montrer (2.13), ce qui revient à montrer que

$$\left. \frac{d}{ds_1} \right|_0 \varphi_{\underline{s}(s_1)}(\alpha_3(s_3(s_1))) \neq 0$$

Remarquons tout d'abord que

$$\left. \frac{d}{ds_1} \right|_0 \varphi_{\underline{s}(s_1)}(\alpha_{s_3}) = \left. \frac{d}{ds_1} \right|_0 \varphi_{\underline{s}(s_1)}(Q_3^0) \quad .$$

En effet,

$$\left. \frac{d}{ds_1} \right|_0 \varphi_{\underline{s}(s_1)}(\alpha_{s_3}) = \left. \frac{\partial \varphi_{\underline{s}(s_1)}(Q_3^0)}{\partial s_1} \right|_0 \cdot 1 + \underbrace{\left. \frac{\partial (\varphi_{\underline{s}(s_1)} \circ \alpha_3)(s_3)}{\partial s_3} \right|_0}_{\varphi^\ell \left(\left. \frac{d\alpha_{s_3}}{ds_3} \right|_0 \right)} \cdot \left. \frac{ds_3}{ds_1} \right|_0$$

Comme $\left. \frac{d\alpha_{s_3}}{ds_3} \right|_0$ est un vecteur tangent à q_3 en $\alpha_3(0) = Q_3^0$, alors $\varphi^\ell \left(\left. \frac{d\alpha_{s_3}}{ds_3} \right|_0 \right) = 0$.

Maintenant, supposons par l'absurde que $\left. \frac{d}{ds_1} \right|_0 \varphi_{\underline{s}(s_1)}(Q_3^0) = 0$.

Soit D la droite passant par P et Q_3^0 . Comme $\varphi_{\underline{s}(s_1)}$ est une application affine, pour tout $X \in D$, il existe un $\xi \in \mathbb{R}$ tel que pour tout s_1

$$\varphi_{\underline{s}(s_1)}(X) = \xi \varphi_{\underline{s}(s_1)}(P) + (1 - \xi) \varphi_{\underline{s}(s_1)}(Q_3^0)$$

et, par l'équation (2.9) et en utilisant l'hypothèse $\left. \frac{d}{ds_1} \right|_0 \varphi_{\underline{s}(s_1)}(Q_3^0) = 0$, on a aussi

$$\left. \frac{d}{ds_1} \right|_0 \varphi_{\underline{s}(s_1)}(X) = 0 \quad . \quad (2.15)$$

Puisque $\varphi_{\underline{s}(s_1)}(\alpha_1(s_1)) = 0$, on a

$$0 = \left. \frac{d\varphi_{\underline{s}(s_1)}(\alpha_1(s_1))}{ds_1} \right|_0 = \left. \frac{d}{ds_1} \right|_0 \varphi_{\underline{s}(s_1)}(Q_1^0) + \varphi^\ell \left(\left. \frac{d\alpha_1(s_1)}{ds_1} \right|_0 \right)$$

Comme, par (2.15), $\left. \frac{d}{ds_1} \right|_0 \varphi_{\underline{s}(s_1)}(Q_1^0) = 0$, on aurait $\varphi^\ell \left(\left. \frac{d\alpha_1(s_1)}{ds_1} \right|_0 \right) = 0$ ce qui est absurde, car $\left. \frac{d\alpha_1(s_1)}{ds_1} \right|_0$ est un vecteur tangent à q_1 en $\alpha_1(0) = Q_1^0$ et est donc transverse à φ_0 par hypothèse, ce qui achève la preuve du Théorème 2.3.2. $\square$

Remarque 2.4.2. Lorsque nous déterminons le signe de la dérivée seconde $\left. \frac{d^2 \varepsilon(s_1)}{ds_1^2} \right|_0$, nous montrons avant tout que cette dérivée seconde est non nulle. Autrement dit, nous montrons que l'application

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{R}, 0) & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & (\lambda(s), \varepsilon(s), s, s_2(s), s_3(s)) & \longmapsto & \varepsilon \end{array}$$

est localement ramifiée d'indice 2 sur $\mathbb{R}$.

Or, la même démonstration reste valable si nous considérons le complexifié $(W_1)_{\mathbb{C}}$ de W_1 et un voisinage de $s = 0$ dans $\mathbb{C}$. Nous obtenons ainsi l'application

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{C}, 0) & \longrightarrow & (W_1)_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & (\lambda(s), \varepsilon(s), s, s_2(s), s_3(s)) & \longmapsto & \varepsilon \end{array}$$

qui est aussi localement ramifiée d'indice 2 mais cette fois sur $\mathbb{C}$. Il s'agit donc d'une application du type

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}, 0) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & s^2 \end{array}$$

dont la restriction sur les réels est donnée par le Théorème 2.3.2. Ceci montre donc que, lorsque deux coniques tangentes à trois coniques et passant par deux points dégénèrent en une droite double, ces deux mêmes coniques deviennent deux coniques complexes lorsque ε change de signe (voir Fig. 2.6).

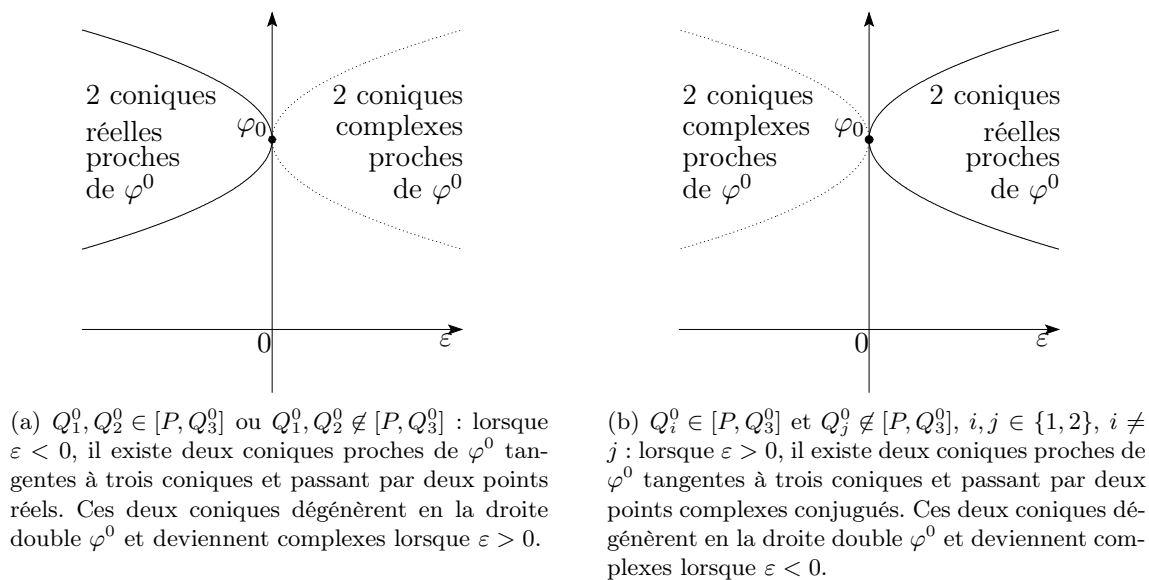


FIGURE 2.6 – Illustration de la Remarque 2.4.2

2.5 Conséquences du Théorème 2.3.2 sur le nombre maximal de cercles tangents à trois coniques

Rappelons que notre problème initial est de trouver le nombre maximal de cercles tangents à trois coniques. Lorsqu'on envoie les deux points réels $P \pm i\sqrt{\varepsilon}v$ vers deux points complexes conjugués quelconques et que l'on applique une transformation de $GL(3, \mathbb{R})$ adéquate, on transforme des coniques passant par ces deux points en des cercles. Au vu du Théorème 2.3.2, qu'en est-il alors du nombre maximal de cercles tangents à trois coniques ?

Choisissons une configuration de trois coniques réelles et deux points réels $P_1 = P + i\sqrt{\varepsilon}v$ et $P_2 = P - i\sqrt{\varepsilon}v$ telle que les six droites passant par P et tangentes à l'une des trois coniques soient toutes réelles, (voir par exemple Fig. B.4, p.147) et que le nombre de coniques réelles passant par les points P_1 et P_2 et tangentes aux trois coniques soit 184

(par exemple, en adaptant la construction de [RTV97]) Rappelons que 184 est le nombre de coniques complexes tangentes à trois coniques et passant par deux points.

Choisissons l'une des deux droites passant par P et tangente à la conique q_3 ; appelons φ cette droite et Q_3^0 le point de tangence (voir Fig. B.4, p.147). La droite φ intersecte la conique q_2 en deux points, $Q_{2,1}^0$ et $Q_{2,2}^0$, et la conique q_1 en deux points, que l'on nomme $Q_{1,1}^0$ et $Q_{1,2}^0$. Nous avons alors quatre coniques complètes de la forme $(\varphi, \{Q_{1,i}^0, Q_{2,j}^0\})$, $i, j = 1, 2$.

Puisque toutes les 184 coniques sont réelles, par le Théorème 2.3.2, pour chaque choix de i et j nous nous trouvons dans la situation où nous avons deux coniques réelles proches de $(\varphi, \{Q_{1,i}^0, Q_{2,j}^0\})$ lorsque les points P_1 et P_2 sont réels. Nous avons donc 8 coniques réelles qui tendent vers la droite tangente φ . Par la Remarque 2.4.2, ces 8 coniques deviennent complexes lorsque les points P_1 et P_2 deviennent complexes conjugués.

Le même raisonnement s'applique à chacune des six droites passant par P et tangentes à l'une des trois coniques. Ainsi, il existe $6 \cdot 8 = 48$ coniques qui deviennent complexes lorsque les points P_1 et P_2 deviennent complexes conjugués. Nous obtenons ainsi $184 - 48 = 136$ coniques réelles tangentes aux trois coniques réelles lorsque les deux points réels deviennent complexes conjugués ; autrement dit, on aura 136 cercles tangents à trois coniques.

Cependant, il peut exister une configuration de trois coniques réelles et deux points réels telle que le nombre de coniques (réelles) tangentes soit inférieur à 184 mais qui fournirait plus que 136 coniques réelles (et donc de cercles) lorsque les deux points deviennent complexes conjugués.

Deuxième partie

Cercles tangents à une hyperbole,
à une droite et passant par un point

Chapitre 3

Lieu des centres des cercles passant par un point et tangents à une hyperbole

3.1 Généralités

Choix d'un repère de coordonnées et notations. Pour ce qui suit, nous considérons un point fixé F et une hyperbole fixée q . Nous choisissons le repère orthonormé ayant pour origine le centre de l'hyperbole q et dont les axes de coordonnées sont les axes de symétrie de q . L'axe des ordonnées sera celui qui possède deux points d'intersection avec l'hyperbole. Avec ce choix, l'hyperbole q est symétrique par rapport aux axes de coordonnées. Ainsi, les deux branches de l'hyperbole q peuvent être notées q^+ et q^- suivant si les ordonnées de leurs points sont positives ou négatives. De plus, l'appellation de *quart d'hyperbole* correspondra à la portion de l'hyperbole contenue dans l'un des quatre quadrants que définit le système d'axes.

Une hyperbole découpe le plan $\mathbb{R}^2$ en trois composantes connexes ; nous appellerons *extérieur de l'hyperbole* la composante connexe de $\mathbb{R}^2$ qui contient au moins une droite qui ne coupe pas l'hyperbole.

Les asymptotes d'une hyperbole coupent le plan $\mathbb{R}^2$ en quatre composantes connexes ; nous appellerons *intérieur des asymptotes* les deux composantes connexes contenant l'hyperbole.

Dans notre système de coordonnées, les asymptotes sont des droites de pente α et $-\alpha$ passant par l'origine. Posons que α est positif. Nous appellerons $l_1 = \alpha x$ et $l_2 = -\alpha x$ les asymptotes de q . Ceci permet d'écrire l'équation de q comme

$$q(x, y) = (y - \alpha x)(y + \alpha x) - \varepsilon = 0.$$

Avec notre choix de coordonnées, ε est un nombre positif.

Définition 3.1.1. Appelons $\mathcal{S}_{q,F}$ le lieu des centres des cercles passant par le point F et tangents à l'hyperbole q . De plus, définissons l'application σ_q qui, à un point Q de l'hyperbole q , associe le point $\sigma_q(Q) \in \mathcal{S}_{q,F}$, le centre du cercle tangent à q au point Q et passant par F .

Le lieu $\mathcal{S}_{q,F}$ est en fait une sextique dont on peut obtenir l'équation algébrique à l'aide d'un discriminant. Par exemple, on se donne une équation algébrique $\mathcal{C}(x, y)$ d'un cercle passant par le point F ; on peut alors voir l'équation du cercle comme une équation de

degré 1 en les paramètres a et b , les coordonnées du centre du cercle. On choisit ensuite une paramétrisation rationnelle $\tilde{q}(t)$ (de degré 2) de l'hyperbole et on considère l'équation $\mathcal{C}(\tilde{q}(t))$ qui est de degré 4 en t . L'équation algébrique de $\mathcal{S}_{q,F}$ est alors donnée par le discriminant de cette équation lorsqu'on élimine t . On vérifie alors aisément qu'il s'agit d'une équation de degré 6 en a et en b .

Cependant, le théorème suivant donne une manière plus élégante de voir cette courbe.

Théorème 3.1.2. *La courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ est l'enveloppe des médiatrices des segments $\overline{QF}$ pour tout point Q appartenant à l'hyperbole q .*

Avant de démontrer ce théorème, rappelons la définition de l'enveloppe d'une famille de courbes.

Définition 3.1.3 (Leibniz 1692). (Voir l'original en latin [Lei62, Analysis Infinitorum VIII] et sa traduction [Lei89, Chapitre XII]) Soit (γ_t) une famille de courbes planes paramétrée par t . À chaque t , on associe à γ_t un point caractéristique qui est le point limite de l'intersection de γ_t avec $\gamma_{t'}$ lorsque t' tend vers t (à supposer qu'un tel point existe et est unique). L'ensemble des points caractéristiques est l'*enveloppe* de la famille (γ_t) . On obtient ainsi une courbe qui, à chaque point, est tangente à une courbe γ_t .

Avant de commencer la démonstration du Théorème 3.1.2, remarquons tout d'abord le fait suivant :

Remarque 3.1.4. Soit Q un point de l'hyperbole q et considérons le cercle $\mathcal{C}_Q$ passant par F et tangent à q au point Q . D'une part, comme le cercle $\mathcal{C}_Q$ passe par Q et par le point F , son centre se trouve sur la médiatrice du segment $\overline{QF}$. D'autre part, le cercle $\mathcal{C}_Q$ est tangent à l'hyperbole q , donc son centre se situe sur la droite normale à q au point Q . Donc, pour tout point $Q \in q$, le point $\sigma_q(Q) \in \mathcal{S}_{q,F}$, centre du cercle $\mathcal{C}_Q$, est l'intersection entre la médiatrice du segment $\overline{QF}$ et la normale à q au point Q .

Démontrons maintenant le Théorème 3.1.2 :

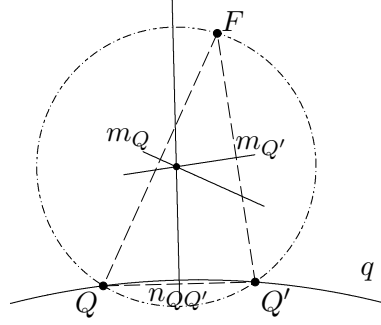
PREUVE DU THÉORÈME 3.1.2. Soit (m_Q) la famille des médiatrices des segments $\overline{QF}$.

Soit deux points Q et Q' sur l'hyperbole q . Nous allons faire tendre le point Q' vers Q avec $Q' \neq Q$. Les médiatrices m_Q et $m_{Q'}$ se croisent en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle $\Delta QQ'F$. Donc, ce point appartient aussi à $n_{QQ'}$, la médiatrice du segment $\overline{QQ'}$. L'étude de l'intersection entre les médiatrices m_Q et $m_{Q'}$ se ramène ainsi à l'étude de l'intersection entre la médiatrice m_Q , qui reste fixe lorsque Q' varie, et la médiatrice $n_{QQ'}$ qui, elle, varie.

Puisque tout point Q de q est régulier, lorsque Q' tend vers Q , la médiatrice $n_{QQ'}$ tend vers la normale à q au point Q . Donc le point caractéristique associé à m_Q est l'intersection entre la médiatrice m_Q et la normale à q au point Q , qui est bien un point de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ par la Remarque 3.1.4. $\square$

Remarquons que le Théorème 3.1.2 est vrai non seulement pour une hyperbole mais aussi pour toute arc de courbe plane n'ayant pas de point singulier ; en effet, la seule propriété de l'hyperbole utilisée dans la preuve est le fait que tout point de q est régulier. Autrement dit, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.1.5. *Soit un point F et un arc de courbe plane γ n'ayant pas de point singulier. La courbe $\mathcal{S}_{\gamma,F}$, lieu des centres des cercles tangents à l'arc γ et passant par le point F est l'enveloppe des médiatrices des segments $\overline{GF}$ pour tout point G appartenant à l'arc γ .*

FIGURE 3.1 – La courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ comme enveloppe des médiatrices

3.1.1 Une paramétrisation de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$

La Remarque 3.1.4 permet de construire une paramétrisation de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ de la manière suivante. Soit

$$\begin{aligned}\tilde{q} : \mathbb{R} &\longrightarrow q \\ t &\longmapsto \tilde{q}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{q}_x(t) \\ \tilde{q}_y(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

une paramétrisation de l'hyperbole q . On introduit

$$\begin{aligned}n : \quad & \frac{\partial \tilde{q}_x(t)}{\partial t} (x - \tilde{q}_x(t)) + \frac{\partial \tilde{q}_y(t)}{\partial t} (y - \tilde{q}_y(t)) \\ m : \quad & (\tilde{q}_x(t) - x_F) \left(x - \frac{\tilde{q}_x(t) + x_F}{2} \right) + (\tilde{q}_y(t) - y_F) \left(y - \frac{\tilde{q}_y(t) + y_F}{2} \right)\end{aligned}$$

où $F = (x_F, y_F)$ sont les coordonnées du point F , respectivement la normale à l'hyperbole au point $\tilde{q}(t)$ et la médiatrice du segment $[F\tilde{q}(t)]$.

On considère alors la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ définie par la paramétrisation

$$\begin{aligned}\sigma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{S}_{q,F} \\ t &\longmapsto \text{intersection de } n(t) \text{ et } m(t) = \begin{pmatrix} \sigma_x(t) \\ \sigma_y(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On a donc, en omettant le paramètre t ,

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}}_x & \dot{\tilde{q}}_y \\ \tilde{q}_x - x_F & \tilde{q}_y - y_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}}_x & \dot{\tilde{q}}_y \\ \tilde{q}_x - x_F & \tilde{q}_y - y_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_x \\ \tilde{q}_y \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \|\overrightarrow{F\tilde{q}}\|^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{q}_x \\ \tilde{q}_y \end{pmatrix} - \frac{\frac{1}{2} \|\overrightarrow{F\tilde{q}}\|^2}{\dot{\tilde{q}}_x(\tilde{q}_y - y_F) - (\tilde{q}_x - x_F)\dot{\tilde{q}}_y} \begin{pmatrix} \tilde{q}_y - y_F & -\dot{\tilde{q}}_y \\ -(\tilde{q}_x - x_F) & \dot{\tilde{q}}_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{q}_x \\ \tilde{q}_y \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \frac{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2}{\dot{\tilde{q}}(t) \wedge \overrightarrow{F\tilde{q}(t)}} \begin{pmatrix} -\dot{\tilde{q}}_y \\ \dot{\tilde{q}}_x \end{pmatrix}\end{aligned}$$

où le symbole $\wedge$ correspond au déterminant de deux vecteurs.

On suppose dans la suite que la paramétrisation $\tilde{q}(t)$ de l'hyperbole q est unitaire (i.e. $\|\dot{\tilde{q}}(t)\| = 1$). Alors

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{S}_{q,F} \\ t &\longmapsto \tilde{q}(t) + R(t)\dot{\tilde{q}}(t)^\perp \end{aligned} \quad (3.1)$$

où

$$R(t) := \frac{1}{2} \frac{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2}{\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)} \quad (3.2)$$

est le rayon du cercle passant par F et tangent à l'hyperbole q au point $\tilde{q}(t)$. Ici, la notation $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^\perp := \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ correspond au vecteur orthogonal tourné dans le sens direct. On voit alors que le point $\sigma(t)$ appartient bien à la normale à l'hyperbole au point $\tilde{q}(t)$, car la dérivée $\dot{\tilde{q}}(t)$ est un vecteur tangent à l'hyperbole. On remarque en outre que le produit $\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)$ est positif lorsque le point F appartient au demi-plan défini par la tangente à q en $\tilde{q}(t)$ qui contient le vecteur $\dot{\tilde{q}}(t)^\perp$ et négatif sinon (voir les Figures 3.2 et 3.3).

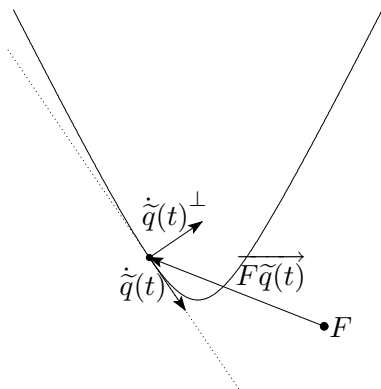


FIGURE 3.2 – Le point F appartient au demi-plan défini par la tangente à q en $\tilde{q}(t)$ qui contient le vecteur $\dot{\tilde{q}}(t)^\perp$: le produit vectoriel est positif.

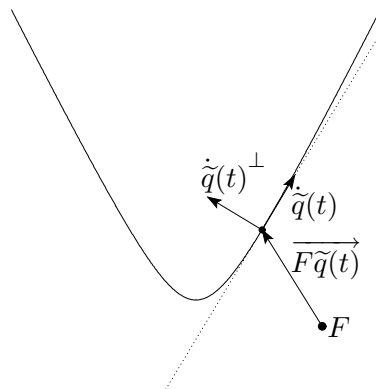


FIGURE 3.3 – Le point F n'appartient pas au demi-plan défini par la tangente à q en $\tilde{q}(t)$ qui contient le vecteur $\dot{\tilde{q}}(t)^\perp$: le produit vectoriel est négatif.

3.1.2 À propos des asymptotes de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$

Pour comprendre la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$, il est intéressant de commencer par son comportement asymptotique. En effet, en observant cette courbe on remarque très vite qu'elle présente deux types d'asymptotes : des droites et des paraboles.

Paraboles asymptotes. Lorsqu'un point sur l'hyperbole tend vers l'infini, sa distance à l'asymptote tend vers 0. Donc, le point correspondant sur la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ tend vers le lieu des centres des cercles passant par un point et tangents à une droite, ici l'asymptote, c'est-à-dire vers une parabole dont la directrice est l'asymptote et le foyer est le point F .

Plus précisément, soit $\mathcal{P}_{l_1,F}$ et $\mathcal{P}_{l_2,F}$ les paraboles de foyer F et de directrices les asymptotes l_1 et l_2 de q . Alors, $\mathcal{P}_{l_1,F}$ et $\mathcal{P}_{l_2,F}$ sont deux asymptotes de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$.

Droites asymptotes. Observons la paramétrisation (3.1) de $\mathcal{S}_{q,F}$ et remarquons que le dénominateur $\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)$ s'annule lorsque les vecteurs $\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}$ et $\dot{\tilde{q}}(t)$ sont colinéaires, c'est-à-dire lorsque la droite $F\tilde{q}(t)$ est tangente à l'hyperbole. Puisque la norme $\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|$ est finie, le rayon $R(t)$ (défini en (3.2)) d'un cercle passant par F et tangent à q tend vers l'infini lorsque la droite $F\tilde{q}(t)$ tend vers une tangente à l'hyperbole passant par F .

D'un point de vue géométrique, soit alors, si elle existe, une droite d_T tangente à l'hyperbole q passant par le point F . Appelons Q_T le point de tangence. Nous avons expliqué dans la Remarque 3.1.4 qu'un point $\sigma_q(Q)$ de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ est donné par l'intersection de la normale à q au point Q avec la médiatrice du segment $\overline{QF}$. La normale à q au point Q_T est perpendiculaire à la droite d_T . De plus, la médiatrice a_T du segment $\overline{Q_T F}$ est aussi perpendiculaire à la droite d_T . Donc la normale en Q_T et la médiatrice a_T sont parallèles. On remarque de plus que, lorsqu'un point Q de l'hyperbole tend vers Q_T , la normale en ce point et la médiatrice de $\overline{QF}$ tendent vers la normale en Q_T et a_T respectivement. On en déduit que la droite a_T est une asymptote de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$.

3.1.3 À propos des cercles osculateurs

Parmi les cercles tangents à une hyperbole, il y a ces cercles très particuliers que l'on nomme *osculateurs*. Ce sont des cercles dont le rayon est égal au rayon de courbure de l'hyperbole au point de tangence. De ce fait, parmi tous les cercles tangents à l'hyperbole en un point, ce sont les cercles qui l'approchent le mieux localement.

D'un point de vue algébrique, il s'agit de cercles ayant un point d'intersection de multiplicité plus grande où égale à trois avec l'hyperbole. Si la multiplicité est 4, on parle de cercle hyperosculateur. Une hyperbole possède exactement deux cercles hyperosculateurs, chacun correspondant à un sommet de l'hyperbole.

Ces cercles ont des propriétés intéressantes et correspondent de plus à des points très particuliers de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$.

Théorème 3.1.6 (Kneser). (*Voir [Kne12]*) Soit γ un arc de courbe plane d'extrémités A et B avec courbure monotone. Alors les cercles osculateurs à γ sont disjoints deux à deux et contenus les uns dans les autres. De plus, les cercles osculateurs aux points de γ compris entre A et B recouvrent simplement le disque troué qui a pour bord les cercles osculateurs aux points A et B .

Comme la courbure d'un quart d'hyperbole est monotone et l'asymptote du quart d'hyperbole peut être vue comme le cercle osculateur à l'infini, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.7. *Les cercles osculateurs à un quart d'hyperbole sont contenus les uns dans les autres et recouvrent le demi-plan délimité par l'asymptote du quart d'hyperbole, à l'exception de l'intérieur du cercle hyperosculateur.*

Les asymptotes de l'hyperbole q , on l'a dit, coupent le plan $\mathbb{R}^2$ en quatre composantes connexes. Une manière d'identifier les points appartenant à chacune de ces composantes connexes est la suivante. Chacune des deux asymptotes coupe le plan $\mathbb{R}^2$ en deux demi-plans. Chacune des quatre composantes connexes est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ qui appartiennent à l'intersection de deux demi-plans.

Avec cette définition, il devient évident que chaque composante connexe de $\mathbb{R}^2$ définie par les asymptotes de l'hyperbole, à l'exception de l'intérieur des deux cercles hyperosculateurs à l'hyperbole, est recouverte par deux familles de cercles osculateurs provenant de deux quarts d'hyperboles distincts. Ceci explique le corollaire suivant :

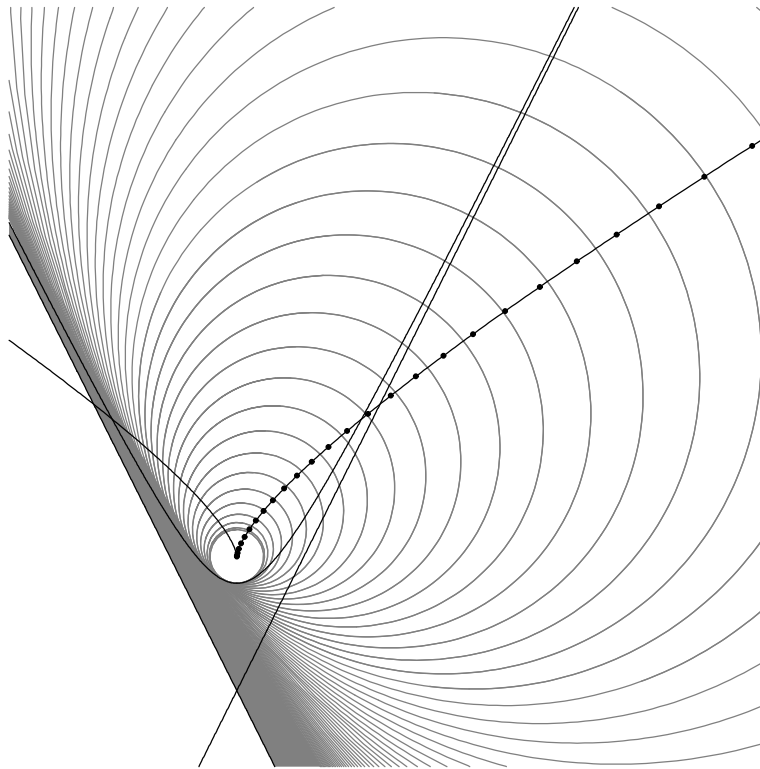


FIGURE 3.4 – Illustration du Corollaire 3.1.7

Corollaire 3.1.8. *Par tout point du plan, à l'exception de l'intérieur des deux cercles hyperosculateurs à l'hyperbole, passent exactement deux cercles osculateurs à l'hyperbole.*

Remarque 3.1.9. Les asymptotes de l'hyperbole q peuvent être vues comme des cercles osculateurs. Étudions la situation dans $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$. D'une part, la réunion d'une droite du plan affine $\mathbb{R}^2$ et de la droite à l'infini est une conique, dégénérée en deux droites, passant par les deux points conjugués complexes sur la droite à l'infini $[1, \pm i, 0]$; donc, il s'agit bien d'un cercle. D'autre part, une asymptote est tangente à la courbe en un point sur la droite à l'infini. Donc, l'hyperbole q est tangente à son asymptote à l'infini et intersecte la droite à l'infini; elle possède donc un point d'intersection de multiplicité 3 avec l'asymptote-cercle osculateur, réunion de l'asymptote et de la droite à l'infini.

Revenons maintenant à la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$. Le Corollaire 3.1.8 nous fournit l'existence de deux cercles osculateurs passant par le point F . Leurs centres appartiennent à la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ et définissent même des points remarquables :

Proposition 3.1.10. *Soit C un cercle de centre C osculateur à l'hyperbole q et passant par un point F . Alors, le point C correspond à un cusp ordinaire sur la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ relative à l'hyperbole q et au point F .*

Rappelons qu'un *cusp ordinaire* (ou point de rebroussement) est un point d'arrêt de la courbe tel que la paramétrisation locale est de la forme (t^2, t^3) dans un repère orthogonal adapté.

PREUVE. En termes de la paramétrisation (3.1) de $\mathcal{S}_{q,F}$, l'énoncé de la Proposition 3.1.10 peut être reformulé de la sorte : soit $t_C \in \mathbb{R}$ tel que $\sigma(t_C)$ est le centre d'un cercle passant par F et osculateur à q . Alors $\sigma(t_C)$ est un cusp ordinaire de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(a) $\sigma(t_C)$ est un point d'arrêt :

$$\dot{\sigma}(t_C) = 0$$

(b) localement, la paramétrisation $\sigma(t)$ s'écrit en coordonnées dans un repère adapté comme (t^2, t^3) ; en particulier, au point t_C les dérivées $\dot{\sigma}(t_C)$ et $\ddot{\sigma}(t_C)$ sont linéairement indépendantes.

Choisissons une paramétrisation unitaire $\tilde{q}(t)$ de l'hyperbole. Ainsi, comme les vecteurs $\dot{\tilde{q}}(t)$ et $\ddot{\tilde{q}}(t)$ sont orthogonaux, nous avons la relation suivante avec le rayon de courbure signé de l'hyperbole noté $r(t)$:

$$\ddot{\tilde{q}}(t)^\perp = -\frac{1}{r(t)}\dot{\tilde{q}}(t). \quad (3.3)$$

Notons que $r(t)$ possède un signe qui est positif lorsque $\langle \dot{\tilde{q}}(t)^\perp | \ddot{\tilde{q}}(t) \rangle > 0$ et négatif sinon.

L'idée de la démonstration est de travailler dans la base orthonormée $(\dot{\tilde{q}}(t), \dot{\tilde{q}}(t)^\perp)$.

Commençons par montrer l'assertion suivante :

Assertion 3.1. *La vitesse $\dot{\sigma}(t)$ s'annule si et seulement si le point $\sigma(t)$ est le centre d'un cercle osculateur à l'hyperbole passant par le point F .*

En dérivant la paramétrisation (3.1) par rapport à t , nous obtenons la décomposition de $\dot{\sigma}(t)$ dans la base orthonormée $(\dot{\tilde{q}}(t), \dot{\tilde{q}}(t)^\perp)$.

$$\dot{\sigma}(t) = \left(1 - \frac{R(t)}{r(t)}\right) \dot{\tilde{q}}(t) + \dot{R}(t) \dot{\tilde{q}}(t)^\perp.$$

Nous observons que la première composante est nulle si et seulement si $R(t) = r(t)$, c'est-à-dire, lorsque le cercle tangent passant par F est aussi osculateur. Il reste à vérifier que dans ce cas $\dot{R}(t) = 0$. Dérivons en s'aidant de la relation (3.3) :

$$\begin{aligned} \dot{R}(t) &= \frac{\langle \overrightarrow{F\tilde{q}(t)} | \dot{\tilde{q}}(t) \rangle}{\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)} - \frac{1}{2} \|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2 \frac{\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \ddot{\tilde{q}}(t)}{(\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t))^2} \\ &= \frac{\langle \overrightarrow{F\tilde{q}(t)} | \dot{\tilde{q}}(t) \rangle}{\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)} - R(t) \frac{\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \ddot{\tilde{q}}(t)}{\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)} \\ &= \frac{\langle \overrightarrow{F\tilde{q}(t)} | \dot{\tilde{q}}(t) \rangle}{\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)} - \frac{R(t)}{r(t)} \frac{\langle \overrightarrow{F\tilde{q}(t)} | \dot{\tilde{q}}(t) \rangle}{\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)} \end{aligned}$$

Si nous nommons $\delta(t)$ le scalaire défini par

$$\delta(t) := \frac{\langle \overrightarrow{F\tilde{q}(t)} | \dot{\tilde{q}}(t) \rangle}{\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)} \quad (3.4)$$

nous pouvons alors écrire $\dot{R}(t)$ comme

$$\dot{R}(t) = \frac{1}{r(t)} \delta(t) (r(t) - R(t)) \quad (3.5)$$

Ainsi, on a $\dot{R}(t) = 0$ si et seulement si $R(t) = r(t)$, ce qui démontre l'Assertion 3.1.

Nous pouvons maintenant écrire $\dot{\sigma}(t)$ en coordonnées

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{1}{r(t)} \begin{pmatrix} r(t) - R(t) \\ \delta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta(t) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Nous devons maintenant dériver $\dot{\sigma}(t)$. Pour alléger la notation, notons dorénavant $\delta := \delta(t)$, $r := r(t)$ et $R := R(t)$. En utilisant la relation (3.3) et la dérivée de δ

$$\dot{\delta} = \frac{1}{\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)} + \frac{1}{r}(1 - \delta^2) = \frac{2R}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} + \frac{1}{r}(1 - \delta^2) \quad (3.7)$$

nous obtenons la dérivée $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta(t) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta(t) \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\delta}{r} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{2R}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} + \frac{1}{r}(1 - \delta^2) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\delta}{r} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix} + \left(\frac{2R}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} + \frac{2}{r} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\delta}{r} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix} + 2 \frac{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2 + rR}{r\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notons $B(t)$ la fonction scalaire suivante apparaissant dans cette dérivée

$$B(t) := \frac{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2 + rR}{r\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} \quad (3.8)$$

et remarquons que $B(t)$ est toujours non nul. En effet, comme $r(t)$ et $R(t)$ se mesurent sur la normale à l'hyperbole au point $\tilde{q}(t)$, par le Théorème de la hauteur, le numérateur s'annule si et seulement si le triangle de sommet F et de base $[\tilde{\lambda}(t)\sigma(t)]$ est rectangle ; c'est-à-dire, si et seulement si la droite $F\tilde{q}(t)$ est tangente à l'hyperbole. Or, cela correspond à une droite asymptote de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$. Donc $B(t)$ est toujours non nul.

Finalement, les coordonnées de la dérivée seconde $\ddot{\sigma}(t)$ sont données par

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}(t) &= \left(\frac{-\dot{r}}{r^2}(r - R) + \frac{1}{r}(\dot{r} - \dot{R}) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix} + \frac{1}{r}(r - R) \left(-\frac{\delta}{r} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix} + 2B(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(\dot{r} - \dot{R} - \frac{1}{r}(r - R)(\dot{r} + \delta) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix} + 2\frac{1}{r}(r - R)B(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nous avons montré que pour t_C tel que $\sigma(t_C)$ est le centre d'un cercle osculateur à q passant par F , on a $R(t_C) = r(t_C)$ et $\dot{R}(t_C) = 0$. Ainsi, lorsque l'on évalue $\ddot{\sigma}(t)$ en t_C , on obtient

$$\ddot{\sigma}(t_C) = \frac{\dot{r}(t_C)}{r(t_C)} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta(t_C) \end{pmatrix}.$$

Il s'agit maintenant de calculer la dérivée troisième $\sigma^{(3)}(t)$. Notons pour cela $A(t)$ la fonction scalaire apparaissant dans (3.9)

$$A(t) := \dot{r} - \dot{R} - \frac{1}{r}(r - R)(\dot{r} + \delta) \quad (3.10)$$

et remarquons que

$$A(t_C) = \dot{r}(t_C) .$$

Calculons alors la dérivée troisième de $\sigma(t)$

$$\begin{aligned} \sigma^{(3)}(t) &= \left(\frac{-\dot{r}}{r^2} A(t) + \frac{1}{r} \dot{A}(t) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix} + \frac{1}{r} A(t) \left(-\frac{\delta}{r} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix} + 2B(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + 2 \left(\left(\frac{-\dot{r}}{r^2} B(t) + \frac{1}{r} \dot{B}(t) \right) (r - R) + \frac{1}{r} B(t) (\dot{r} - \dot{R}) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{r^2} (r - R) B(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui, évaluée en t_C , donne

$$\begin{aligned} \sigma^{(3)}(t_C) &= \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r} A(t_C) (\dot{r} + \delta) + \dot{A}(t_C) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix} + \frac{2}{r} A(t_C) B(t_C) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{2}{r} B(t_C) (\dot{r} - \dot{R}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r} \left(\dot{A}(t_C) - \frac{\dot{r}}{r} (\dot{r} + \delta) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix} + \frac{4\dot{r}}{r} B(t_C) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il nous faut donc calculer la dérivée $\dot{A}(t)$

$$\dot{A}(t) = \ddot{r} - \ddot{R} - \left(\frac{-\dot{r}}{r^2} (r - R) + \frac{1}{r} (\dot{r} - \dot{R}) \right) (\dot{r} + \delta) - \frac{1}{r} (r - R) (\ddot{r} + \dot{\delta})$$

qui, évaluée en t_C , se résume à

$$\dot{A}(t_C) = \ddot{r} - \ddot{R} - \frac{\dot{r}}{r} (\dot{r} + \delta) .$$

Comme $\dot{R} = \frac{1}{r} \delta (r - R)$, la dérivée seconde évaluée en t_C s'écrit alors $\ddot{R}(t_C) = \frac{\dot{r}}{r} \delta$; et finalement

$$\dot{A}(t_C) = \ddot{r} - \frac{\dot{r}}{r} (\dot{r} + 2\delta)$$

Ainsi, nous avons au point t_C

$$\begin{aligned} \sigma^{(3)}(t_C) &= \frac{1}{r} \left(\ddot{r} - 2\frac{\dot{r}}{r} (\dot{r} + \delta) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix} + \frac{4\dot{r}}{r} B(t_C) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \ddot{\sigma}(t_C) &= \frac{\dot{r}}{r} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et comme $B(t_C)$ et $\dot{r}$ sont non nuls, les dérivées $\ddot{\sigma}(t_C)$ et $\sigma^{(3)}(t_C)$ sont linéairement indépendantes, ce qui achève la démonstration de la Proposition 3.1.10. $\square$

La Proposition 3.1.10 et le Corollaire 3.1.8 nous permettent de donner le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.11. *Pour un point F situé en dehors des deux cercles hyperosculateurs à l'hyperbole q , la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ relative à q et au point F possède exactement deux cusp.*

Définition 3.1.12. Soit $\mathcal{S}_{q,F}$ la courbe relative à une hyperbole q et à un point F et soit C l'un de ses cusp. Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant

$$E_C = (\mathcal{S}_{q,F} \setminus \text{sing}(\mathcal{S}_{q,F})) \cup \{C\}$$

où $\text{sing}(\mathcal{S}_{q,F})$ est l'ensemble des points singuliers de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$. Nous appelons *profil du cusp* C , noté $[\mathcal{S}_{q,F}, C]$, la composante connexe de E_C contenant le point C .

Remarque 3.1.13. Puisque le cercle tangent qui a pour centre un cusp de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ est osculateur à l'hyperbole (Prop. 3.1.10), le produit $\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)$ de la paramétrisation (3.1) est positif en ce point. Or, ce produit change de signe exactement lorsque les vecteurs $\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}$ et $\dot{\tilde{q}}(t)$ sont colinéaires (ce qui fournit une asymptote de $\mathcal{S}_{q,F}$) ou lorsque l'on change de branche d'hyperbole (ce qui fournit aussi une asymptote de $\mathcal{S}_{q,F}$, voir Sec. 3.1.2). Donc, pour tout t tel que $\tilde{q}(t)$ appartient au profil $[\mathcal{S}_{q,F}, C]$, le produit $\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)$ est positif et ainsi le cercle de centre $\sigma(t)$ appartient au même demi-plan défini par la tangente à q en $\tilde{q}(t)$ qui contient le cercle osculateur au point $\tilde{q}(t)$; par conséquent, pour tout t tel que $\tilde{q}(t)$ appartient au profil $[\mathcal{S}_{q,F}, C]$, le rayon $R(t)$ est positif.

Remarque 3.1.14. Soit $t_C \in \mathbb{R}$ tel que $\sigma(t_C)$ soit un cusp de la courbe $\mathcal{S}_{q,[F]}$. On déduit de l'Équation (3.5) que $R(t_C)$ est un extremum local sur le profil du cusp $[\mathcal{S}_{q,F}, C]$. Montrons en effet que la dérivée $\dot{R}(t)$ change de signe au cusp.

Supposons que pour $t \in (\mathbb{R}, t_C)$, le rayon $r(t)$ du cercle osculateur osculateur à q au point $\tilde{q}(t)$ soit décroissant. Pour $t \in (\mathbb{R}, t_C)$ tel que $t < t_C$, le cercle osculateur en $\tilde{q}(t)$ contient le cercle osculateur de centre $\sigma(t_C)$. Par conséquent, le cercle osculateur en $\tilde{q}(t)$ contient le point F . Donc le cercle tangent au point $\tilde{q}(t)$ et passant par F est contenu dans le cercle osculateur en $\tilde{q}(t)$ et donc $r(t) > R(t)$.

Pour $t \in (\mathbb{R}, t_C)$ tel que $t > t_C$, le cercle osculateur en $\tilde{q}(t)$ est contenu dans le cercle osculateur de centre $\sigma(t_C)$. Par conséquent, le point F est à l'extérieur du cercle osculateur en $\tilde{q}(t)$. Donc le cercle tangent au point $\tilde{q}(t)$ et passant par F contient le cercle osculateur en $\tilde{q}(t)$ et donc $r(t) < R(t)$. Ainsi, la dérivée $\dot{R}(t)$ s'annule et change de signe au cusp. Donc $R(t_C)$ est un extremum local.

3.1.3.1 La développée de l'hyperbole

On ne peut parler de cercles osculateurs sans parler de développée. En outre, la développée de l'hyperbole et la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$, plus particulièrement ses profils, sont étroitement liées entre elles.

Définition 3.1.15. On appelle *développée de l'hyperbole*, notée $\mathcal{L}_q$, l'enveloppe des droites normales à l'hyperbole q . C'est aussi le lieu des centres des cercles osculateurs à l'hyperbole q . De plus, on définit λ l'application qui, à un point Q de l'hyperbole q , associe $\lambda(Q) \in \mathcal{L}_q$, le centre du cercle osculateur à ce point.

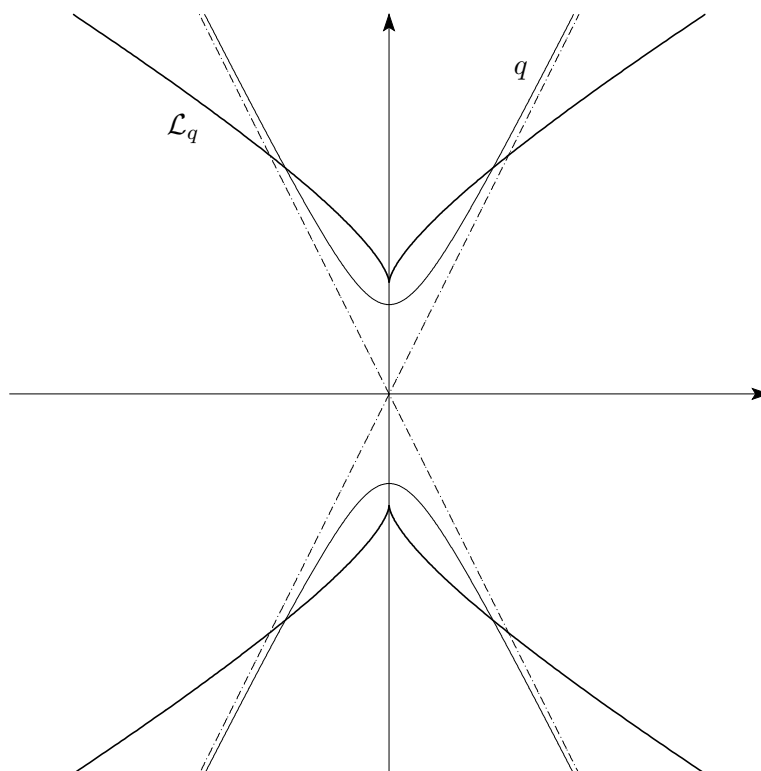
Avec le repère choisi, la développée $\mathcal{L}_q$ est symétrique par rapport aux axes de coordonnées. Étant donnée une paramétrisation $\tilde{q}(t)$ de l'hyperbole, le rayon de courbure s'exprime alors par

$$r(t) = \frac{\|\dot{\tilde{q}}(t)\|^3}{\dot{\tilde{q}}(t) \wedge \ddot{\tilde{q}}(t)}.$$

Ainsi, on peut paramétrer la développée $\mathcal{L}_q$ par

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{L}_q \\ t &\longmapsto \tilde{q}(t) + \frac{\|\dot{\tilde{q}}(t)\|^2}{\dot{\tilde{q}}(t) \wedge \ddot{\tilde{q}}(t)} \dot{\tilde{q}}(t)^\perp \end{aligned} \quad (3.11)$$

Remarque 3.1.16. Observons que, si $Q \in q^+$, alors l'ordonnée de $\lambda(Q)$ est strictement positive. De même, si $Q \in q^-$, alors l'ordonnée de $\lambda(Q)$ est strictement négative. De plus, soit $Q \in q$ tel que l'abscisse de Q est négative, alors l'abscisse de $\lambda(Q)$ est positive et réciproquement.

FIGURE 3.5 – La développée de l'hyperbole $\mathcal{L}_q$

La Remarque 3.1.16 nous permet de nommer $\mathcal{L}_q^+$ et $\mathcal{L}_q^-$ les branches de $\mathcal{L}_q$ ayant de ordonnées positives ou négatives respectivement. De plus, l'appellation *quart de développée* correspondra à la portion de la développée contenue dans l'un des quatre quadrants définis par le système d'axes.

Proposition 3.1.17. *La développée $\mathcal{L}_q$ jouit des propriétés suivantes.*

Soit n une droite normale à l'hyperbole q en un point Q et donc tangente à la développée $\mathcal{L}_q$ au point $\lambda(Q)$

- (i) *Soit P et L deux points de même abscisse et d'ordonnée y_P et y_L respectivement. Supposons que P appartienne à la normale n , et que L appartienne au quart de développée $\mathcal{L}_q$ contenant $\lambda(Q)$. Alors $|y_P| \geq |y_L|$, avec égalité si et seulement si $P = \lambda(Q)$.*
- (ii) *Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles osculateurs au même quart d'hyperbole et tels que $\mathcal{C}'$ soit à l'intérieur de $\mathcal{C}$. Appelons respectivement $C = (x_C, y_C)$ et $C' = (x_{C'}, y_{C'})$ leurs centres. Alors $|x_C| > |x_{C'}|$ et $|y_C| > |y_{C'}|$.*

La propriété (i) est équivalente à dire que les deux quarts de la branche $\mathcal{L}_q^+$ sont des fonctions concaves, tandis que les deux quarts de la branche $\mathcal{L}_q^-$ sont des fonctions convexes. Pour vérifier cette propriété, il suffit de savoir que la longueur d'arc entre deux points sur la courbe $\mathcal{L}_q$ est égale à la longueur d'arc entre les deux points sur l'hyperbole correspondants (en effet, toute courbe est la développante de sa développée). De plus, cette propriété est aisément vérifiable sur la Figure 3.6.

La propriété (ii) découle de la monotonie du rayon de courbure d'un quart d'hyperbole.

Dans la Proposition 5.1.3 du Chapitre 5 nous montrerons une propriété intéressante à propos de la position relative de la développée $\mathcal{L}_q$ par rapport à un profil de cusp.

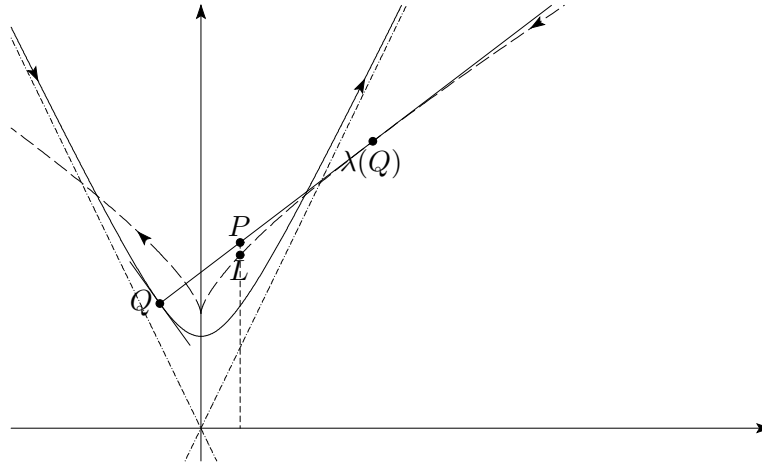


FIGURE 3.6 – Illustration de la Proposition 3.1.17(i)

3.1.4 À propos de la courbure de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$

Dans cette section, nous montrons que la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ ne possède pas de point d'inflexion. Les calculs sont bien détaillés, car ils seront utiles dans le Chapitre suivant.

Proposition 3.1.18. *Soit $\tilde{q}(t)$ une paramétrisation unitaire de l'hyperbole q et notons $\kappa_q(t)$ la courbure de $\tilde{q}(t)$ au point $\tilde{q}(t)$. Soit de plus $\sigma(t)$ la paramétrisation de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ correspondante. Alors la courbure $\kappa_\sigma(t)$ de $\mathcal{S}_{q,F}$ en $\sigma(t)$ est donnée par*

$$\kappa_\sigma(t) = \frac{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\| \left(\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2 + R(t)r(t) \right)}{4 \left| \kappa_q(t) (r(t) - R(t)) R(t)^3 \right|} \kappa_q(t).$$

En particulier, la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ ne possède pas de point d'inflexion.

PREUVE. Rappelons tout d'abord que la courbure $\kappa_\sigma(t)$ au point $\sigma(t)$ est donnée par

$$\kappa_\sigma(t) = \frac{\dot{\sigma}(t) \wedge \ddot{\sigma}(t)}{\|\dot{\sigma}(t)\|^3}.$$

L'idée est de calculer le déterminant $\dot{\sigma}(t) \wedge \ddot{\sigma}(t)$ dans la base orthonormée $\left(\dot{\tilde{q}}(t), \dot{\tilde{q}}(t)^\perp \right)$.

Rappelons (Équation (3.6)), que les coordonnées de la dérivée $\dot{\sigma}(t)$ dans la base orthonormée $\left(\dot{\tilde{q}}(t), \dot{\tilde{q}}(t)^\perp \right)$ sont

$$\dot{\sigma}(t) = \kappa_q(t) (r(t) - R(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ \delta(t) \end{pmatrix}$$

où $R(t)$ et $\delta(t)$ sont définis respectivement par les équations (3.2) et (3.4). La norme de $\dot{\sigma}(t)$ est donc donnée par

$$\|\dot{\sigma}(t)\| = \left| \kappa_q(t) (r(t) - R(t)) \right| \sqrt{1 + \delta(t)^2}.$$

Calculons $1 + \delta(t)^2$:

$$\begin{aligned}
 1 + \delta(t)^2 &= \frac{1}{\left(\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)\right)^2} \left(\left(\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)\right)^2 + \left\langle \overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \mid \dot{\tilde{q}}(t) \right\rangle^2 \right) \\
 &= \frac{1}{\left(\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)\right)^2} \|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2 = \frac{2R(t)}{\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)} = \left(\frac{2R(t)}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|} \right)^2
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ainsi, la norme de $\dot{\sigma}(t)$ est exprimée par

$$\|\dot{\sigma}(t)\| = \frac{2 \left| \kappa_q(t) (r(t) - R(t)) R(t) \right|}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|}. \tag{3.13}$$

Rappelons aussi (Équation (3.9)) que les coordonnées de la dérivée seconde $\ddot{\sigma}(t)$ sont données par

$$\ddot{\sigma}(t) = \kappa_q(t) A(t) \begin{pmatrix} 1 \\ \delta(t) \end{pmatrix} + 2\kappa_q(t) (r(t) - R(t)) B(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

où $A(t)$ et $B(t)$ sont définis respectivement par les équations (3.10) et (3.8). Calculons alors le déterminant $\dot{\sigma}(t) \wedge \ddot{\sigma}(t)$

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}(t) \wedge \ddot{\sigma}(t) &= \kappa_q(t)^2 (r(t) - R(t)) A(t) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \delta(t) & \delta(t) \end{vmatrix} \\
 &\quad + 2 \left(\kappa_q(t) (r(t) - R(t)) \right)^2 B(t) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \delta(t) & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \left(\kappa_q(t) (r(t) - R(t)) \right)^2 B(t) \kappa_q(t)
 \end{aligned}$$

Finalement, la courbure $\kappa_\sigma(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned}
 \kappa_\sigma(t) &= \frac{2 \left(\kappa_q(t) (r(t) - R(t)) \right)^2}{\|\dot{\sigma}(t)\|^3} B(t) \kappa_q(t) \\
 &= \frac{2 \|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^3 \left(\kappa_q(t) (r(t) - R(t)) \right)^2}{8 \left| \kappa_q(t) (r(t) - R(t)) R(t) \right|^3} \frac{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2 + r(t) R(t)}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} \kappa_q(t) \\
 &= \frac{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|}{4 \left| \kappa_q(t) (r(t) - R(t)) R(t) \right|^3} \left(\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2 + r(t) R(t) \right) \kappa_q(t)
 \end{aligned}$$

Comme $B(t)$ est toujours non nul, la courbure $\kappa_\sigma(t)$ ne s'annule pas et la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ ne possède pas de point d'inflexion. $\square$

3.1.5 À propos des cercles bitangents

On appelle *cercle bitangent à l'hyperbole* un cercle qui est tangent à l'hyperbole en deux points. Pour des raisons de symétrie, le centre des cercles bitangents se trouve sur les axes de symétrie de l'hyperbole, dans notre cas, les axes de notre système de coordonnées. En effet, pour que le cercle soit bitangent, son centre doit se trouver à égale distance de deux

quarts d'hyperbole. Or les axes de symétrie sont les seuls points du plan qui ont cette propriété.

D'un point de vue algébrique, un cercle bitangent possède deux intersection de multiplicité 2 avec l'hyperbole; hormis les points de tangence il n'existe donc pas d'autres points d'intersection avec l'hyperbole (Théorème de Bézout). Par conséquent, un cercle bitangent est soit à l'intérieur de l'hyperbole soit à l'extérieur. Il faut noter qu'un cercle hyperosculateur est aussi un cercle bitangent, car il possède un unique point d'intersection de multiplicité 4 qui peut être vu comme limite de deux points de tangence à l'hyperbole.

Il existe deux familles de cercles bitangents : la première est formée de cercles bitangents qui sont à l'extérieur de l'hyperbole et l'autre de cercles bitangents qui sont à l'intérieur de l'hyperbole. Dans notre système de coordonnées, les centres des cercles bitangents appartenant à la première famille sont sur l'axe des abscisses tandis que ceux de l'autre famille appartiennent à l'axe des ordonnées à l'exception de l'intervalle contenant l'origine délimité par le centre des cercles hyperosculateurs. De plus, la première famille recouvre l'extérieur de l'hyperbole, tandis que l'autre recouvre l'intérieur de l'hyperbole.

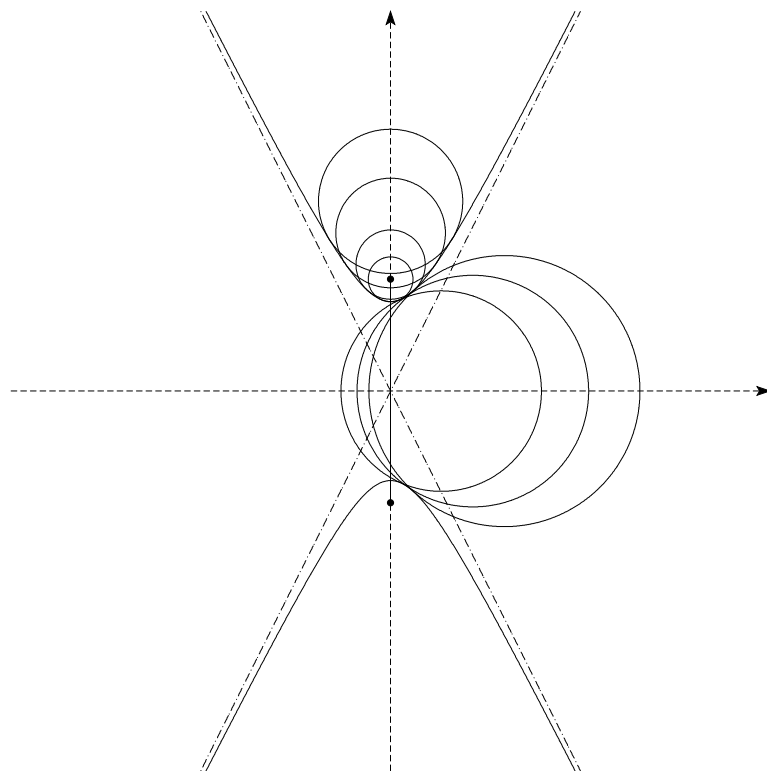


FIGURE 3.7 – Quelques cercles des deux familles de cercles bitangents à l'hyperbole

Proposition 3.1.19. *Par tout point du plan, à l'exception de l'intérieur des deux cercles hyperosculateurs à l'hyperbole, passent exactement deux cercles bitangents à l'hyperbole.*

Pour tout point à l'intérieur d'un cercle hyperosculateur passe exactement un cercle bitangent à l'hyperbole.

PREUVE. Soit un point P à l'extérieur de l'hyperbole, alors le centre d'un cercle bitangent passant par P se situe sur l'axe des abscisses.

Soit $(x, 0)$ un point sur l'axe des abscisses. Comme le rayon d'un cercle tangent à l'hyperbole est égal à la distance entre son centre et l'hyperbole, calculons cette distance

pour le point $(x, 0)$. Le carré de la distance entre ce point et la branche q^+ de l'hyperbole $\{q(x, y) = (y - \alpha x)(y + \alpha x) - \varepsilon = 0\}$ est donné par

$$d_q^2 = \frac{\alpha^2 x^2}{\alpha^2 + 1} + \varepsilon > 0$$

tandis que le carré de la distance entre ce point $(x, 0)$ et le point P est donnée par

$$d_P^2 = (x - x_P)^2 + y_P^2 \geq 0.$$

Pour qu'un cercle de centre $(x, 0)$ soit bitangent à l'hyperbole et passe par le point P , il faut que $d_P^2 = d_q^2$. Or, les valeurs de x qui satisfont cette équation sont

$$x = -(\alpha^2 + 1)x_P \pm \sqrt{-q(x_P, y_P)(\alpha^2 + 1)}$$

où l'équation de l'hyperbole q est négative lorsqu'elle est évaluée sur un point à l'extérieur de l'hyperbole. Donc, pour un point à l'extérieur de l'hyperbole, il existe deux cercles bitangents à l'hyperbole et passant par ce point.

Soit maintenant un point P à l'intérieur de l'hyperbole. Dans ce cas, le centre d'un cercle bitangent à l'hyperbole et passant par P est sur l'axe des ordonnées.

Soit $(0, t)$ un point sur l'axe des ordonnées. Un point Q de l'hyperbole d'abscisse positive peut s'écrire en coordonnées comme $Q = \left(\frac{\sqrt{y^2 - \varepsilon}}{\alpha}, y\right)$ avec $|y| \geq \sqrt{\varepsilon}$. On en déduit que le point Q qui minimise la distance entre le point $(0, t)$ et l'hyperbole a pour coordonnées

$$\begin{cases} \left(\frac{\sqrt{\alpha^4 t^2 - (\alpha^2 + 1)^2 \varepsilon}}{\alpha^2(\alpha^2 + 1)}, \frac{\alpha^2 t}{\alpha^2 + 1}\right) & \text{si } |t| \geq \frac{(\alpha^2 + 1)\sqrt{\varepsilon}}{\alpha^2} \\ (0, \sqrt{\varepsilon}) & \text{si } 0 \leq t < \frac{(\alpha^2 + 1)\sqrt{\varepsilon}}{\alpha^2} \\ (0, -\sqrt{\varepsilon}) & \text{si } -\frac{(\alpha^2 + 1)\sqrt{\varepsilon}}{\alpha^2} < t \leq 0 \end{cases}$$

Étudions la première condition. Nous avons vu plus haut qu'un cercle bitangent à l'intérieur de l'hyperbole possède son centre sur l'axe des ordonnées à l'exception du segment reliant le centre des deux cercles hyperosculateurs. Or, les sommets de l'hyperbole ont pour coordonnées $(0, \pm\sqrt{\varepsilon})$ et les cercles hyperosculateurs ont un rayon de $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\alpha^2}$. Donc la condition, $|t| \geq \frac{(\alpha^2 + 1)\sqrt{\varepsilon}}{\alpha^2}$ fournit exactement la condition pour qu'un cercle de centre $(0, t)$ soit bitangent à l'hyperbole q . Considérons alors uniquement des valeurs de t satisfaisant cette condition. Dans ce cas, le carré de la distance entre le point $(0, t)$ et l'hyperbole est donnée par

$$d_q^2 = \frac{t^2}{\alpha^2 + 1} - \frac{\varepsilon}{\alpha^2}$$

tandis que le carré de la distance entre la point $(0, t)$ et le point P est donnée par

$$d_P^2 = x_P^2 + (y_P - t)^2.$$

Les deux valeurs de t qui satisfont simultanément ces deux équations sont

$$t_1 = \frac{(\alpha^2 + 1)y_P + \sqrt{(\alpha^2 + 1)q(x_P, y_P)}}{\alpha^2} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{(\alpha^2 + 1)y_P - \sqrt{(\alpha^2 + 1)q(x_P, y_P)}}{\alpha^2}$$

où $y_P \geq \sqrt{\varepsilon}$ et $q(x_P, y_P)$ est positif lorsque le point P est à l'intérieur de l'hyperbole. Donc, pour tout point P à l'intérieur de l'hyperbole la solution t_1 satisfait la condition $|t_1| \geq \frac{(\alpha^2 + 1)\sqrt{\varepsilon}}{\alpha^2}$. Par contre, il existe des points P pour lesquels $|t_2| < \frac{(\alpha^2 + 1)\sqrt{\varepsilon}}{\alpha^2}$; ce sont exactement les points à l'intérieur des cercles hyperosculateurs. $\square$

Revenons maintenant à la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$. La Proposition 3.1.19 nous fournit l'existence de deux cercles bitangents passant par le point F lorsque celui-ci est à l'extérieur d'un cercle hyperosculateur et d'un seul cercle bitangent sinon. Les centres de ces cercles bitangents appartiennent à la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ et définissent des points remarquables :

Proposition 3.1.20. *Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre B passant par le point F . Alors $\mathcal{C}$ est bitangent à l'hyperbole q si et seulement si le point B correspond à un point double sur la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ relative à l'hyperbole q et au point F .*

PREUVE. Par la Définition 3.1.1, la fonction définie par

$$\begin{aligned} \sigma_q : q &\longrightarrow \mathcal{S}_{q,F} \\ Q &\longmapsto \sigma_q(Q) \end{aligned}$$

associe, de manière unique, à tout point q de l'hyperbole q un point $\sigma_q(Q)$ qui est le centre du cercle passant par le point F et tangent à q en Q . Alors un cercle $\mathcal{C}$ de centre B est bitangent à l'hyperbole q si et seulement s'il existe deux points $Q_1, Q_2 \in q$ tels que $\sigma_q(Q_1) = \sigma_q(Q_2) = B$; autrement dit, si et seulement si B est un point double de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$. $\square$

Finalement, les Propositions 3.1.19 et 3.1.20 nous permettent de donner le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.21. *Pour tout point F situé en dehors des deux cercles hyperosculateurs à l'hyperbole q , la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ relative à q et au point F possède exactement deux points doubles.*

Pour tout point F situé à l'intérieur de l'un des deux cercles hyperosculateurs à l'hyperbole q , la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ relative à q et au point F possède exactement un point double.

3.1.6 En résumé

Avant de poursuivre, rappelons les résultats importants pour la suite au sujet de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$.

Asymptotes. Si le point F est à l'extérieur de l'hyperbole, il existe exactement deux droites d_{T_1} et d_{T_2} tangentes à l'hyperbole et passant par F . Donc la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ possède quatre asymptotes : deux paraboles, notées $\mathcal{P}_{l_1,F}$ et $\mathcal{P}_{l_2,F}$, et deux droites, notées a_{T_1} et a_{T_2} , qui sont les médiatrices des segments $\overline{Q_{T_1}F}$ et $\overline{Q_{T_2}F}$ où les points Q_{T_1} et Q_{T_2} sont les points de tangence de q avec les droites d_{T_1} et d_{T_2} .

Dans le cas où F est à l'intérieur de l'hyperbole, il n'existe pas de droites tangentes à l'hyperbole passant par F ; la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ n'admet donc que deux asymptotes, à savoir les paraboles $\mathcal{P}_{l_1,F}$ et $\mathcal{P}_{l_2,F}$.

Cusps. Pour tout point F à l'extérieur des cercles hyperosculateurs, la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ possède exactement deux cusps (Prop 3.1.11). Nous notons Q_{C_1} et Q_{C_2} les points de q tels que $C_1 = \sigma_q(Q_{C_1})$ et $C_2 = \sigma_q(Q_{C_2})$ soient les cusps de $\mathcal{S}_{q,F}$.

Remarque 3.1.22. Soit $\mathcal{C}_Q$ et $\mathcal{O}_Q$ respectivement un cercle tangent et le cercle osculateur à l'hyperbole en un même point Q . Si les cercles sont distincts, leur intersection est réduite à $\{Q\}$ et ils peuvent être contenus l'un dans l'autre : $\mathcal{C}_Q \subset \mathcal{O}_Q$ ou $\mathcal{C}_Q \supset \mathcal{O}_Q$

Soit un cercle $\mathcal{O}_{Q_C}$ passant par le point F et osculateur à l'hyperbole en un point noté Q_C , et considérons les cercles passant par F et tangents à l'hyperbole en des points

appartenant à un voisinage $V = (q, Q_C)$ sur l'hyperbole. Choisissons une paramétrisation de l'hyperbole $\tilde{q} : \mathbb{R} \rightarrow q$ et prenons sa restriction à $\tilde{q}^{-1}(V)$. Supposons que pour ce voisinage, la courbure de q soit décroissante. Alors pour $t > t_{Q_C}$, le cercle osculateur en $\tilde{q}(t)$ contient $\mathcal{O}_{Q_C}$ et donc le point F , donc $\mathcal{C}_{\tilde{q}(t)} \subset \mathcal{O}_{\tilde{q}(t)}$. Inversement, pour $t < t_{Q_C}$, le cercle osculateur en $\tilde{q}(t)$ est contenu dans $\mathcal{O}_{Q_C}$ et donc le point F est à l'extérieur de ce cercle osculateur, donc $\mathcal{C}_{\tilde{q}(t)} \supset \mathcal{O}_{\tilde{q}(t)}$.

Grâce à la monotonie de la courbure de q , ce changement se produit seulement lorsque le cercle passant par F est osculateur à l'hyperbole. Autrement dit, s'il existe un point Q tel que le cercle passant par F et tangent en Q contient le cercle osculateur en ce point, alors pour tout point de q compris entre Q et le point Q_C correspondant à un cercle osculateur passant par F , le cercle tangent à q passant par F contiendra aussi le cercle osculateur en ce point. De même si le cercle est contenu dans le cercle osculateur en ce point.

Points doubles. Pour tout point F à l'extérieur des deux cercles hyperosculateurs, la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ possède exactement deux points doubles situés sur l'un des axes de coordonnées (Cor. 3.1.21). Si F est à l'intérieur de l'hyperbole, les points doubles sont sur l'axe des ordonnées, sinon, ils se trouvent sur l'axe des abscisses. Nous notons Q'_{B_i} et Q''_{B_i} les points de q tels que $B_i = \sigma_q(Q'_{B_i}) = \sigma_q(Q''_{B_i})$ soient les points doubles de $\mathcal{S}_{q,F}$, $i = 1, 2$.

Si F est à l'intérieur d'un cercle hyperosculateur, alors la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ possède un unique point double situé sur l'axe des ordonnées (Cor. 3.1.21).

Remarque 3.1.23. Le nombre d'intersections réelles (compté avec multiplicité) entre l'hyperbole et un cercle $\mathcal{C}$ qui lui est tangent est deux ou quatre et ne peut changer que dans le cas où le cercle devient bitangent à l'hyperbole. En effet, le nombre d'intersections réelles entre deux courbes lisses ne change qu'au moment d'une tangence. Comme $\mathcal{C}$ est tangent à l'hyperbole par construction, il faut un deuxième point de tangence entre $\mathcal{C}$ et q pour que le nombre d'intersections entre eux puisse changer.

Donc, lorsque le centre d'un cercle tangent à l'hyperbole est sur un arc de $\mathcal{S}_{q,F}$ compris entre deux points doubles, le cercle est soit entièrement à l'extérieur de l'hyperbole (dans le cas où F est à l'extérieur de l'hyperbole), soit contenu dans l'hyperbole (dans le cas où F est à l'intérieur de l'hyperbole).

3.1.6.1 À propos de la position relative des points remarquables de l'hyperbole

Nous avons vu précédemment qu'il existe trois types de points remarquables sur l'hyperbole :

Q_{C_1} et Q_{C_2} : les points de tangence entre les deux cercles osculateurs à q passant par F ,
 Q_{T_1} et Q_{T_2} : les points de tangence des deux droites tangentes à q passant par F ,
 Q'_{B_1}, Q''_{B_1} et Q'_{B_2}, Q''_{B_2} : les points de tangence des deux cercles bitangents à q passant par F .

Il est intéressant d'étudier la position relative de ces points sur l'hyperbole q . Notons tout d'abord que les points Q_{T_1} et Q_{T_2} n'existent que si le point F se trouve à l'extérieur de l'hyperbole. De plus, nous avons vu dans la Section 3.1.5, qu'il existe deux familles disjointes de cercles bitangents. Si le point F se trouve à l'extérieur de l'hyperbole, alors les deux cercles bitangents à q passant par F seront aussi à l'extérieur de l'hyperbole. Ainsi, quitte à les renommer, les points de tangence Q'_{B_1} et Q'_{B_2} sont sur la branche q^+ tandis que les points Q''_{B_1} et Q''_{B_2} sont sur la branche q^- . Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 3.1.24. *Supposons que le point F soit à l'extérieur de l'hyperbole et contenu dans le demi-plan délimité par l'asymptote l_2 qui contient la branche q^+ de l'hyperbole.*

Choisissons un sens de parcours de la branche q^+ et nommons Q_{T_1} , Q_{C_1} et Q'_{B_1} les premiers points remarquables correspondants que nous rencontrons. Alors le point Q_{T_1} appartient à l'arc d'hyperbole borné d'extrémités Q_{C_1} et Q'_{B_1} .

Notons que, par symétrie, ce lemme reste vrai si le point F est contenu dans le demi-plan délimité par l'asymptote l_1 qui contient la branche q^- et/ou si l'on parcourt la branche q^- de l'hyperbole.

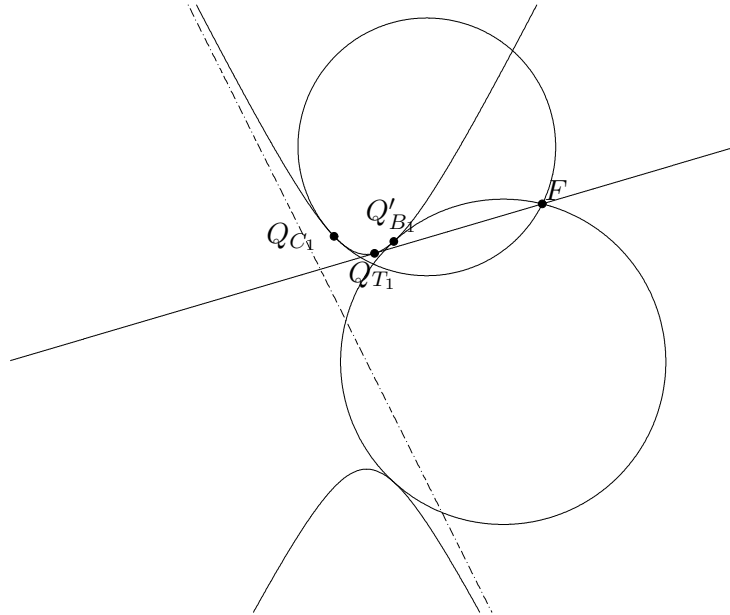


FIGURE 3.8 – Les points remarquables Q_{C_1} , Q_{T_1} et Q'_{B_1} et leurs cercles et droite respectifs

PREUVE. Commençons par quelques remarques.

- (a) Soit un point Q sur q^+ . La tangente en ce point sépare le plan en deux demi-plans, l'un contenant la branche q^+ et l'autre contenant l'autre branche. Le cercle passant par F et tangent à q^+ en Q appartient au demi-plan qui contient le point F .
- (b) Comme la branche q^+ est une courbe convexe, le cercle osculateur au point $Q_{C_1} \in q^+$ se trouve dans le demi-plan délimité par la tangente à q en Q_{C_1} qui contient la branche q^+ , donc le point F appartient à ce même demi-plan.
- (c) Observons la tangente à q^+ en Q'_{B_1} ; comme le cercle bitangent est à l'extérieur de l'hyperbole, il appartient alors au demi-plan délimité par la tangente à q^+ en Q'_B qui ne contient pas la branche q^+ , et donc le point F appartient à ce même demi-plan.

Parcourons maintenant la branche q^+ de l'hyperbole en partant du point de tangence avec l'asymptote l_2 (point à l'infini). Pour tout point Q situé entre ce point à l'infini et le point Q_{T_1} , le point F appartient au demi-plan défini par la tangente en Q qui contient la branche q^+ ; donc le point Q_{C_1} appartient à cet arc de branche par la Remarque (b). Pour les points Q situés après le point Q_{T_1} , le point F appartient au demi-plan défini par la tangente en Q qui ne contient pas la branche q^+ . Ceci reste vrai jusqu'à ce que la tangente à q passe à nouveau par le point F . Par la Remarque (c), les points Q'_{B_1} et Q'_{B_2} se trouvent sur cet arc. $\square$

3.2 Allure de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$

Décrivons maintenant l'allure de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ pour différentes positions du point F . Choisissons pour cela une paramétrisation de l'hyperbole $\tilde{q}: \mathbb{R}^* \rightarrow q$ telle que

- $q^- = \tilde{q}(\mathbb{R}_{<0})$,
- $q^+ = \tilde{q}(\mathbb{R}_{>0})$,
- la distance du point $\tilde{q}(t)$ à l'asymptote $l_2 = \{-\alpha x = 0\}$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0 (et donc, la distance à $l_1 = \{\alpha x = 0\}$ tend vers 0 lorsque t tend vers $\pm\infty$).

Par abus de notation, nous noterons σ aussi bien la paramétrisation de $\mathcal{S}_{q,F}$ que la fonction σ_q .

3.2.1 Cas où l'hyperbole est dégénérée en deux droites

Dans le cas où l'hyperbole est dégénérée en deux droites l_1 et l_2 , la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ est l'union des lieux des centres des cercles passant par F et tangents à une des droites et du lieu des centres des cercles passant par le centre O et le point F . Autrement dit,

$$\mathcal{S}_{q,F} = \mathcal{P}_{l_1,F} \cup \mathcal{P}_{l_2,F} \cup a_O$$

où a_O est la médiatrice du segment $\overline{OF}$ et $\mathcal{P}_{l_i,F}$ sont les paraboles de foyer F et de directrice les droites l_i , pour $i = 1, 2$.

Remarquons que chacune des paraboles est tangente à la médiatrice a_O . Ces points de tangence correspondent aux cercles passant par F et par l'intersection entre l_1 et l_2 qui sont aussi tangents à l'une des droites.

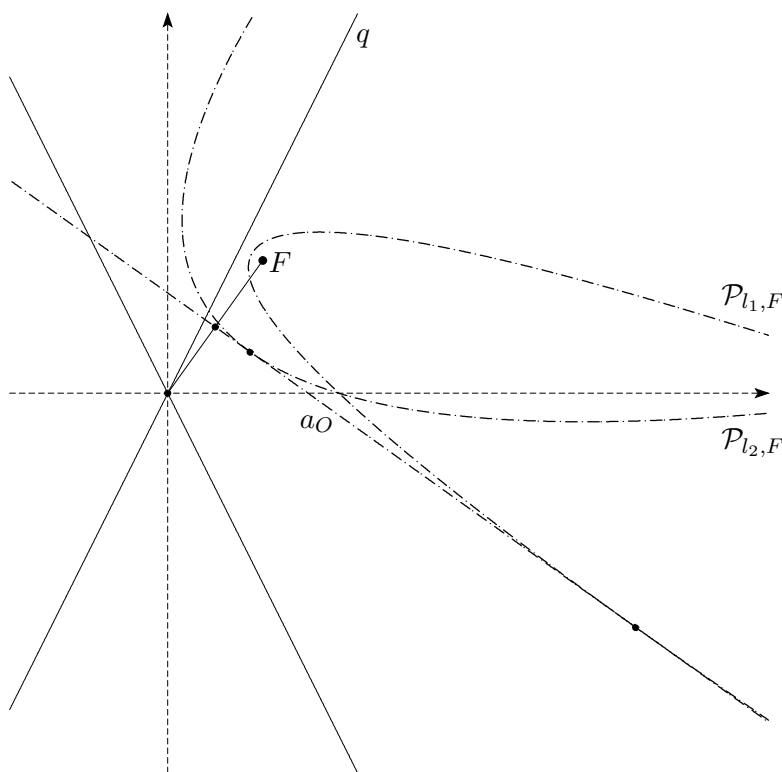


FIGURE 3.9 – La courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ lorsque q est dégénérée en deux droites

3.2.2 Cas où le point F est à l'intérieur de l'hyperbole

3.2.2.1 Cas où le point est à l'intérieur d'un cercle hyperosculateur

Lorsque le point F est à l'intérieur de l'hyperbole, il n'existe pas de droites passant par F tangentes à q , donc la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ possède seulement deux asymptotes, les paraboles $\mathcal{P}_{l_1,F}$ et $\mathcal{P}_{l_2,F}$. De plus, comme le point F est à l'intérieur d'un cercle hyperosculateur, l'hyperbole possède un unique cercle bitangent passant par F mais aucun cercle osculateur passant par F (Cor. 3.1.8 et Prop. 3.1.19).

Supposons que F soit d'ordonnée positive. Alors, les points Q'_B et Q''_B appartiennent à q^+ et le point $B = \sigma_q(Q'_B) = \sigma_q(Q''_B)$ est d'ordonnée positive.

Considérons alors quatre intervalles de $\mathbb{R}$, à savoir $\mathbb{R}_{<0}$, $(0, t_{Q'_B}]$, $[t_{Q'_B}, t_{Q''_B}]$ et $[t_{Q''_B}, +\infty)$, et étudions l'allure des images par σ de chacun de ces intervalles (voir aussi la Figure 3.10).

$\boxed{\mathbb{R}_{<0}}$ Lorsque t tend vers $-\infty$, la distance entre le point $\tilde{q}(t)$ et la droite l_1 tend vers 0, donc la distance entre $\sigma(t)$ et la parabole $\mathcal{P}_{l_1,F}$ tend vers 0. De même, lorsque t tend vers 0^- , la distance entre le point $\tilde{q}(t)$ et la droite l_2 tend vers 0, donc la distance entre $\sigma(t)$ et la parabole $\mathcal{P}_{l_2,F}$ tend vers 0. Comme il n'y a pas d'autres points remarquables sur la branche q^- , l'arc $\sigma(\mathbb{R}_{<0})$ relie de manière lisse l'asymptote $\mathcal{P}_{l_1,F}$ à l'asymptote $\mathcal{P}_{l_2,F}$.

$\boxed{(0, t_{Q'_B}]}$ Lorsque t tend vers 0^+ , la distance entre le point $\tilde{q}(t)$ et la droite l_2 tend vers 0, donc la distance entre $\sigma(t)$ et la parabole $\mathcal{P}_{l_2,F}$ tend vers 0. Ainsi, l'arc $\sigma((0, t_{Q'_B}])$ relie de manière lisse l'asymptote $\mathcal{P}_{l_2,F}$ au point double B .

$\boxed{[t_{Q'_B}, t_{Q''_B}]}$ L'arc décrit par $\sigma([t_{Q'_B}, t_{Q''_B}])$ est une boucle fermée lisse partant du point double B entourant le point F et ne traversant pas l'hyperbole q . En effet, par la Remarque 3.1.23, les cercles tangents à l'hyperbole entre les points Q'_B et Q''_B sont contenus dans l'hyperbole, donc leur centre aussi.

$\boxed{[t_{Q''_B}, +\infty)}$ Lorsque t tend vers $+\infty$, la distance entre le point $\tilde{q}(t)$ et la droite l_1 tend vers 0, donc la distance entre $\sigma(t)$ et la parabole $\mathcal{P}_{l_1,F}$ tend vers 0. Ainsi, l'arc $\sigma([t_{Q''_B}, +\infty))$ relie de manière lisse le point double B à l'asymptote $\mathcal{P}_{l_1,F}$.

3.2.2.2 Cas où le point est à l'extérieur des cercles hyperosculateurs

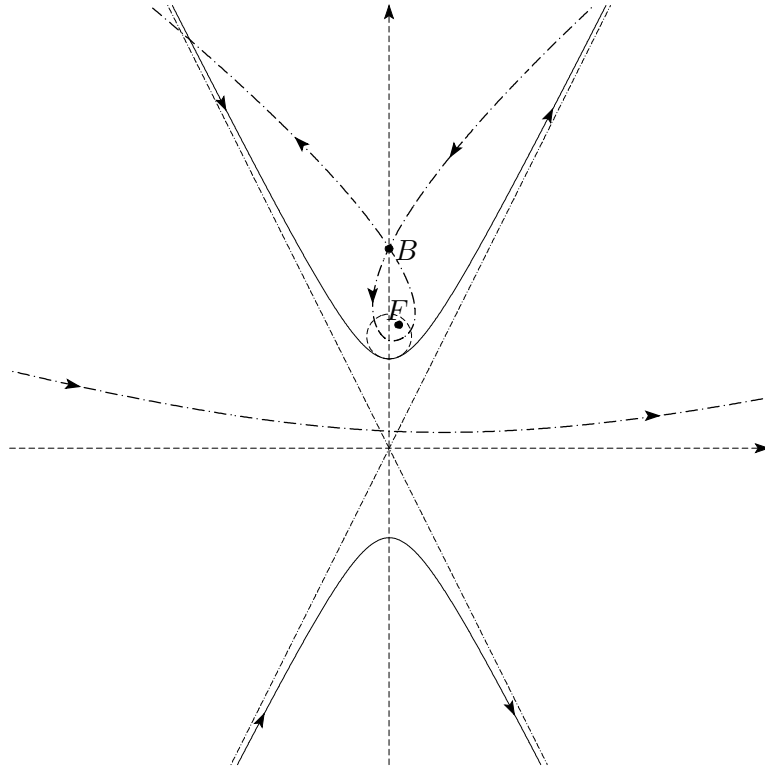
Comme le point F est à l'intérieur de l'hyperbole, il n'existe pas de droites passant par F tangentes à q , donc la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ possède seulement deux asymptotes, les paraboles $\mathcal{P}_{l_1,F}$ et $\mathcal{P}_{l_2,F}$. De plus, l'hyperbole possède deux cercles bitangents passant par F ainsi que deux cercles osculateurs passant par F (Cor. 3.1.8 et Prop. 3.1.19).

Supposons que F soit d'ordonnée positive. Alors, les points Q_{C_1} et Q_{C_2} appartiennent à q^+ et les points $C_1 = \sigma_q(Q_{C_1})$ et $C_2 = \sigma_q(Q_{C_2})$ sont d'ordonnée positive. De même, les points Q'_{B_1} , Q''_{B_1} , Q'_{B_2} et Q''_{B_2} appartiennent à q^+ et les points $B_1 = \sigma_q(Q'_{B_1}) = \sigma_q(Q''_{B_1})$ et $B_2 = \sigma_q(Q'_{B_2}) = \sigma_q(Q''_{B_2})$ sont d'ordonnée positive.

Finalement, nous avons les points remarquables suivants :

$$0 < t_{Q'_{B_1}} < t_{Q'_{B_2}} < t_{Q_{C_1}} < t_{Q_{C_2}} < t_{Q''_{B_2}} < t_{Q''_{B_1}}$$

Considérons alors six intervalles de $\mathbb{R}$, à savoir $\mathbb{R}_{<0}$, $(0, t_{Q'_{B_1}}]$, $[t_{Q'_{B_1}}, t_{Q'_{B_2}}]$, $[t_{Q'_{B_2}}, t_{Q_{C_1}}]$, $[t_{Q_{C_1}}, t_{Q_{C_2}}]$ et $[t_{Q_{C_2}}, +\infty)$, et étudions l'allure des images par σ de chacun de ces intervalles (voir aussi la Figure 3.11).

FIGURE 3.10 – La courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ lorsque F est à l'intérieur d'un cercle hyperosculateur

- $\mathbb{R}_{<0}$ Lorsque t tend vers $-\infty$, la distance entre le point $\tilde{q}(t)$ et la droite l_1 tend vers 0, donc la distance entre $\sigma(t)$ et la parabole $\mathcal{P}_{l_1,F}$ tend vers 0. De même, lorsque t tend vers 0^- , la distance entre le point $\tilde{q}(t)$ et la droite l_2 tend vers 0, donc la distance entre $\sigma(t)$ et la parabole $\mathcal{P}_{l_2,F}$ tend vers 0. Comme il n'y a pas d'autres points remarquables sur la branche q^- , l'arc $\sigma(\mathbb{R}_{<0})$ relie de manière lisse l'asymptote $\mathcal{P}_{l_1,F}$ à l'asymptote $\mathcal{P}_{l_2,F}$.
- $(0, t_{Q'_{B_1}}]$ Lorsque t tend vers 0^+ , la distance entre le point $\tilde{q}(t)$ et la droite l_2 tend vers 0, donc la distance entre $\sigma(t)$ et la parabole $\mathcal{P}_{l_2,F}$ tend vers 0. Ainsi, l'arc $\sigma((0, t_{Q'_{B_1}}])$ relie de manière lisse l'asymptote $\mathcal{P}_{l_2,F}$ au point double B_1 . De plus, les points de cet arc sont d'abscisse négative.
- $[t_{Q'_{B_1}}, t_{Q'_{B_2}}]$ L'arc $\sigma([t_{Q'_{B_1}}, t_{Q'_{B_2}}])$ relie les deux points doubles B_1 et B_2 de manière lisse et sans traverser l'hyperbole q . En effet, par la Remarque 3.1.23, les cercles tangents à l'hyperbole entre les points Q'_{B_1} et Q'_{B_2} sont contenus dans l'hyperbole et donc leur centre aussi.
- $[t_{Q'_{B_2}}, t_{Q''_{B_2}}]$ L'arc $\sigma([t_{Q'_{B_2}}, t_{Q''_{B_2}}])$ est une boucle fermée partant du point B_2 munie de deux cusps $C_1 = \sigma(Q_{C_1})$ et $C_2 = \sigma(Q_{C_2})$. Ces deux cusps ne sont pas nécessairement situés à l'intérieur de l'hyperbole.
- $[t_{Q''_{B_2}}, t_{Q''_{B_1}}]$ L'arc $\sigma([t_{Q''_{B_2}}, t_{Q''_{B_1}}])$ relie les deux points doubles B_2 et B_1 de manière lisse et sans traverser l'hyperbole q . De plus, les points de cet arc sont d'abscisse positive.
- $[t_{Q''_{B_1}}, +\infty)$ Lorsque t tend vers $+\infty$, la distance entre le point $\tilde{q}(t)$ et la droite l_1 tend vers 0, donc la distance entre $\sigma(t)$ et la parabole $\mathcal{P}_{l_1,F}$ tend vers 0. Ainsi, l'arc

$\sigma([t_{Q''_{B_1}}, +\infty))$ relie de manière lisse le point double B_1 à l'asymptote $\mathcal{P}_{l_1, F}$.

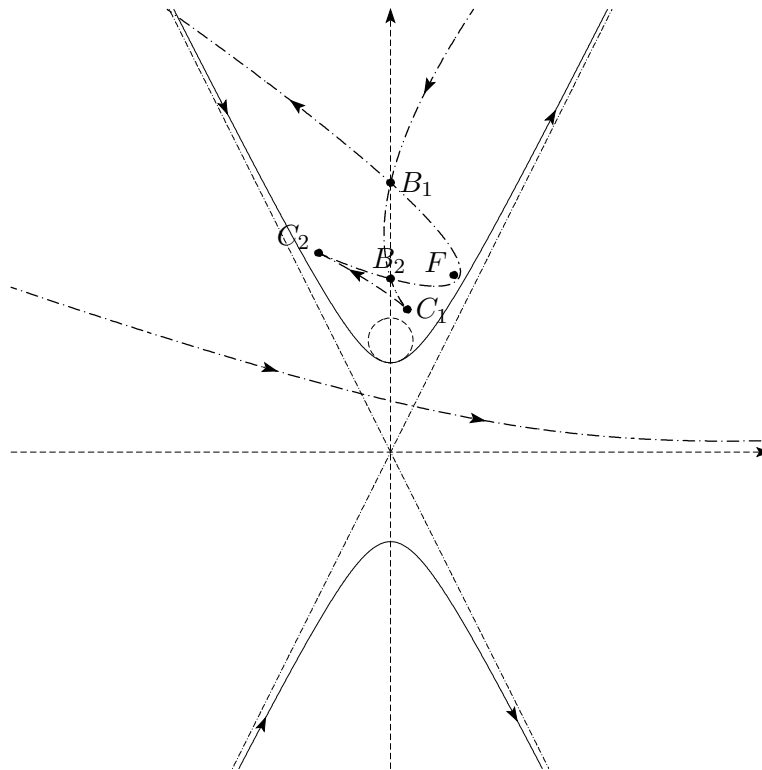


FIGURE 3.11 – La courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ lorsque F est à l'intérieur de q

3.2.3 Cas où le point F est à l'extérieur de l'hyperbole

3.2.3.1 Cas où le point est à l'extérieur des asymptotes

Comme le point F est à l'extérieur de l'hyperbole, il existe deux droites, notées a_{T_1} et a_{T_2} , passant par F et tangentes à q . De plus, comme F est à l'extérieur des asymptotes, a_{T_1} est tangente à la branche q^- tandis que a_{T_2} est tangente à la branche q^+ . Ainsi, la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ possède quatre asymptotes, les paraboles $\mathcal{P}_{l_1, F}$ et $\mathcal{P}_{l_2, F}$ et les droites a_{T_1} et a_{T_2} . De plus, l'hyperbole possède deux cercles bitangents passant par F ainsi que deux cercles osculateurs passant par F (Cor. 3.1.8 et Prop. 3.1.19). Notons Q_{T_1} et Q_{T_2} les points de tangence entre q et les droites a_{T_1} et a_{T_2} respectivement.

Supposons que F soit d'abscisse positive, il appartient donc à l'intersection entre le demi-plan défini par l'asymptote l_2 qui contient la branche q^+ et le demi-plan défini par l'asymptote l_1 qui contient la branche q^- . Alors, les points Q_{C_1} et Q_{C_2} appartiennent à q^- et q^+ respectivement et sont d'abscisse négative, tandis que les points $C_1 = \sigma(Q_{C_1})$ et $C_2 = \sigma(Q_{C_2})$ sont d'abscisse positive.

De même, les points Q'_{B_1} et Q'_{B_2} appartiennent à q^- tandis que les points Q''_{B_1} et Q''_{B_2} appartiennent à q^+ . De plus, les points $B_1 = \sigma(Q'_{B_1}) = \sigma(Q''_{B_1})$ et $B_2 = \sigma(Q'_{B_2}) = \sigma(Q''_{B_2})$ sont sur l'axe des abscisses.

Finalement, par le Lemme 3.1.24, nous avons les points remarquables dans l'ordre suivant :

$$t_{Q_{C_1}} < t_{Q_{T_1}} < t_{Q'_{B_1}} < t_{Q'_{B_2}} < 0 < t_{Q_{C_2}} < t_{Q_{T_2}} < t_{Q''_{B_1}} < t_{Q''_{B_2}}$$

Considérons alors huit intervalles de $\mathbb{R}$, à savoir $(-\infty, t_{Q_{T_1}})$, $(t_{Q_{T_1}}, t_{Q'_{B_1}}]$, $[t_{Q'_{B_1}}, t_{Q'_{B_2}}]$, $[t_{Q'_{B_2}}, 0)$, $(0, t_{Q_{T_2}})$, $(t_{Q_{T_2}}, t_{Q''_{B_1}}]$, $[t_{Q''_{B_1}}, t_{Q''_{B_2}}]$ et $[t_{Q''_{B_2}}, +\infty)$, et étudions l'allure des images par σ de chacun de ces intervalles (voir aussi la Figure 3.12).

$(-\infty, t_{Q_{T_1}})$ Lorsque t tend vers $-\infty$, la distance entre le point $\tilde{q}(t)$ et la droite l_1 tend vers 0, donc la distance entre $\sigma(t)$ et la parabole $\mathcal{P}_{l_1,F}$ tend vers 0. Lorsque t tend vers $t_{Q_{T_1}}^-$, le cercle de centre $\sigma(t)$ tend vers la droite tangente d_{T_1} , donc la distance entre le point $\sigma(t)$ et l'asymptote a_{T_1} tend vers 0. De plus, comme le point F appartient au demi-plan défini par l'asymptote l_1 qui contient la branche q^- de l'hyperbole, pour $t \in (-\infty, t_{Q_{T_1}})$, le point $\sigma(t)$ appartient au demi-plan défini par la tangente à q en $\tilde{q}(t)$ qui contient q^- ; donc le cercle de centre $\sigma(t)$ appartient aussi à ce même demi-plan.

Comme l'arc $\sigma((-\infty, t_{Q_{T_1}}])$ est le profil $[C_1, \mathcal{S}_{q,F}]$, séparons cet arc en deux parties, la première, $\sigma((-\infty, t_{Q_{C_1}}])$, va de manière lisse de l'asymptote $\mathcal{P}_{l_1,F}$ au cusp C_1 , tandis que la deuxième, $\sigma((t_{Q_{C_1}}, t_{Q_{T_1}}])$ va de manière lisse du cusp C_1 à l'asymptote a_{T_1} . De plus, ce profil est contenu dans l'union des demi-plans définis par les tangentes à q en $\tilde{q}(t)$ qui contiennent la branche q^- de l'hyperbole. En particulier, les ordonnées des points sur cet arc sont négatives.

$(t_{Q_{T_1}}, t_{Q'_{B_1}}]$ Lorsque t tend vers $t_{Q_{T_1}}^+$, le cercle de centre $\sigma(t)$ tend vers la droite tangente d_{T_1} , donc la distance entre le point $\sigma(t)$ et l'asymptote a_{T_1} tend vers 0. De plus, pour $t \in (t_{Q_{T_1}}, t_{Q'_{B_1}}]$, le point F n'appartient pas au demi-plan défini par la tangente à q en $\tilde{q}(t)$ qui contient q^- ; donc le cercle de centre $\sigma(t)$ n'appartient pas non plus à ce demi-plan. Ainsi, l'arc $\sigma((t_{Q_{T_1}}, t_{Q'_{B_1}}])$ relie de manière lisse l'asymptote a_{T_1} au point double B_1 . De plus, cet arc est contenu dans l'union des demi-plans définis par les tangentes à q en $\tilde{q}(t)$ qui ne contiennent pas la branche q^- de l'hyperbole. En particulier, les ordonnées des points sur cet arc sont positives.

$[t_{Q'_{B_1}}, t_{Q'_{B_2}}]$ L'arc $\sigma([t_{Q'_{B_1}}, t_{Q'_{B_2}}])$ relie les deux points doubles B_1 et B_2 de manière lisse et sans traverser l'hyperbole q . En effet, par la Remarque 3.1.23, les cercles tangents à l'hyperbole entre les points Q'_{B_1} et Q'_{B_2} sont à l'extérieur de l'hyperbole et donc leur centre aussi. De plus, les ordonnées des points sur cet arc sont négatives.

$[t_{Q'_{B_2}}, 0)$ Lorsque t tend vers 0^- , la distance entre le point $\tilde{q}(t)$ et la droite l_2 tend vers 0, donc la distance entre $\sigma(t)$ et la parabole $\mathcal{P}_{l_2,F}$ tend vers 0. Ainsi, l'arc $\sigma([t_{Q'_{B_2}}, 0))$ relie de manière lisse le point double B_2 à l'asymptote $\mathcal{P}_{l_2,F}$. De plus, cet arc est contenu dans l'union des demi-plans définis par les tangentes à q en $\tilde{q}(t)$ qui ne contiennent pas la branche q^- de l'hyperbole. En particulier, les ordonnées des points sur cet arc sont positives.

$(0, t_{Q_{T_2}})$ Lorsque t tend vers 0^+ , la distance entre le point $\tilde{q}(t)$ et la droite l_2 tend vers 0, donc la distance entre $\sigma(t)$ et la parabole $\mathcal{P}_{l_2,F}$ tend vers 0. Lorsque t tend vers $t_{Q_{T_2}}^-$, le cercle de centre $\sigma(t)$ tend vers la droite tangente d_{T_2} , donc la distance entre le point $\sigma(t)$ et l'asymptote a_{T_2} tend vers 0. De plus, comme le point F appartient au demi-plan défini par l'asymptote l_2 qui contient la branche q^+ de l'hyperbole, pour $t \in (0, t_{Q_{T_2}})$, le point $\sigma(t)$ appartient au demi-plan défini par la tangente à q en $\tilde{q}(t)$ qui contient q^+ ; donc le cercle de centre $\sigma(t)$ appartient aussi à ce même demi-plan.

Comme l'arc $\sigma\left((-\infty, t_{Q_{T_2}}]\right)$ est le profil $[C_2, \mathcal{S}_{q,F}]$, séparons cet arc en deux parties, la première, $\sigma\left((-\infty, t_{Q_{C_2}}]\right)$, va de manière lisse de l'asymptote $\mathcal{P}_{l_2,F}$ au cusp C_2 , tandis que la deuxième, $\sigma\left((t_{Q_{C_2}}, t_{Q_{T_2}}]\right)$ va de manière lisse du cusp C_2 à l'asymptote a_{T_2} . De plus, ce profil est contenu dans l'union des demi-plans définis par les tangentes à q en $\tilde{q}(t)$ qui contiennent la branche q^+ de l'hyperbole. En particulier, les ordonnées des points sur cet arc sont positives.

$(t_{Q_{T_2}}, t_{Q''_{B_1}}]$ Lorsque t tend vers $t_{Q_{T_2}}^+$, le cercle de centre $\sigma(t)$ tend vers la droite tangente d_{T_2} , donc la distance entre le point $\sigma(t)$ et l'asymptote a_{T_2} tend vers 0. De plus, pour $t \in (t_{Q_{T_2}}, t_{Q''_{B_1}}]$, le point F n'appartient pas au demi-plan défini par la tangente à q en $\tilde{q}(t)$ qui contient q^+ ; donc le cercle de centre $\sigma(t)$ n'appartient pas non-plus à ce demi-plan. Ainsi, l'arc $\sigma\left((t_{Q_{T_2}}, t_{Q''_{B_1}}]\right)$ relie de manière lisse l'asymptote a_{T_2} au point double B_1 . De plus, cet arc est contenu dans l'union des demi-plans définis par les tangentes à q en $\tilde{q}(t)$ qui ne contiennent pas la branche q^+ de l'hyperbole. En particulier, les ordonnées des points sur cet arc sont négatives.

$[t_{Q''_{B_1}}, t_{Q''_{B_2}}]$ L'arc $\sigma\left([t_{Q''_{B_1}}, t_{Q''_{B_2}}]\right)$ relie les deux points doubles B_1 et B_2 de manière lisse et sans traverser l'hyperbole q . De plus, les ordonnées des points sur cet arc sont positives.

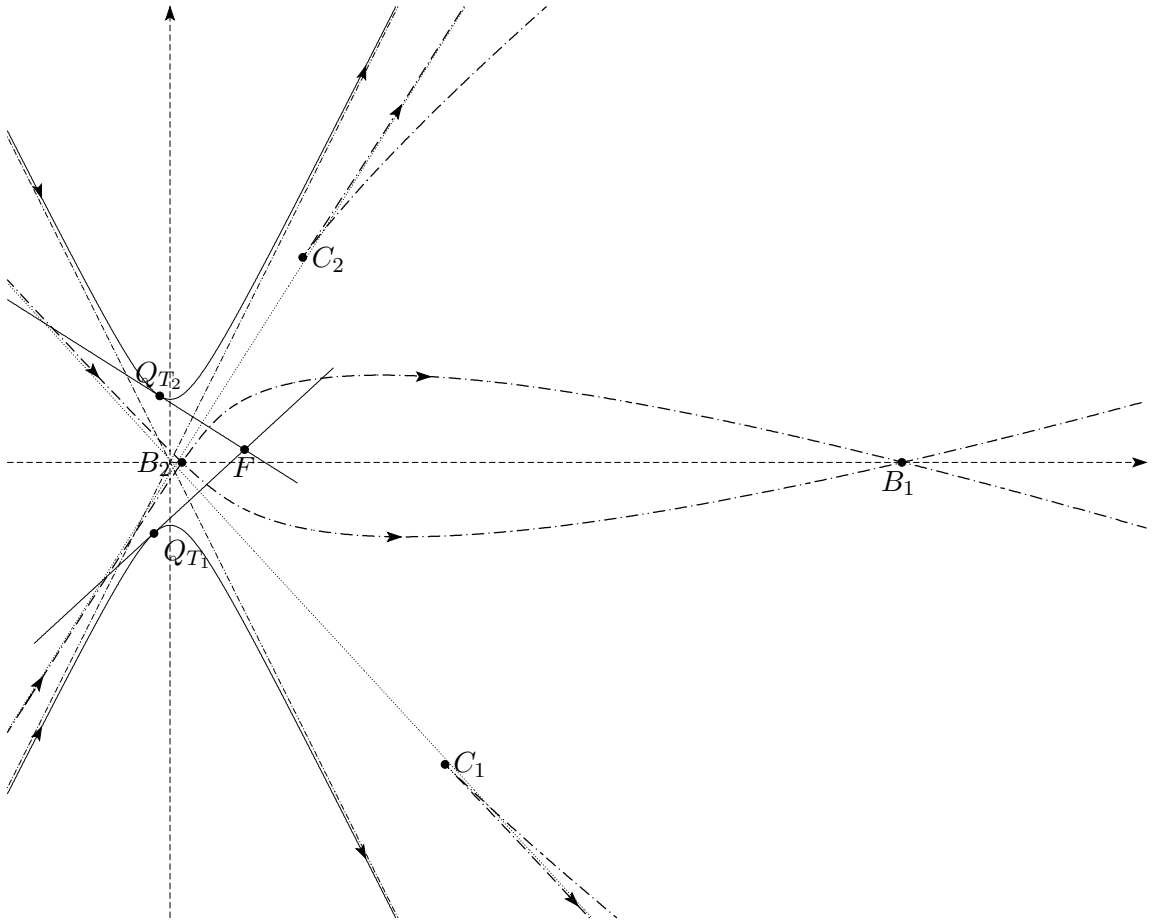
$[t_{Q''_{B_2}}, +\infty)$ Lorsque t tend vers $+\infty$, la distance entre le point $\tilde{q}(t)$ et la droite l_1 tend vers 0, donc la distance entre $\sigma(t)$ et la parabole $\mathcal{P}_{l_1,F}$ tend vers 0. Ainsi, l'arc $\sigma\left([t_{Q''_{B_2}}, +\infty)\right)$ relie de manière lisse le point double B_2 à l'asymptote $\mathcal{P}_{l_1,F}$. De plus, cet arc est contenu dans l'union des demi-plans définis par les tangentes à q en $\tilde{q}(t)$ qui ne contiennent pas la branche q^+ de l'hyperbole. En particulier, les ordonnées des points sur cet arc sont négatives.

Remarque 3.2.1. Lorsque le point F appartient à l'une des asymptotes de q , disons l'asymptote l_1 , un des deux cercles osculateurs à q passant par F est l'asymptote l_1 elle-même; donc l'un des cusps de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ est à l'infini. Autrement dit, lorsque le point F appartient à l'une des asymptotes de q , la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ ne possède qu'un seul profil de cusp.

3.2.3.2 Cas où le point est à l'intérieur des asymptotes

Comme le point F est à l'extérieur de l'hyperbole, il existe deux droites passant par F tangentes à q . De plus, comme F est à l'intérieur des asymptotes, ces deux droites sont tangentes à la même branche de q . Ainsi, la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ possède quatre asymptotes, les paraboles $\mathcal{P}_{l_1,F}$ et $\mathcal{P}_{l_2,F}$ et les droites a_{T_1} et a_{T_2} . De plus, l'hyperbole possède deux cercles bitangents passant par F ainsi que deux cercles osculateurs passant par F (Cor. 3.1.8 et Prop. 3.1.19). Notons Q_{T_1} et Q_{T_2} les points de tangence entre q et les droites a_{T_1} et a_{T_2} respectivement.

Supposons que F soit d'ordonnée positive, il appartient donc à l'intersection entre les demi-plans définis par les asymptotes l_1 et l_2 qui contiennent la branche q^+ de l'hyperbole. Alors, les points Q_{C_1} et Q_{C_2} appartiennent à q^+ , et les points $C_1 = \sigma_q(Q_{C_1})$ et $C_2 = \sigma_q(Q_{C_2})$ sont d'ordonnée positive. Cependant, comme F est à l'extérieur de l'hyperbole, les points Q'_{B_1} et Q'_{B_2} appartiennent à q^- tandis que les points Q''_{B_1} et Q''_{B_2} appartiennent à q^+ . De plus, les points $B_1 = \sigma_q(Q'_{B_1}) = \sigma_q(Q''_{B_1})$ et $B_2 = \sigma_q(Q'_{B_2}) = \sigma_q(Q''_{B_2})$ sont sur l'axe des abscisses.

FIGURE 3.12 – La courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ lorsque F est à l'extérieur des asymptotes

Finalement, par le Lemme 3.1.24, nous avons les points remarquables dans l'ordre suivant :

$$t_{Q'_{B_1}} < t_{Q'_{B_2}} < 0 < t_{Q_{C_1}} < t_{Q_{T_1}} < t_{Q''_{B_2}} < t_{Q''_{B_1}} < t_{Q_{T_2}} < t_{Q_{C_2}}$$

Considérons alors huit intervalles de $\mathbb{R}$, à savoir $(-\infty, t_{Q'_{B_1}}]$, $[t_{Q'_{B_1}}, t_{Q'_{B_2}}]$, $[t_{Q'_{B_2}}, 0)$, $(0, t_{Q_{T_1}})$, $(t_{Q_{T_1}}, t_{Q''_{B_2}}]$, $[t_{Q''_{B_2}}, t_{Q''_{B_1}}]$, $[t_{Q''_{B_1}}, t_{Q_{T_2}})$ et $(t_{Q_{T_2}}, +\infty)$, et étudions l'allure des images par σ de chacun de ces intervalles (voir aussi la Figure 3.13).

$(-\infty, t_{Q'_{B_1}}]$ Lorsque t tend vers $-\infty$, la distance entre le point $\tilde{q}(t)$ et la droite l_1 tend vers 0, donc la distance entre $\sigma(t)$ et la parabole $\mathcal{P}_{l_1,F}$ tend vers 0. De plus, comme le point F n'appartient pas au demi-plan défini par l'asymptote l_2 qui contient la branche q^- de l'hyperbole, pour $t \in -\infty, t_{Q'_{B_1}}]$, le point $\sigma(t)$ appartient au demi-plan défini par la tangente à q en $\tilde{q}(t)$ qui ne contient pas q^- ; donc le cercle de centre $\sigma(t)$ appartient aussi à ce même demi-plan. Ainsi, l'arc $\sigma((-\infty, t_{Q'_{B_1}}])$ relie de manière lisse l'asymptote $\mathcal{P}_{l_1,F}$ au point double B_1 . De plus, cet arc est contenu dans l'union des demi-plans définis par les tangentes à q en $\tilde{q}(t)$ qui ne contiennent pas la branche q^- de l'hyperbole. En particulier, les ordonnées des points sur cet arc sont positives.

$[t_{Q'_{B_1}}, t_{Q'_{B_2}}]$ L'arc $\sigma([t_{Q'_{B_1}}, t_{Q'_{B_2}}])$ relie les deux points doubles B_1 et B_2 de manière lisse et sans traverser l'hyperbole q . En effet, par la Remarque 3.1.23, les cercles tangents

à l'hyperbole entre les points Q'_{B_1} et Q'_{B_2} sont à l'extérieur de l'hyperbole et donc leur centre aussi. De plus, les ordonnées des points sur cet arc sont négatives.

$[t_{Q'_{B_2}}, 0)$ Lorsque t tend vers 0^- , la distance entre le point $\tilde{q}(t)$ et la droite l_2 tend vers 0, donc la distance entre $\sigma(t)$ et la parabole $\mathcal{P}_{l_2, F}$ tend vers 0. Ainsi, l'arc $\sigma([t_{Q'_{B_2}}, 0))$ relie de manière lisse le point double B_2 à l'asymptote $\mathcal{P}_{l_2, F}$. De plus, cet arc est contenu dans l'union des demi-plans définis par les tangentes à q en $\tilde{q}(t)$ qui ne contiennent pas la branche q^- de l'hyperbole, par les mêmes arguments que précédemment. En particulier, les ordonnées des points sur cet arc sont positives.

$(0, t_{Q_{T_1}})$ Lorsque t tend vers 0^+ , la distance entre le point $\tilde{q}(t)$ et la droite l_2 tend vers 0, donc la distance entre $\sigma(t)$ et la parabole $\mathcal{P}_{l_2, F}$ tend vers 0. Lorsque t tend vers $t_{Q_{T_1}}^-$, le cercle de centre $\sigma(t)$ tend vers la droite tangente d_{T_1} , donc la distance entre le point $\sigma(t)$ et l'asymptote a_{T_1} tend vers 0. De plus, comme le point F appartient au demi-plan défini par l'asymptote l_2 qui contient la branche q^+ de l'hyperbole, pour $t \in (0, t_{Q_{T_1}})$, le point $\sigma(t)$ appartient au demi-plan défini par la tangente à q en $\tilde{q}(t)$ qui contient q^+ ; donc le cercle de centre $\sigma(t)$ appartient aussi à ce même demi-plan.

Comme l'arc $\sigma((0, t_{Q_{T_1}}))$ est le profil du cusp $[C_1, \mathcal{S}_{q, F}]$, séparons cet arc en deux parties, la première, $\sigma((0, t_{Q_{C_1}}])$, va de manière lisse de l'asymptote $\mathcal{P}_{l_2, F}$ au cusp C_1 , tandis que la deuxième, $\sigma([t_{Q_{C_1}}, t_{Q_{T_1}}))$ va de manière lisse du cusp C_1 à l'asymptote a_{T_1} . De plus, ce profil est contenu dans l'union des demi-plans définis par les tangentes à q en $\tilde{q}(t)$ qui contiennent la branche q^+ de l'hyperbole. En particulier, les ordonnées des points sur cet arc sont positives.

$(t_{Q_{T_1}}, t_{Q''_{B_2}}]$ Lorsque t tend vers $t_{Q_{T_1}}^+$, le cercle de centre $\sigma(t)$ tend vers la droite tangente d_{T_1} , donc la distance entre le point $\sigma(t)$ et l'asymptote a_{T_1} tend vers 0. De plus, pour $t \in (t_{Q_{T_1}}, t_{Q''_{B_2}}]$, le point F n'appartient pas au demi-plan défini par la tangente à q en $\tilde{q}(t)$ qui contient q^+ ; donc le cercle de centre $\sigma(t)$ n'appartient pas non-plus à ce demi-plan. Ainsi, l'arc $\sigma((t_{Q_{T_1}}, t_{Q''_{B_2}}])$ relie de manière lisse l'asymptote a_{T_1} au point double B_2 . De plus, cet arc est contenu dans l'union des demi-plans définis par les tangentes à q en $\tilde{q}(t)$ qui ne contiennent pas la branche q^+ de l'hyperbole. En particulier, les ordonnées des points sur cet arc sont négatives.

$[t_{Q''_{B_2}}, t_{Q''_{B_1}}]$ L'arc $\sigma([t_{Q''_{B_2}}, t_{Q''_{B_1}}])$ relie les deux points doubles B_2 et B_1 de manière lisse et sans traverser l'hyperbole q . De plus, les ordonnées des points sur cet arc sont positives et la partie du plan définie par cet arc et l'axe des abscisses contient le point F .

$[t_{Q''_{B_1}}, t_{Q_{T_2}})$ Lorsque t tend vers $t_{Q_{T_2}}^-$, le cercle de centre $\sigma(t)$ tend vers la droite tangente d_{T_2} , donc la distance entre le point $\sigma(t)$ et l'asymptote a_{T_2} tend vers 0. Ainsi, l'arc $\sigma([t_{Q''_{B_1}}, t_{Q_{T_2}}))$ relie de manière lisse le point double B_1 à l'asymptote a_{T_2} . De plus, cet arc est contenu dans l'union des demi-plans définis par les tangentes à q en $\tilde{q}(t)$ qui ne contiennent pas la branche q^+ de l'hyperbole, par les mêmes arguments que précédemment. En particulier, les ordonnées des points sur cet arc sont négatives.

$(t_{Q_{T_2}}, +\infty)$ Lorsque t tend vers $+\infty$, la distance entre le point $\tilde{q}(t)$ et la droite l_1 tend

vers 0, donc la distance entre $\sigma(t)$ et la parabole $\mathcal{P}_{l_1,F}$ tend vers 0. Lorsque t tend vers $t_{Q_{T_2}}^+$, le cercle de centre $\sigma(t)$ tend vers la droite tangente d_{T_2} , donc la distance entre le point $\sigma(t)$ et l'asymptote a_{T_2} tend vers 0. De plus, comme le point F appartient au demi-plan défini par l'asymptote l_1 qui contient la branche q^+ de l'hyperbole, pour $t \in (t_{Q_{T_2}}, +\infty)$, le point $\sigma(t)$ appartient au demi-plan défini par la tangente à q en $\tilde{q}(t)$ qui contient q^+ ; donc le cercle de centre $\sigma(t)$ appartient aussi à ce même demi-plan.

Comme l'arc $\sigma((t_{Q_{T_2}}, +\infty))$ est le profil du cusp $[C_2, \mathcal{S}_{q,F}]$, séparons cet arc en deux parties, la première, $\sigma((t_{Q_{T_2}}, t_{Q_{C_2}}])$, va de manière lisse de l'asymptote a_{T_2} au cusp C_2 , tandis que la deuxième, $\sigma((t_{Q_{C_2}}, +\infty))$ va de manière lisse du cusp C_2 à l'asymptote $\mathcal{P}_{l_1,F}$. En particulier, les ordonnées des points sur cet arc sont positives.

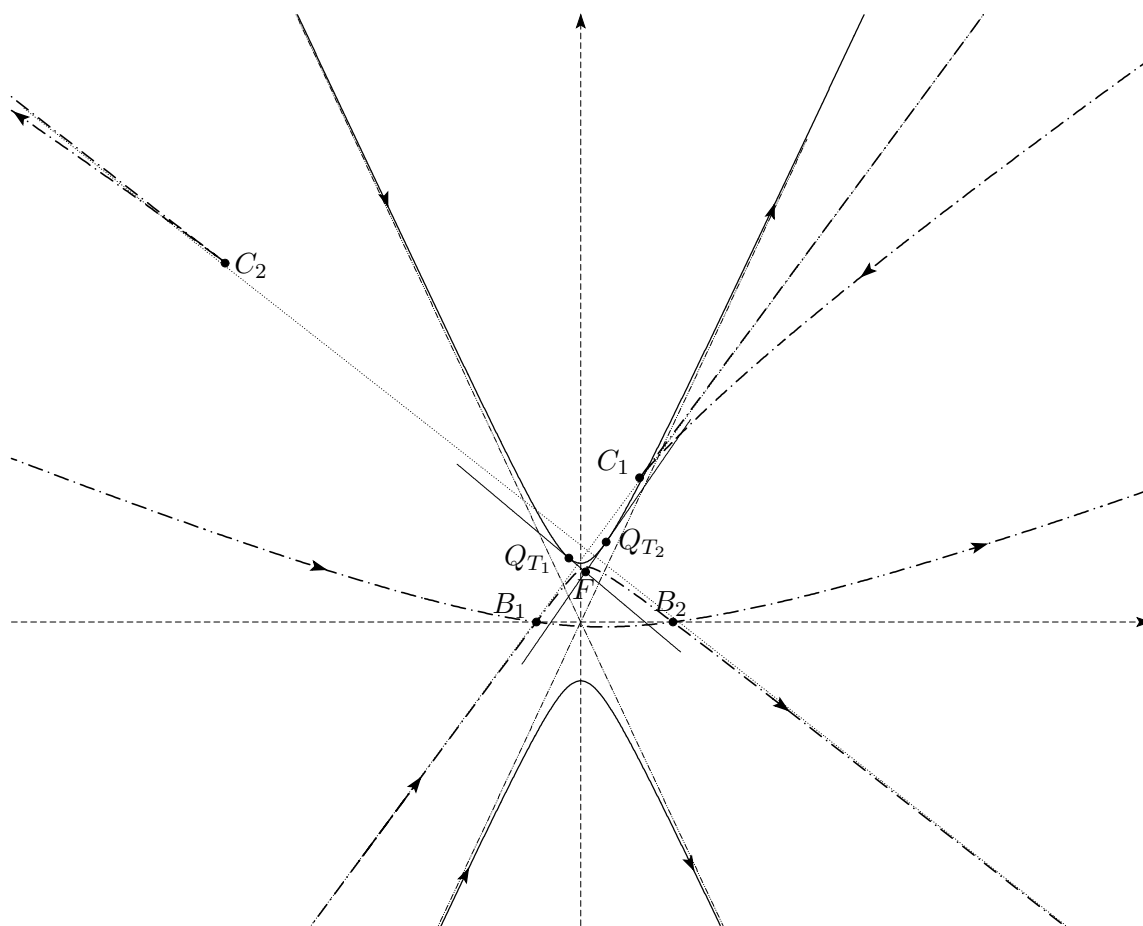


FIGURE 3.13 – La courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ lorsque le point F est à l'extérieur de q et à l'intérieur des asymptotes

Chapitre 4

Le nombre maximal de cercles

Dans ce chapitre nous allons montrer que le nombre maximal de cercles passant par un point F et tangents à une droite d et à une hyperbole q est 10. Pour ce faire, nous devons étudier l'intersection entre la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ et le lieu des centres des cercles passant par le point F et tangents à une droite d , à savoir la parabole $\mathcal{P}_{d,F}$ de directrice d et de foyer F . Or, étudier l'intersection entre une sextique et une parabole n'est pas une chose aisée. L'idée de la démonstration est de transformer la parabole en une droite et d'étudier l'intersection de cette droite avec la transformée de $\mathcal{S}_{q,F}$.

Comme la preuve proposée dans ce chapitre n'est pas constructive, une construction explicite d'une configuration maximale sera donnée dans le Chapitre 5.

Théorème 4.0.2. *Le nombre maximal de cercles passant par un point F et tangents à une droite d et à une hyperbole q est 10.*

Remarque 4.0.3. La méthode décrite dans [RTV97] fournit un nombre maximal de seulement 8 cercles. Le Théorème 4.0.2 montre que, dans ce cas particulier, la méthode [RTV97] ne fournit pas le nombre maximal de cercles.

Avant de commencer la démonstration de ce théorème, il est important de remarquer que le nombre d'intersections complexes entre une sextique et une parabole est 12 (Thm. de Bézout). Le Théorème 4.0.2 montre donc que le nombre maximal de cercles réels est strictement inférieur au nombre de solutions complexes. En admettant qu'un point ou une droite sont des coniques dégénérées, nous avons ici une configuration de trois coniques, dont une non dégénérée, telle que le nombre maximal de solutions complexes est inférieur au nombre réel de solutions. Il s'agit là du choix le plus simple de telles configurations pour lequel le nombre maximal de solutions complexes n'est pas atteint.

4.1 La transformation

Pour démontrer le Théorème 4.0.2, il faut étudier l'intersection entre la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ étudiée au Chapitre 3 et une parabole $\mathcal{P}_{d,F}$ de directrice une droite d et de foyer F . L'étude de cette intersection peut se révéler très fastidieuse. L'idée est donc de transformer la parabole $\mathcal{P}_{d,F}$ en une droite et d'étudier l'intersection de cette droite avec la transformée de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$.

La transformation utilisée est l'application complexe bivaluée

$$\begin{aligned} \sqrt{\cdot} : \quad & \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z \longmapsto \sqrt{z} \\ & r(\cos \theta + i \sin \theta) \longmapsto \sqrt{r}(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}) \end{aligned}$$

En effet, cette fonction envoie les paraboles dont le foyer est à l'origine sur des droites

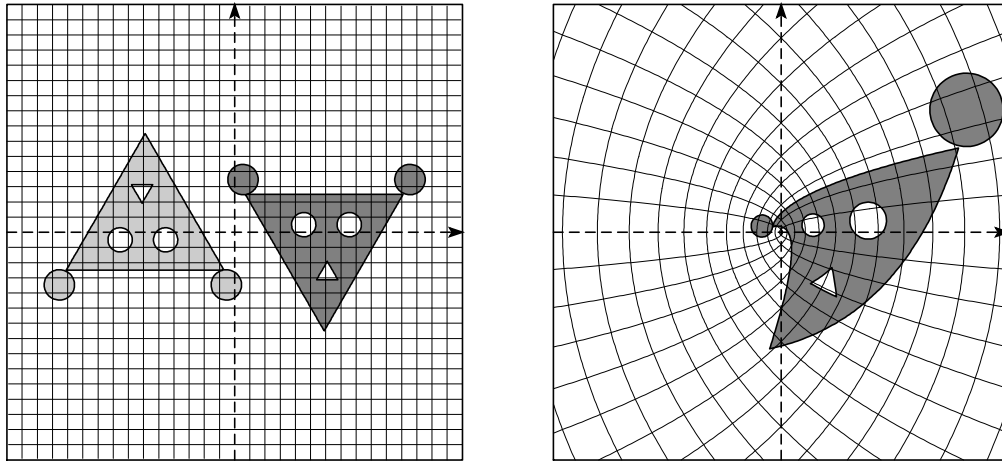


FIGURE 4.1 – Transformation d'une souris par l'application conforme $z \mapsto z^2$

(voir Fig. 4.1). Par rapport au système de coordonnées choisi dans le Chapitre 3, il faut d'abord effectuer une translation pour ramener le point F à l'origine pour ensuite appliquer la transformation $\sqrt{\cdot}$. On considère alors la transformation du plan qui fixe le point F , encore notée $\sqrt{\cdot}$, appliquée à la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ paramétrée par $\sigma(t)$ (voir (3.1)). L'image de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ est invariante par symétrie centrale et nous noterons $\sqrt{\sigma}(t)$ la paramétrisation bivaluée correspondante.

Cette transformation dans le plan $\mathbb{R}^2 \setminus \{F\}$ est localement un difféomorphisme. Ainsi, l'image d'un cusp ordinaire par l'application $\sqrt{\cdot}$ est aussi un cusp ordinaire.

Remarquons que l'application $\sqrt{\cdot}$ transforme les droites ne passant pas par F en des hyperboles équilatères qui ont pour centre F . Ainsi les asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ sont des droites (transformées des paraboles $\mathcal{P}_{l_1,F}$ et $\mathcal{P}_{l_2,F}$) et des hyperboles équilatères (transformées des droites a_{T_1} et a_{T_2} , médiatrices des segments $[Q_{T_1}F]$ et $[Q_{T_2}F]$ où Q_{T_1} et Q_{T_2} sont les points de tangence des deux tangentes à l'hyperbole passant par F - voir la Section 3.1.2). Puisqu'une hyperbole équilatère possède elle-même des asymptotes, ces asymptotes sont des asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$. Comme nous considérons une application bivaluée, nous aurons donc 4 droites asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ et, suivant la position du point F , 0 ou 2 paires de droites orthogonales, asymptotes des hyperboles équilatères asymptotes.

De plus, si le point F est à l'extérieur des cercles hyperosculateurs à l'hyperbole, la transformée $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ possède 4 points doubles correspondant aux cercles passant par F bitangents à l'hyperbole et 4 cusps ordinaires. Dans le cas où le point F est à l'intérieur d'un cercle hyperosculateur, la transformée $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ possède alors seulement 2 points doubles et pas de cusp.

4.2 À propos de la courbure de la transformée de $\mathcal{S}_{q,F}$

La transformation $\sqrt{\cdot}$ est certes une application conforme mais elle ne préserve en général pas la courbure. La proposition suivante montre que le signe de la courbure de la transformée $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ est le même que celui de l'hyperbole au point correspondant. On remarque que la courbure est invariante par symétrie centrale (isométrie directe); ainsi, bien que la transformation $\sqrt{\cdot}$ soit bivaluée, la courbure de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ est bien définie.

Proposition 4.2.1. *Soit $\tilde{q}(t)$ une paramétrisation unitaire de l'hyperbole q et notons $\kappa_q(t)$ la courbure de $\tilde{q}(t)$ au point $\tilde{q}(t)$. Soit de plus $\sqrt{\sigma}(t)$ la paramétrisation de la transformée $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ correspondante. Alors la courbure $\kappa_{\sqrt{\sigma}(t)}$ de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ en $\sqrt{\sigma}(t)$ est donnée par*

$$\kappa_{\sqrt{\sigma}(t)} = \frac{\|F\tilde{q}(t)\|\sqrt{|R(t)|}\left(\|F\tilde{q}(t)\|^2 + R(t)^2\right)}{8\left|\kappa_q(t)\left(r(t) - R(t)\right)R(t)^3\right|}\kappa_q(t).$$

En particulier, les courbures $\kappa_{\sqrt{\sigma}(t)}$ et $\kappa_q(t)$ sont de même signe et la transformée $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ ne possède pas de point d'inflexion.

PREUVE. Rappelons tout d'abord que la courbure $\kappa_{\sqrt{\sigma}(t)}$ au point $\sqrt{\sigma}(t)$ est donnée par

$$\kappa_{\sqrt{\sigma}(t)} = \frac{\sqrt{\dot{\sigma}}(t) \wedge \sqrt{\ddot{\sigma}}(t)}{\|\sqrt{\dot{\sigma}}(t)\|^3}.$$

Comme dans la preuve de la Proposition 3.1.18, l'idée est de calculer le déterminant $\sqrt{\dot{\sigma}}(t) \wedge \sqrt{\ddot{\sigma}}(t)$ dans la base orthonormée $(\dot{\tilde{q}}(t), \dot{\tilde{q}}(t)^\perp)$. Si nous notons $\sigma_F(t) := \sigma(t) - \overline{OF}$, nous pouvons écrire $\sqrt{\sigma}(t)$ comme l'image de $\sigma_F(t)$ par la transformation $\sqrt{\cdot}$, notée ici f . Autrement dit, posons $\sqrt{\sigma}(t) := f(\sigma_F(t))$. Dans ce cas les dérivées première et seconde s'écrivent comme :

$$\begin{aligned} \sqrt{\dot{\sigma}}(t) &= f'(\sigma_F(t))\dot{\sigma}(t) \\ \text{et } \sqrt{\ddot{\sigma}}(t) &= f'(\sigma_F(t))\ddot{\sigma}(t) + f''(\sigma_F(t))(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)) \end{aligned}$$

car $\dot{\sigma}_F(t) = \dot{\sigma}(t)$.

Si on identifie le plan $\mathbb{R}^2$ avec le plan complexe $\mathbb{C}$, alors

$$f(z) = \sqrt{z} \quad f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \quad f''(z) = \frac{-1}{4z\sqrt{z}}$$

et de plus

$$z_1 \wedge z_2 = \Im(\overline{z_1}z_2).$$

Calculons alors le déterminant $\sqrt{\dot{\sigma}}(t) \wedge \sqrt{\ddot{\sigma}}(t)$ (pour alléger la notation, nous omettrons le paramètre t)

$$\begin{aligned} \sqrt{\dot{\sigma}}(t) \wedge \sqrt{\ddot{\sigma}}(t) &= (f'(\sigma_F)\dot{\sigma} \wedge f'(\sigma_F)\ddot{\sigma}) + (f'(\sigma_F)\dot{\sigma} \wedge f''(\sigma_F)(\dot{\sigma}, \dot{\sigma})) \\ &= \Im\left(\frac{\overline{\dot{\sigma}}}{2\sqrt{\sigma_F}} \cdot \frac{\ddot{\sigma}}{2\sqrt{\sigma_F}} + \frac{\overline{\dot{\sigma}}}{2\sqrt{\sigma_F}} \cdot \frac{-\dot{\sigma}}{4\sigma_F\sqrt{\sigma_F}}\dot{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{4\|\sigma_F\|}\Im(\overline{\dot{\sigma}}\ddot{\sigma}) - \frac{\|\dot{\sigma}\|^2}{8\|\sigma_F\|}\Im\left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma_F} \cdot \frac{\overline{\sigma_F}}{\sigma_F}\right) \\ &= \frac{1}{4\|\sigma_F\|}\left(\dot{\sigma} \wedge \ddot{\sigma} + \frac{1}{2}\frac{\|\dot{\sigma}\|^2}{\|\sigma_F\|^2}(\dot{\sigma} \wedge \sigma_F)\right) \\ &= \frac{1}{4\|\sigma_F\|}\dot{\sigma} \wedge \left(\ddot{\sigma} + \frac{1}{2}\frac{\|\dot{\sigma}\|^2}{\|\sigma_F\|^2}\sigma_F\right) \end{aligned}$$

Commençons par calculer $\ddot{\sigma} + \frac{1}{2}\frac{\|\dot{\sigma}\|^2}{\|\sigma_F\|^2}\sigma_F$. Rappelons que $\kappa_q(t) = \frac{1}{r(t)}$ désigne la courbure de l'hyperbole q au point $\tilde{q}(t)$ où $\tilde{q}(t)$ est une paramétrisation unitaire de l'hyperbole q .

Rappelons que les coordonnées de la dérivée $\dot{\sigma}(t)$ dans la base orthonormée $(\dot{\tilde{q}}(t), \dot{\tilde{q}}(t)^\perp)$ sont

$$\dot{\sigma}(t) = \kappa_q(t)(r(t) - R(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ \delta(t) \end{pmatrix}$$

où $R(t)$ et $\delta(t)$ sont définis respectivement par les équations (3.2) et (3.4), que la norme de $\dot{\sigma}(t)$ est exprimée par

$$\|\dot{\sigma}(t)\| = \frac{2 \left| \kappa_q(t)(r(t) - R(t))R(t) \right|}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|}$$

et que les coordonnées de la dérivée seconde $\ddot{\sigma}(t)$ sont données par

$$\ddot{\sigma}(t) = \kappa_q(t)A(t) \begin{pmatrix} 1 \\ \delta(t) \end{pmatrix} + 2\kappa_q(t)(r(t) - R(t)) \left(\kappa_q(t) + \frac{R(t)}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(voir respectivement les équations (3.6), (3.13) et (3.9)).

Rappelons de plus que

$$\sigma_F(t) = \sigma(t) - \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{F\tilde{q}(t)} + R(t)\dot{\tilde{q}}(t)^\perp \quad \text{et} \quad \|\sigma_F(t)\| = |R(t)|.$$

Cependant, comme nous travaillons dans la base orthonormée $(\dot{\tilde{q}}(t), \dot{\tilde{q}}(t)^\perp)$, il nous faut écrire $\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}$ dans cette base :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F\tilde{q}(t)} &= \langle \overrightarrow{F\tilde{q}(t)} | \dot{\tilde{q}}(t) \rangle \dot{\tilde{q}}(t) + \langle \overrightarrow{F\tilde{q}(t)} | \dot{\tilde{q}}(t)^\perp \rangle \dot{\tilde{q}}(t)^\perp \\ &= \langle \overrightarrow{F\tilde{q}(t)} | \dot{\tilde{q}}(t) \rangle \dot{\tilde{q}}(t) - (\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)) \dot{\tilde{q}}(t)^\perp \\ &= (\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)) \begin{pmatrix} \delta(t) \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Finalement, calculons le terme $\ddot{\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\|\dot{\sigma}\|^2}{\|\sigma_F\|^2} \sigma_F$ dans la base orthonormée $(\dot{\tilde{q}}(t), \dot{\tilde{q}}(t)^\perp)$ (pour alléger la notation, nous omettons le paramètre t)

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\|\dot{\sigma}\|^2}{\|\sigma_F\|^2} \sigma_F &= \kappa_q A \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix} + 2\kappa_q(r - R) \left(\kappa_q + \frac{R}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} \frac{4(\kappa_q(r - R))^2 R^2}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} \left((\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)) \begin{pmatrix} \delta \\ -1 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \kappa_q A \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix} + 2\kappa_q(r - R) \left(\kappa_q + \frac{R}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + (\kappa_q(r - R))^2 \frac{2(\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t))}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} \begin{pmatrix} \delta \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2(\kappa_q(r - R))^2}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} R \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \kappa_q A \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix} + \frac{(\kappa_q(r - R))^2}{R} \begin{pmatrix} \delta \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\quad + 2\kappa_q(r - R) \left(\kappa_q + \frac{R}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} (1 + \kappa_q(r - R)) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer le déterminant $\sqrt{\dot{\sigma}}(t) \wedge \sqrt{\ddot{\sigma}}(t)$

$$\begin{aligned}
4|R|\sqrt{\dot{\sigma}}(t) \wedge \sqrt{\ddot{\sigma}}(t) &= \dot{\sigma}(t) \wedge \left(\ddot{\sigma}(t) + \frac{1}{2} \frac{\|\dot{\sigma}(t)\|^2}{\|\sigma_F(t)\|^2} \sigma_F(t) \right) \\
&= \kappa_q^2(r-R)A \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \delta & \delta \end{vmatrix} + \frac{(\kappa_q(r-R))^3}{R} \begin{vmatrix} 1 & \delta \\ \delta & -1 \end{vmatrix} \\
&\quad + 2(\kappa_q(r-R))^2 \left(\kappa_q + \frac{R}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} (1 + \kappa_q(r-R)) \right) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\frac{(\kappa_q(r-R))^3}{R} \left(\frac{2R}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|} \right)^2 \\
&\quad + 2(\kappa_q(r-R))^2 \left(\kappa_q + \frac{R}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} (1 + \kappa_q(r-R)) \right) \\
&= 2(\kappa_q(r-R))^2 \left(\kappa_q + \frac{R}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} (1 - \kappa_q(r-R)) \right) \\
&= 2(\kappa_q(r-R))^2 \left(\kappa_q + \frac{R}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} \kappa_q R \right) \\
&= 2(\kappa_q(r-R))^2 \left(1 + \frac{R^2}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} \right) \kappa_q
\end{aligned}$$

Finalement, la courbure $\kappa_{\sqrt{\sigma}}(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\kappa_{\sqrt{\sigma}} &= \frac{\sqrt{\dot{\sigma}}(t) \wedge \sqrt{\ddot{\sigma}}(t)}{\|\sqrt{\dot{\sigma}}(t)\|^3} = \frac{2\|\sqrt{\sigma_F}\|^3 (\kappa_q(r-R))^2}{\|\dot{\sigma}\|^3} \left(1 + \frac{R^2}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} \right) \kappa_q \\
&= \frac{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^3 \sqrt{|R|}^3 (\kappa_q(r-R))^2}{8|\kappa_q(r-R)R|^3 |R|} \left(1 + \frac{R^2}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} \right) \kappa_q \\
&= \frac{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\| \sqrt{|R|}}{8|\kappa_q(r-R)R^3|} \left(\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2 + R^2 \right) \kappa_q.
\end{aligned}$$

Comme le point F n'appartient pas à l'hyperbole q et que la courbure $\kappa_q(t)$ ne s'annule jamais, le numérateur $\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\| \sqrt{|R(t)|} (\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2 + R(t)^2) \kappa_q(t)$ est toujours non nul et la transformée $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ ne possède donc pas de point d'inflexion, ce qui achève la preuve. $\square$

4.3 Étude de l'intersection d'une droite avec la transformée de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$

Nous étudions maintenant l'intersection de la courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ avec l'image d'une parabole $\mathcal{P}_{d,F}$ par l'application $\sqrt{\cdot}$ qui fixe le point F .

La courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ et la transformée d'une parabole $\mathcal{P}_{d,F}$ de foyer F sont invariantes par symétrie centrale de centre l'origine F . La transformée d'une parabole $\mathcal{P}_{d,F}$ est composée de deux droites parallèles équidistantes du point F ¹. Pour obtenir le nombre d'intersections

1. Formellement, la transformée d'une parabole est formée de deux demi-droites parallèles dont les origines sont sur l'axe des abscisses et équidistantes du point F . Puisque nous considérons la transformation bivaluée, ces deux demi-droites sont complétées par leur symétrie centrale, formant ainsi deux droites parallèles

entre la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ et une parabole $\mathcal{P}_{d,F}$, il faudra donc diviser par deux le nombre d'intersections obtenu entre la courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ et la transformée de la parabole. Cependant, ceci revient à étudier le nombre d'intersections entre la courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ et une seule droite ne passant pas par l'origine F , que l'on note $\sqrt{\mathcal{P}}$.

Remarquons alors le fait suivant :

Remarque 4.3.1. Soit une droite qui coupe en un certain nombre de points une courbe donnée ayant pour seules singularités des points doubles. Si l'on translate cette droite, le nombre d'intersections (compté avec multiplicité) change uniquement au passage par l'un des trois cas suivants :

- si un point d'intersection part à l'infini,
- lorsque la droite est tangente à la courbe,
- lorsque la droite passe par un cusp.

Pour étudier l'intersection entre la courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ et une droite $\sqrt{\mathcal{P}}$, l'idée est d'utiliser la Remarque 4.3.1 pour réduire le nombre de cas à étudier. L'autre outil est le lien entre courbure de signe constant et convexité. En effet, nous avons montré dans la Proposition 4.2.1 que, pour un t donné, la courbure de la transformée $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ au point $\sqrt{\sigma}(t)$ est de même signe que la courbure de l'hyperbole q au point $\tilde{q}(t)$; autrement dit, tout arc de la transformée $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ privée de ses points singuliers est de courbure de signe constant. Rappelons avant tout la définition d'un arc convexe.

Définition 4.3.2. Soit $\mathcal{A}$ un arc, simple (i.e. qui n'a pas de point double) et régulier, d'une courbe plane γ et notons ℓ_P la droite tangente à l'arc $\mathcal{A}$ en un point $P \in \mathcal{A}$. On dit que l'arc $\mathcal{A}$ est *convexe* si, pour tout $P \in \mathcal{A}$, on a $\mathcal{A} \cap \ell_P = \{P\}$. En particulier, l'arc $\mathcal{A}$ est entièrement situé d'un même côté de la droite ℓ_P .

Une conséquence directe de cette définition est le fait que, si l'arc $\mathcal{A}$ possède des tangentes extrémales, alors il est entièrement contenu dans l'un des secteurs défini par ses tangentes extrémales.

Le lien entre convexité et courbure est alors donné par le lemme suivant, donné sans démonstration.

Lemme 4.3.3. Soit $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la paramétrisation d'une courbe plane γ simple et régulière. Supposons que le prolongement C^1 de γ par ses tangentes en $\tilde{\gamma}(a)$ et $\tilde{\gamma}(b)$ reste simple. Supposons de plus que, pour tout $t \in [a, b]$, la courbure $\kappa_{\tilde{\gamma}}(t)$ de la courbe γ au point $\tilde{\gamma}(t)$ soit positive. Alors la courbe γ est convexe.

Nous montrons par la suite que les composantes connexes de la transformée $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ privée de ses singularités vérifient les hypothèses du Lemme 4.3.3 et sont donc convexes. Notre étude se base alors essentiellement sur les propriétés des arcs convexes, que nous rappelons ici précédées par deux définitions.

Définition 4.3.4. Soit t_1 et t_2 deux droites non parallèles et notons I leur point d'intersection. Nous appelons *secteur orienté*, noté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(t_1, t_2)$, les deux secteurs fermés du plan définis de manière directe par les droites t_1 et t_2 (domaine grisé de la Figure 4.2). Remarquons que

$$\begin{aligned} \text{sec}_{\mathbb{R}^2}(t_1, t_2) \cup \text{sec}_{\mathbb{R}^2}(t_2, t_1) &= \mathbb{R}^2 \\ \text{et} \\ \text{sec}_{\mathbb{R}^2}(t_1, t_2) \cap \text{sec}_{\mathbb{R}^2}(t_2, t_1) &= t_1 \cup t_2. \end{aligned}$$

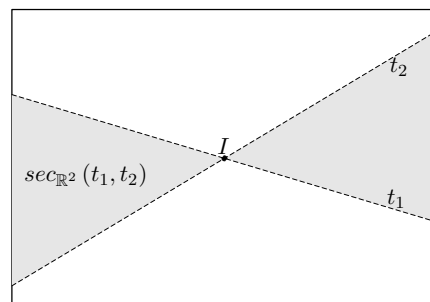


FIGURE 4.2 – Le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(t_1, t_2)$

Par abus de langage, nous appelons aussi *secteur orienté*, noté $\text{sec}(t_1, t_2)$ l'ensemble des droites dont la parallèle passant par le point I est contenue dans le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(t_1, t_2)$.

Définition 4.3.5. Soit $\mathcal{A}$ un arc convexe possédant deux tangentes extrémales t_1 et t_2 (qui peuvent être des asymptotes) non parallèles. Les tangentes extrémales de $\mathcal{A}$ partitionnent le plan en quatre quadrants dont l'un contient entièrement l'arc $\mathcal{A}$; supposons que le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(t_2, t_1)$ ne contient pas l'arc $\mathcal{A}$. Considérons de plus, s'il existe, le segment reliant les extrémités de l'arc $\mathcal{A}$ (dans le cas où $\mathcal{A}$ possède une asymptote, le segment m est en fait une demi-droite); nous nommerons $m_{\mathcal{A}}$ ce segment. Appelons $\omega_{\mathcal{A}}(t_2, t_1)$ la partie fermée du plan constituée par la réunion du secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(t_2, t_1)$ et de la partie du plan délimitée par le segment $m_{\mathcal{A}}$ et les droites t_1 et t_2 qui contient $\mathcal{A}$ (domaine gris clair de la Figure 4.3). Appelons de plus ${}^c\omega_{\mathcal{A}}(t_2, t_1)$ l'adhérence du complémentaire dans le plan de $\omega_{\mathcal{A}}(t_2, t_1)$ (domaine gris foncé de la Figure 4.3).

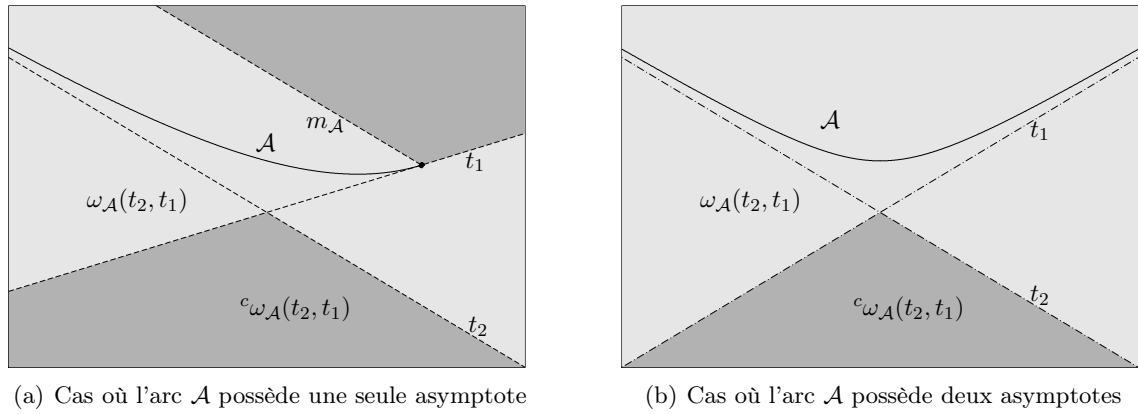


FIGURE 4.3 – $\omega_{\mathcal{A}}(t_2, t_1)$ et ${}^c\omega_{\mathcal{A}}(t_2, t_1)$

La notation $\omega_{\mathcal{A}}(t_2, t_1)$ est redondante, puisque le domaine $\omega_{\mathcal{A}}(t_2, t_1)$ dépend uniquement de $\mathcal{A}$. Cependant, cette notation permet d'associer le domaine $\omega_{\mathcal{A}}(t_2, t_1)$ au secteur orienté $\text{sec}(t_2, t_1)$ auquel appartiennent les droites intersectant l'arc $\mathcal{A}$ en deux points.

Énonçons maintenant les propriétés des arcs convexes que nous utiliserons par la suite.

Propriétés des arcs convexes. Soit $\mathcal{A}$ un arc convexe possédant deux tangentes extrémales non parallèles t_1 et t_2 (qui peuvent éventuellement être des asymptotes) non parallèles. Notons I le point d'intersection de t_1 et t_2 et supposons que l'arc $\mathcal{A}$ soit contenu dans le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(t_1, t_2)$.

1. Toute droite coupe l'arc $\mathcal{A}$ en au plus deux points.
2. Une droite intersectant l'arc $\mathcal{A}$ en deux points est parallèle à l'une des tangentes de $\mathcal{A}$.
3. Toute tangente à l'arc $\mathcal{A}$ appartient au secteur orienté $\text{sec}(t_2, t_1)$. Par la Propriété 2, il en va de même pour toute droite intersectant $\mathcal{A}$ en deux points.
4. La partie du plan $\omega_{\mathcal{A}}(t_2, t_1)$ est l'adhérence de la réunion de toutes les droites intersectant l'arc $\mathcal{A}$ en deux points (éventuellement comptés avec multiplicité).
5. Toute droite intersectant $\mathcal{A}$ et appartenant au secteur orienté ouvert $\text{sec}(t_1, t_2)$ coupe l'arc $\mathcal{A}$ en exactement un point.
6. Si le segment (ou la demi-droite) $m_{\mathcal{A}}$ existe (voir Déf. 4.3.5), une droite intersecte $m_{\mathcal{A}}$ si et seulement si elle intersecte l'arc $\mathcal{A}$ en un point.

Avant de commencer, énonçons encore quelques résultats.

Assertion 4.1.

- (I) Soit $\mathcal{A}$ un arc convexe possédant deux tangentes extrémales t_1 et t_2 non parallèles ; supposons que le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(t_2, t_1)$ ne contient pas l'arc $\mathcal{A}$ et que ${}^c\omega_{\mathcal{A}}(t_2, t_1)$ comporte deux composantes connexes. Soit un segment d intersectant le bord des deux composantes connexes de ${}^c\omega_{\mathcal{A}}(t_2, t_1)$. Alors le segment d intersecte toutes les droites intersectant l'arc $\mathcal{A}$ en deux points.
- (II) Soit un secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(t_1, t_2)$ et soit un segment d intersectant le bord des deux composantes connexes du plan définies par le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(t_1, t_2)$. Alors le segment d intersecte toutes les droites contenues dans $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(t_1, t_2)$.

PREUVE DE 4.1(I). Toute droite qui intersecte l'arc $\mathcal{A}$ en deux points est contenue dans la partie du plan $\omega_{\mathcal{A}}(t_2, t_1)$ et sépare le plan en deux composantes connexes, chacune contenant une composante connexe de ${}^c\omega_{\mathcal{A}}(t_2, t_1)$. Donc un segment d intersectant les bords des deux composantes connexes de ${}^c\omega_{\mathcal{A}}(t_2, t_1)$ intersecte nécessairement ces droites.

La preuve de 4.1(II) est analogue. $\square$

Remarquons que l'Assertion 4.1 reste vraie si d est une demi-droite parallèle à t_1 ou t_2 qui intersecte seulement l'un des bords de ${}^c\omega_{\mathcal{A}}(t_2, t_1)$.

Lemme 4.3.6. Soit le plan $\mathbb{R}^2$ et soit la symétrie centrale ι de centre l'origine O . Soit une courbe convexe γ possédant deux tangentes extrémales t_1 et t_2 non parallèles et telles que le prolongement C^1 de γ par ses tangentes extrémales reste simple. Supposons de plus que γ soit contenue dans le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(t_1, t_2)$.

Si l'origine O appartient à la composante connexe de ${}^c\omega_{\gamma}(t_2, t_1)$ non délimitée par le segment m_{γ} , alors il n'existe pas de tangente de γ qui intersecte $\iota(\gamma)$. De plus, toute droite intersectant la courbe γ en deux points n'intersecte pas $\iota(\gamma)$.

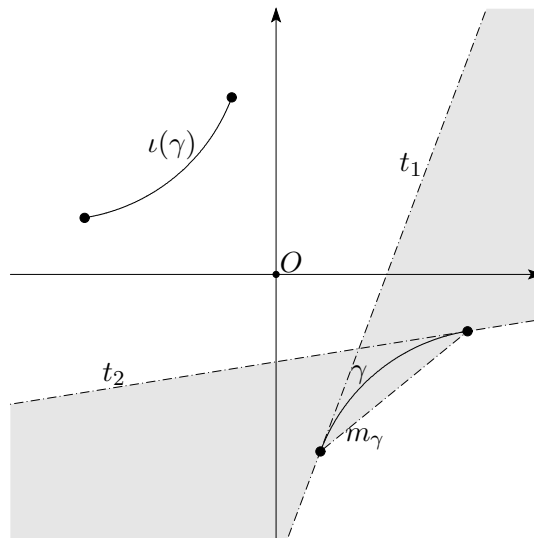


FIGURE 4.4 – Illustration du Lemme 4.3.6

PREUVE. D'une part, par la Propriété 4, les tangentes à γ sont contenues dans $\omega_{\gamma}(t_2, t_1)$.

D'autre part, $\iota(\gamma)$ est contenue dans la partie du plan ${}^c\omega_{\gamma}(t_2, t_1)$ qui contient aussi l'origine. En effet, considérons une droite d qui passe par l'origine O et qui coupe γ en un

point P . Comme l'origine appartient à ${}^c\omega_\gamma(t_2, t_1)$, la droite d coupe chacune des tangentes extrémales de γ en un point situé sur l'intervalle $[PO]$ sur la droite d . Ainsi, $\iota(P)$ appartient à ${}^c\omega_\gamma(t_2, t_1)$.

Comme l'intersection entre $\omega_\gamma(t_2, t_1)$ et ${}^c\omega_\gamma(t_2, t_1)$ est constituée du bord de ${}^c\omega_\gamma(t_2, t_1)$, autrement dit du segment m_γ et d'une portion des tangentes extrémales de γ , les tangentes à γ n'intersectent pas $\iota(\gamma)$.

De plus, toute droite intersectant la courbe γ en deux points est, elle aussi, contenue dans $\omega_\gamma(t_2, t_1)$ et donc n'intersectera pas $\iota(\gamma)$ non plus. $\square$

Corollaire 4.3.7. *Soit le plan $\mathbb{R}^2$ et soit la symétrie centrale ι de centre l'origine O . Soit une courbe convexe γ possédant deux asymptotes a_1 et a_2 non parallèles. Supposons de plus que γ soit contenue dans le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(a_1, a_2)$.*

Si l'origine O appartient à ${}^c\omega_\gamma(a_2, a_1)$, alors une droite d non parallèle aux asymptotes a_1 et a_2 possède zéro ou deux points d'intersection avec la réunion de γ et $\iota(\gamma)$.

Pour démontrer ce Corollaire, l'assertion suivante est nécessaire.

Assertion 4.2. *Avec les hypothèses du Corollaire 4.3.7, une droite non parallèle aux asymptotes de γ et intersectant γ transversalement en un point coupe $\iota(\gamma)$ en exactement un point et réciproquement.*

En effet, par la Propriété 5 des arcs convexes, une droite intersectant la courbe γ en un point appartient secteur orienté $\text{sec}(a_1, a_2)$. Par cette même Propriété, les droites appartenant au secteur orienté $\text{sec}(a_1, a_2)$ coupent la courbe $\iota(\gamma)$ en au plus un point. Supposons alors que la droite d passe par l'origine O et soit contenue dans le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(a_1, a_2)$. Par définition de ι , la droite d intersecte la courbe $\iota(\gamma)$ en un point. Translatons maintenant cette droite. Comme cette droite n'est ni parallèle aux asymptotes, ni parallèle à l'une des tangentes de γ et que les courbes γ et $\iota(\gamma)$ n'ont pas de cusp, le nombre de points d'intersection entre la droite d et chacune des courbes γ et $\iota(\gamma)$ ne change pas par translation (Rem.4.3.1). Ainsi une droite d non parallèle aux asymptotes et possédant un point d'intersection avec γ coupe la branche $\iota(\gamma)$ en exactement un point et réciproquement. $\square$

Remarque 4.3.8. De la preuve de l'Assertion 4.2 on déduit que, avec les hypothèse du Corollaire 4.3.7, toute droite appartenant au secteur orienté $\text{sec}(a_1, a_2)$ intersecte γ en un point.

PREUVE DU COROLLAIRE 4.3.7. Par la Propriété 1 des arcs convexes, une droite d intersecte la courbe γ en au plus deux points ; nous devons donc étudier les trois cas récapitulés dans le tableau suivant.

	Nombre d'intersections			
γ	γ est un arc convexe			
	2	1	0	
$\iota(\gamma)$	0 Lemme 4.3.6	1 Ass. 4.2	2	0
Total	2	2	2	0

$\square$

Remarque 4.3.9. Remarquons que, avec les hypothèse du Corollaire 4.3.7, une droite n'intersecte pas la réunion de γ et $\iota(\gamma)$ si et seulement si elle est contenue dans la composante connexe du plan définie par la réunion de γ et $\iota(\gamma)$ qui contient l'origine.

Dans les Figures 4.5, 4.6, 4.9, 4.15 et 4.18 qui illustrent les courbes $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ pour les quatre différentes positions du point F , les branches traitillées correspondent aux points $\sqrt{\sigma}(t)$ tels que $\tilde{q}(t)$ est un point sur q^- , tandis que les branches en trait continu correspondent aux points $\sqrt{\sigma}(t)$ tels que $\tilde{q}(t)$ est un point sur q^+ .

Nous n'étudierons pas les cas où la droite $\sqrt{\mathcal{P}}$ est parallèle à l'une des asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$; en effet, ils correspondent aux cas non génériques où, avant la transformation, la droite d est parallèle à l'une des asymptotes de l'hyperbole q ou à l'une des droites asymptotes de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$.

4.3.1 Cas où le point F est à l'intérieur de l'hyperbole

4.3.1.1 Cas où le point F est à l'intérieur d'un cercle hyperosculateur

Théorème 4.3.10. *Lorsque le point F est à l'intérieur d'un cercle hyperosculateur à l'hyperbole, le nombre maximal de cercles passant par F et tangents à une droite et à l'hyperbole est 4.*

Lorsque le point F est à l'intérieur d'un cercle hyperosculateur à q , la courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ possède quatre branches avec quatre droites asymptotes correspondant à l'image par $\sqrt{\cdot}$ des paraboles $\mathcal{P}_{l_1,F}$ et $\mathcal{P}_{l_2,F}$ (voir la Fig. 3.10, p.71). Sans perte de généralité, supposons que, avant d'appliquer la transformation $\sqrt{\cdot}$, le point F soit d'ordonnée positive. Considérons les branches (1), (1'), (2) et (2') indiquées sur la Figure 4.5 et remarquons qu'elles sont convexes par le Lemme 4.3.3.

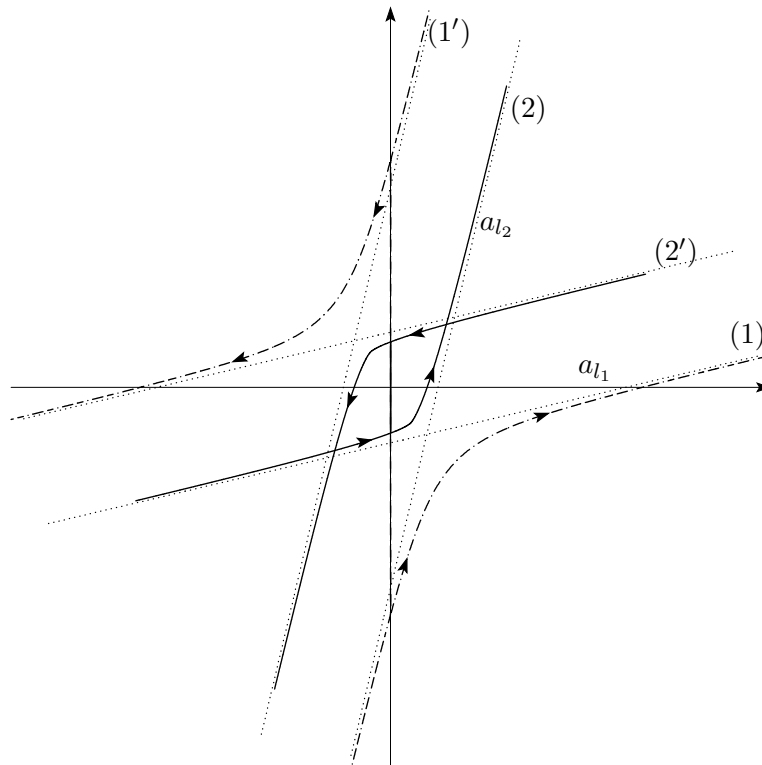


FIGURE 4.5 – La courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ lorsque F est à l'intérieur d'un cercle hyperosculateur

Avant de démontrer le Théorème 4.3.10, énonçons deux lemmes que nous démontrerons par la suite.

Lemme 4.3.11. *Une droite non parallèle à l'une des asymptotes possède deux ou quatre points d'intersection avec la réunion des branches (2) et (2').*

Lemme 4.3.12. *Si une droite possède quatre points d'intersection avec la réunion des branches (2) et (2'), alors elle n'intersecte ni la branche (1) ni la branche (1').*

PREUVE DU THÉORÈME 4.3.10. Montrons qu'une droite $\sqrt{\mathcal{P}}$ a au plus 4 intersections avec la courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$. Supposons que la droite $\sqrt{\mathcal{P}}$ n'est pas parallèle aux asymptotes a_{l_1} et a_{l_2} . Par le Corollaire 4.3.7, nous avons deux cas possibles : soit la droite $\sqrt{\mathcal{P}}$ coupe la réunion des branches (1) et (1') en deux points, soit elle ne coupe aucune de ces deux branches. Le tableau suivant permet alors de conclure.

Branches	Nombre d'intersections	
	Corollaire 4.3.7	
(1) $\cup$ (1')	2	0
(2) $\cup$ (2')	2 Lemmes 4.3.12 et 4.3.11	≤ 4 Lemme 4.3.11
Total	4	≤ 4

Puisqu'il existe des droites qui intersectent $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ en quatre points, nous avons ainsi démontré le Théorème 4.3.10. $\square$

Démontrons maintenant les Lemmes 4.3.11 et 4.3.12. Cependant, ces deux preuves nécessitent auparavant assertion.

Assertion 4.3. *Une droite non parallèle aux asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ et intersectant la branche (2) en un point coupe la branche (2') en exactement un point et réciproquement.*

PREUVE. Par la Propriété 5 des arcs convexes (p.85), une droite intersectant la branche (2) en un point appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_{l_2}, a_{l_1})$. Par cette même Propriété, les droites appartenant au secteur orienté $\text{sec}(a_{l_2}, a_{l_1})$ coupent la branche (2') en au plus un point.

Supposons alors que la droite d soit contenue dans le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(a_{l_2}, a_{l_1})$. Comme la branche (2') possède des asymptotes parallèles à celles de la branche (2), la droite d intersecte la branche (2') en un point. Translatons maintenant cette droite. Comme cette droite n'est ni parallèle aux asymptotes, ni parallèle à l'une des tangentes de (2) ou (2') et que les branches (2) et (2') n'ont pas de cusp, le nombre de points d'intersection entre la droite d et chacune des branches (2) et (2') ne change pas par translation (Rem.4.3.1). Ainsi une droite d non parallèle aux asymptotes et possédant un point d'intersection avec (2) coupe la branche (2') en exactement un point et réciproquement. $\square$

PREUVE DU LEMME 4.3.11. Par la Propriété 1 des arcs convexes, une droite d coupe la branche (2) en au plus deux points. Nous devons donc étudier les trois cas récapitulés dans le tableau suivant.

	Nombre d'intersections			
	(2) est un arc convexe			
(2)	2	1	0	
(2')	par (i)		1 Ass. 4.3	2 voir (ii)
	2	0		
Total	4	2	2	2

- (i) Par la Propriété 3 des arcs convexes (p.85), une droite intersectant la branche (2) en deux points appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_{l_1}, a_{l_2})$. Par cette même Propriété, les droites appartenant au secteur orienté $\text{sec}(a_{l_2}, a_{l_1})$ coupent la branche (2') en zéro ou deux points.
- (ii) Par l'Assertion 4.3 et la Propriété 1, le nombre d'intersections entre la branche (2') et une droite n'intersectant pas la branche (2) est zéro ou deux. Montrons alors qu'il n'existe pas de droite qui n'intersecte ni la branche (2) ni la branche (2').
- Nommons B l'un des points d'intersection entre les branches (2) et (2') et considérons la branche (2) privée de ce point. Nous obtenons ainsi l'arc (2a), d'asymptote a_{l_1} et l'arc (2b), d'asymptote a_{l_2} . De même, en considérant la branche (2') privée du point B , nous obtenons l'arc (2a'), d'asymptote a'_{l_1} et l'arc (2b'), d'asymptote a'_{l_2} . Appelons (A) et (B) les parties de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ définies par

$$(A) := \overline{(2a) \cup (2a')} \quad \text{et} \quad (B) := \overline{(2b) \cup (2b')}.$$

La partie (A) sépare le plan en deux composantes connexes, l'une contenant l'asymptote a_{l_1} et l'autre l'asymptote a'_{l_1} . Comme une droite non parallèle à l'asymptote a_{l_1} intersecte nécessairement les droites a_{l_1} et a'_{l_1} , elle intersecte aussi (A).

De même, la partie (B) sépare le plan en deux composantes connexes, l'une contenant l'asymptote a_{l_2} et l'autre l'asymptote a'_{l_2} . Comme une droite non parallèle à l'asymptote a_{l_2} intersecte nécessairement les droites a_{l_2} et a'_{l_2} , elle intersecte aussi (B).

Donc, toute droite non parallèle aux asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ intersecte la réunion des branches (2) et (2').

□

Assertion 4.4. *Une droite possédant deux points d'intersection avec la branche (2) (comptés avec multiplicité) n'intersecte pas la branche (1) et inversement.*

Idem pour les branches (1') et (2').

PREUVE. Par la Propriété 4 des arcs convexes (p.85), les droites intersectant la branche (2) en deux points appartiennent à $\omega_{(2)}(a_{l_1}, a_{l_2})$. Or, la branche (1), qui possède les mêmes asymptotes que la branche (2) est contenue dans ${}^c\omega_{(2)}(a_{l_1}, a_{l_2})$. Ainsi, une droite possédant deux points d'intersection avec la branche (2) n'intersecte pas la branche (1). □

PREUVE DU LEMME 4.3.12. Par la Propriété 1 (p.85), une droite possède au plus deux points d'intersection avec chacune des branches (2) et (2'). Ainsi, si le nombre d'intersections d'une droite avec la réunion des branches (2) et (2) est quatre, cette droite possède exactement deux points d'intersections avec la branche (2) et exactement deux avec la branche (2').

Ainsi, comme la droite intersecte (2) en deux points, par l'Assertion 4.4, elle ne coupe pas la branche (1). De même, comme la droite intersecte (2') en deux points, toujours par l'Assertion 4.4, elle ne coupe pas la branche (1').

Donc, une droite intersectant la réunion des branches (2) et (2') en quatre points n'intersecte ni la branche (1) ni la branche (1'). □

4.3.1.2 Cas où le point F est à l'extérieur des cercles hyperosculateurs

Théorème 4.3.13. *Lorsque le point F est à l'intérieur de l'hyperbole q et à l'extérieur des cercles hyperosculateurs à q , le nombre maximal de cercles passant par F et tangents à une droite et à l'hyperbole est 8.*

Lorsque le point F est à l'extérieur des cercles hyperosculateurs à q , la courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ possède quatre branches avec quatre droites asymptotes correspondant à l'image par $\sqrt{\cdot}$ des paraboles $\mathcal{P}_{l_1,F}$ et $\mathcal{P}_{l_2,F}$ (voir la Fig. 3.11, p.72). Sans perte de généralité, supposons que, avant d'appliquer la transformation $\sqrt{\cdot}$, le point F soit d'ordonnée positive. Nommons les branches (1), (1'), (2) et (2') comme indiqué sur la Figure 4.6. Nommons de plus a_{l_1} et a'_{l_1} , et a_{l_2} et a'_{l_2} les deux paires de droites asymptotes, images par $\sqrt{\cdot}$ des paraboles $\mathcal{P}_{l_1,F}$ et $\mathcal{P}_{l_2,F}$.

Observons que les branches (2) et (2') possèdent chacune deux cusps ; nommons-les C_a et C_b . Nommons de plus B le point double de la branche (2).

Considérons maintenant les arcs de la branche (2) suivants : $(2a) := [BC_a]$, $(2b) := [BC_b]$ et $(3) := [C_aC_b]$. Nommons (T) la courbe fermée définie par

$$(T) := (2a) \cup (3) \cup (2b)$$

et (T') l'image de (T) par symétrie centrale de centre l'origine.

Nommons de plus (A) la partie de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ définie par

$$(A) := \overline{(2)} \setminus (T)$$

et (A') l'image de (A) par symétrie centrale de centre l'origine.

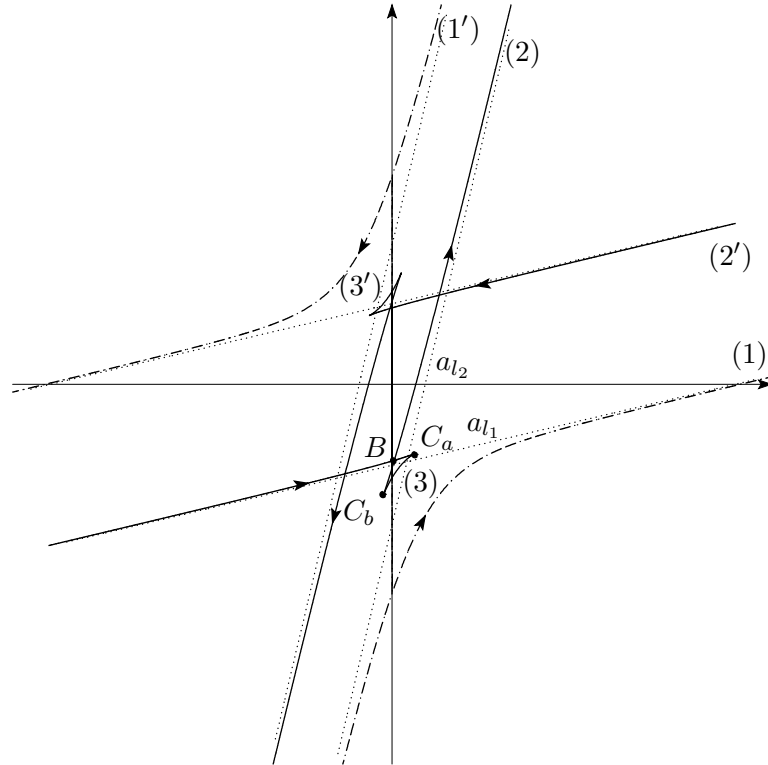


FIGURE 4.6 – La courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ lorsque F est à l'intérieur de q

Remarquons que, par la Proposition 4.2.1, la courbure de (1) est négative sur toute la branche, de même pour la courbure de (1'). Comme ces arcs sont simples, ils sont convexes par le Lemme 4.3.3.

De même, toujours par la Proposition 4.2.1, la courbure des branches (2) et (2') est positive. Si nous considérons la partie (A) privée du point singulier B , nous obtenons deux arcs de courbure positive dont les prolongements C^1 par les respectives tangentes en B

restent simples ; ils sont convexes par le Lemme 4.3.3. Si nous considérons maintenant la partie (T) privée de ses points singuliers, nous obtenons trois arcs dont les prolongements C^1 par les tangentes respectives restent simple (sinon la courbe ne serait pas fermée) ; ils sont convexes par le Lemme 4.3.3.

Avant de démontrer le Théorème 4.3.13, énonçons trois lemmes que nous démontrerons par la suite.

Lemme 4.3.14. *Une droite non parallèle à l'une des asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ possède deux ou quatre points d'intersection avec la réunion de (A) et (A') .*

Lemme 4.3.15. *Si une droite possède quatre points d'intersection avec la réunion de (A) et (A') , alors elle n'intersecte ni la branche (1) ni la branche $(1')$.*

Remarquons que les Lemmes 4.3.14 et 4.3.15 sont les analogues des Lemmes 4.3.11 et 4.3.12 pour ce cas.

Lemme 4.3.16. *Une droite non parallèle à l'une des asymptotes possède zéro, deux ou quatre points d'intersection avec la réunion de (T) et (T') .*

Remarque 4.3.17. Le point B est un point singulier qui appartient à (A) et à (T) . Pour que les Lemmes 4.3.14 et 4.3.16 soient corrects, la multiplicité d'intersection entre une droite d_B passant par (B) et les parties (A) et (B) doit être comptée de la manière suivante.

- Si B est l'unique point d'intersection entre la droite d_B et (T) , alors nous considérons que B est un point d'intersection de multiplicité 2 entre la droite d_B et (A) et nous ne comptons pas d'intersection avec (T) . En effet, si l'on translate d_B on obtient soit deux points d'intersection distincts avec (A) soit deux points d'intersection distincts avec (T) .
- Si la droite d_B intersecte (T) au moins en un autre point, nous considérons que B est un point d'intersection de multiplicité 1 avec (T) et de multiplicité 1 avec (A) . En effet, si l'on translate d_B on obtient un point d'intersection avec (A) et un point d'intersection avec (T) plus les éventuels autres points d'intersection avec (T) .

PREUVE DU THÉORÈME 4.3.13. Montrons qu'une droite $\sqrt{\mathcal{P}}$ a au plus 8 intersections avec la courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$. Supposons que la droite $\sqrt{\mathcal{P}}$ n'est pas parallèle aux asymptotes a_{l_1} et a_{l_2} et qu'elle ne passe ni par le point B ni par le point B' . Par le Corollaire 4.3.7, nous avons deux cas possibles : soit la droite $\sqrt{\mathcal{P}}$ coupe la réunion des branches (1) et $(1')$ en deux points, soit elle ne coupe aucune de ces deux branches. Le tableau suivant permet alors de conclure.

Branches	Nombre d'intersections			
	Corollaire 4.3.7			
$(1) \cup (1')$	2		0	
$(A) \cup (A')$	2	Lemmes 4.3.15 et 4.3.14	≤ 4	Lemme 4.3.14
$(T) \cup (T')$	≤ 4	Lemme 4.3.16	≤ 4	Lemme 4.3.16
Total	≤ 8		≤ 8	

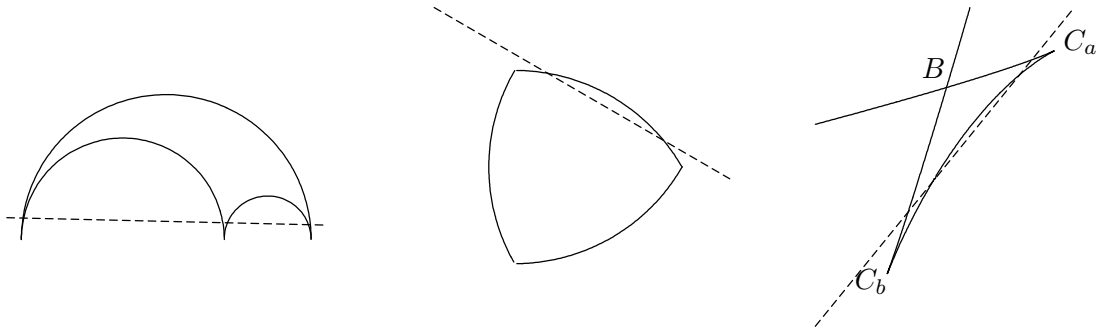
Puisqu'il existe des droites qui intersectent $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ en huit points, nous avons ainsi démontré le Théorème 4.3.13. $\square$

Commençons par démontrer le Lemme 4.3.16, ce qui nécessite auparavant l'assertion suivante.

Assertion 4.5. *Une droite non parallèle à l'une des asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ possède zéro, deux ou quatre points d'intersection avec (T) (comptés avec multiplicité). Idem pour (T') .*

PREUVE. Considérons (T) privée de ses trois points singuliers ; nous obtenons ainsi trois composantes connexes que nous appelons *côtés*. Choisissons alors une droite distincte des tangentes aux cusps C_a ou C_b et remarquons alors les trois faits suivants :

- (i) Par la Proposition 4.2.1, la courbure de (T) est positive sur tout (T) ;
- (ii) comme la courbe (T) est fermée et que ses trois côtés sont convexes, si une droite d intersecte l'un des côtés, alors elle en intersecte nécessairement un autre ;
- (iii) la courbe (T) est fermée, sa courbure est positive et elle possède deux cusps (ordinaires). Alors, si une droite coupe l'un des côtés en deux points, alors elle coupe les deux autres en un point chacun (voir Fig. 4.7).



(a) Une courbe fermée pour laquelle la courbure change de signe aux points singuliers : une droite intersectant un côté en deux points intersecte les deux autres côtés en 0, 1 ou 2 points

(b) Une courbe fermée dont la courbure est de signe constant mais qui ne possède pas de cusps : une droite intersectant un côté en deux points n'intersecte pas les deux autres côtés

(c) La courbe fermée (T) possède deux cusps et sa courbure est positive : une droite intersectant l'un des côtés en deux points coupe les deux autres en un point chacun

FIGURE 4.7 – Illustration de la Remarque (iii)

Comme l'arc (3) est convexe, par la Propriété 1 des arcs convexes (p.85), nous devons donc étudier les trois cas résumés dans le tableau suivant.

	Nombre d'intersections						
	(3) est un arc convexe						
(3)	2	1				0	
		(2a) est un arc convexe				par (iii)	
(2a)	1	2	1	0	1	0	
(2b)	1 par (iii)	1 par (iii)	0	2	1 par (ii)	1 par (ii)	0 par (ii)
Total	4	4	2	4	2	2	0

Dans le cas où la droite d est tangente à l'un des cusps C_a ou C_b , elle coupe (T) au cusp avec multiplicité 3 ainsi qu'en un point de l'arc (3), pour un total de quatre points comptés avec multiplicité. $\square$

PREUVE DU LEMME 4.3.16. Par l'Assertion 4.5, il suffit de montrer que si une droite d coupe (T) en quatre points alors elle ne coupe pas (T') .

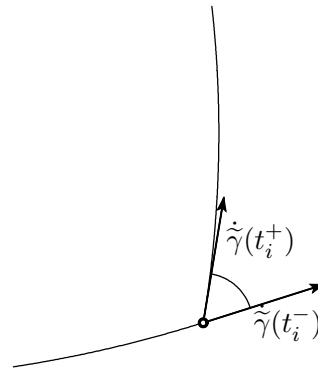
Montrons tout d'abord que, si une droite d coupe l'arc (3) en deux points, alors elle ne coupe pas (T') . Nommons t_{C_a} et t_{C_b} les tangentes aux cusps C_a et C_b respectivement. Remarquons que (A) sépare le plan en deux composantes connexes, l'une contenant (T) et l'autre contenant l'origine O ; donc, par convexité des arcs de la branche (2) privée de ses singularités, l'origine appartient à ${}^c\omega_{(3)}(t_{C_a}, t_{C_b})$. Ainsi, d'une part, par le Lemme 4.3.6, l'arc $(3')$ appartient à ${}^c\omega_{(3)}(t_{C_a}, t_{C_b})$. D'autre part, comme les cusps sont ordinaires (Prop. 3.1.10) et par convexité des arcs $(2a)$, $(2b)$ et (3) , le point B appartient à ${}^c\omega_{(3)}(t_{C_a}, t_{C_b})$ et donc le point B' aussi. Donc (T') appartient aussi à ${}^c\omega_{(3)}(t_{C_a}, t_{C_b})$ et toute droite intersectant l'arc (3) en deux points n'intersecte pas (T') .

Montrons maintenant que, si une droite d coupe l'arc $(2a)$ ou $(2b)$ en deux points, alors elle ne coupe pas (T') . Remarquons que (A) sépare le plan en deux composantes connexes, l'une contenant (T) et l'autre (T') ; dans le cas contraire, puisque B' appartient à la composante connexes définie par (A) qui ne contient pas (T) , on aurait plus que quatre points doubles ce qui contredirait le Corollaire 3.1.21. Par convexité des arcs $(2a)$ et $(2b)$, toute droite intersectant l'arc $(2a)$, resp. $(2b)$, en deux points est contenue dans la composante définie par (A) contenant (T) et ne peut donc couper (T') , ce qui achève la preuve du Lemme 4.3.16. $\square$

On remarque une ressemblance entre la branche (2) de la Section 4.3.1.1 et la partie (A) à la différence près que la partie (A) présente un point singulier. Donnons alors une définition.

Définition 4.3.18. On dit que la courbe simple γ est *convexe par morceaux* s'il existe une paramétrisation $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \gamma$ et une subdivision $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ de l'intervalle $I = [t_1, t_n]$ telle que, pour tout i ,

- (i) l'arc $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ est convexe,
- (ii) la paramétrisation $\tilde{\gamma}(t)$ est C^2 et de courbure positive pour tout $t \in]t_i, t_{i+1}[$,
- (iii) $\dot{\tilde{\gamma}}(t_i^-) \wedge \dot{\tilde{\gamma}}(t_i^+) > 0$ (voir Fig. 4.8).



Les propriétés des arcs convexes (p.85) s'appliquent aussi aux arcs convexes par morceaux. Dans ce cas, les preuves des Lemmes 4.3.14 et 4.3.15 sont analogues à celles des Lemmes 4.3.11 et 4.3.12 respectivement.

FIGURE 4.8 – Illustration de la Définition 4.3.18

Remarque 4.3.19. Lorsque le point est sur un cercle osculateur, la courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ présente un point singulier sur chacune des branches (2) et (2') correspondant au centre du cercle hyperosculateur passant par F . Ceci ne change cependant pas le nombre maximal d'intersections entre une droite et la courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ par rapport au cas où le point est à l'intérieur de l'hyperbole à l'extérieur des cercles hyperosculateurs.

4.3.2 Cas où le point F est à l'extérieur de l'hyperbole

Lorsque le point F est à l'extérieur des asymptotes de q , la courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ possède huit branches avec quatre droites asymptotes correspondant à l'image par $\sqrt{\cdot}$ des paraboles $\mathcal{P}_{l_1,F}$ et $\mathcal{P}_{l_2,F}$ et deux hyperboles équilatères asymptotes, images par $\sqrt{\cdot}$ des droites d_{T_1} et d_{T_2} .

Comme les hyperboles ont elle-mêmes des asymptotes, ces asymptotes sont aussi des asymptotes de la courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$. Au total, la courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ possède donc huit droites asymptotes.

Lorsqu'on observe la Figure 4.9, on remarque qu'il existe des similarités au niveau des branches de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ entre le cas où le point F est à l'extérieur des asymptotes (Fig. 4.9(a)) et le cas où le point F est à l'intérieur des asymptotes (Fig. 4.9(b)). Plus précisément, si nous notons les branches (1), (1'), (2), (2'), (3), (3'), (4) et (4') comme indiqué sur la Figure 4.9, on observe que les branches (2), (2'), (4) et (4') possèdent chacune un cusp, notés respectivement C_2 , C_2' , C_4 et C_4' . Considérons la branche (2) privée de son cusp C_2 ; nous obtenons ainsi les arcs (2a) et (2b) indiqués sur la Figure 4.9 et dont nous précisons par la suite les asymptotes dans chacun des deux cas. En procédant de la même manière, on obtient les arcs (2a'), (4a) et (4a') indiqués sur la Figure 4.9. Remarquons que tous ces arcs sont convexes par le Lemme 4.3.3.

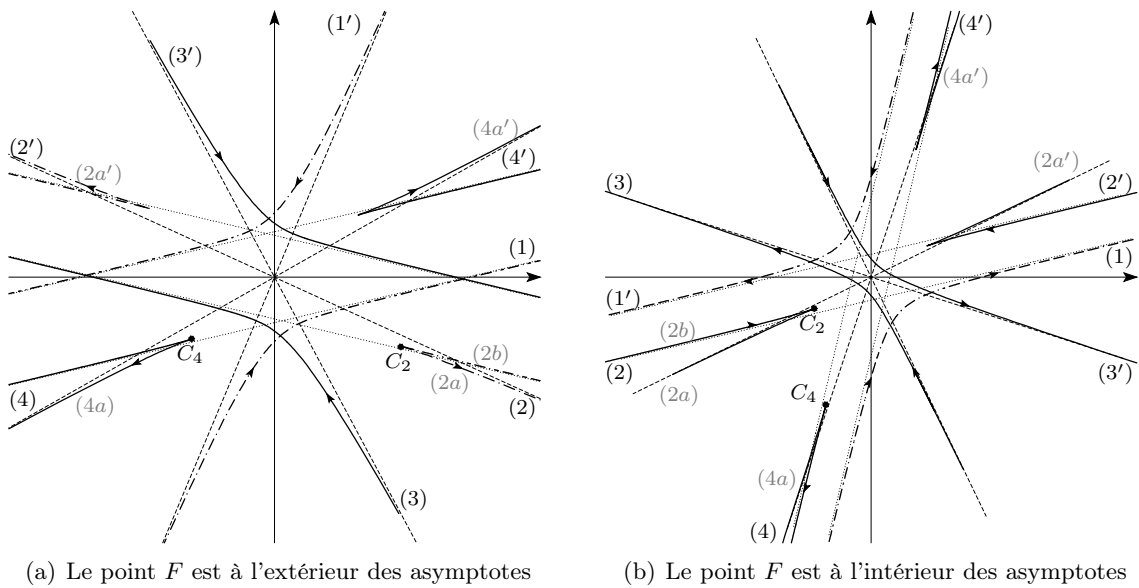


FIGURE 4.9 – La courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ lorsque le point F est à l'extérieur de l'hyperbole

Énonçons alors les propriétés communes aux deux cas.

À propos des branches (1), (1'), (3) et (3'). On remarque sur la Figure 4.9 que les branches (1), (1'), (3) et (3') se retrouvent dans la même position dans les deux cas, position que l'on illustre dans la Figure 4.10. Nommons a_1 et a_2 les asymptotes de la branche (1) de telle sorte que $(1) \in \omega_{(1)}(a_1, a_2)$. De la même manière, nommons a_3 et a_4 les asymptotes de la branche (3) de telle sorte que $(3) \in \omega_{(3)}(a_3, a_4)$ (voir Fig. 4.10). On a alors le lemme suivant.

Lemme 4.3.20. *Une droite non parallèle à l'une des asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ possède deux ou quatre points d'intersection avec la réunion des branches (1), (1'), (3) et (3').*

Remarque 4.3.21. On remarque que le secteur orienté $\text{sec}(a_2, a_3)$ est inclus dans le secteur orienté $\text{sec}(a_1, a_4)$, sinon les branches (1) et (3) ou les branches (1') et (3) n'auraient pas de point d'intersection (Contradiction avec le Corollaire 3.1.21).

PREUVE DU LEMME 4.3.20. Par le Corollaire 4.3.7, il suffit de montrer que si une droite n'intersecte pas la réunion des branches (1) et (1'), alors elle intersecte la réunion des

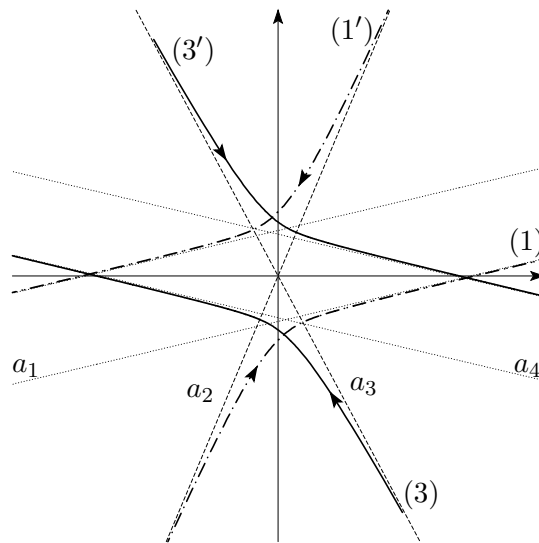


FIGURE 4.10 – Les branches (1), (1'), (3) et (3').

branches (3) et (3') en deux points et inversement. Considérons alors une droite d n'intersectant pas la réunion des branches (1) et (1'). D'une part, par la Remarque 4.3.9, une telle droite est contenue dans la composante connexe du plan définie par la réunion de (1) et (1') contenant l'origine; d'autre part, par la Propriété 3 des arcs convexes (p.85) cette droite appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_1, a_2)$. Or, par la Remarque 4.3.8, toute droite appartenant au secteur orienté $\text{sec}(a_1, a_2)$ intersecte la branche (3) en un point; donc, par le Corollaire 4.3.7, elle intersecte la réunion des branches (3) et (3') en deux points. Le même raisonnement permet de montrer que, si une droite n'intersecte pas la réunion des branches (3) et (3'), alors elle intersecte la réunion des branches (1) et (1') en deux points, ce qui achève la preuve du Lemme 4.3.20. $\square$

À propos des profils de cusps et de leur image par symétrie centrale. Si l'on considère les couples de branches formés par les profils de cusp de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ et leurs images respectives par symétrie centrale, on remarque que, à symétrie près, ils ont tous la même forme que l'on peut représenter par la Figure 4.11. Remarquons que l'asymptote de l'arc (a)

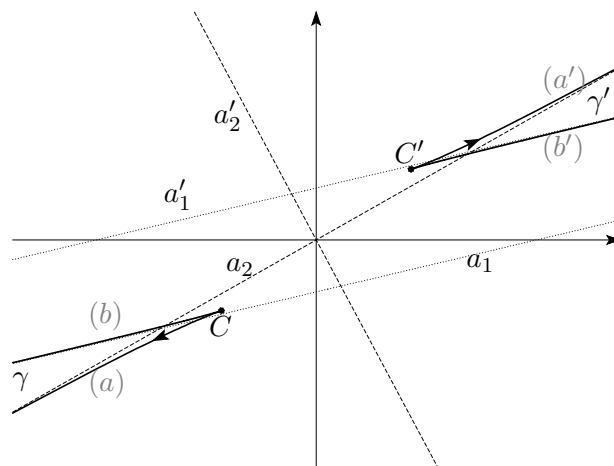


FIGURE 4.11 – Un profil de cusp et son image par symétrie centrale

est, dans tous les cas, une droite passant par l'origine, notée ici a_2 , tandis que l'asymptote de l'arc (b) est l'image par $\sqrt{\cdot}$ d'une parabole, il s'agit donc d'une paire de droites parallèles que nous noterons ici a_1 et a'_1 . Considérons de plus la droite a'_2 , perpendiculaire à a_2 , qui sépare le plan en deux composantes connexes, l'une contenant la branche γ et l'autre la branche γ' . On remarque, en effet, que les paires de branches (1) et (1') ou (3) et (3') séparent le plan en trois composantes connexes, l'une contenant l'origine et les deux autres contenant l'une le profil de cusp γ et l'autre le profil $\iota(\gamma)$, où γ représente la branche (2) ou la branche (4); la droite a'_2 représente alors l'asymptote commune des paires de branches (1) et (1') ou (3) et (3'). On remarque que la droite a_1 appartient au secteur orienté $\text{sec}(a'_2, a_2)$, sinon les branches γ et γ' n'auraient pas de cusp ordinaire.

Avec les notations de la Figure 4.11 et si on note respectivement t_C et $t_{C'}$ les tangentes aux cusps C et C' , on peut énoncer un lemme sur les profils de cusp de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ et leur image par symétrie centrale. Mais remarquons auparavant le fait suivant.

Remarque 4.3.22. Par convexité des arcs (a) et (b) et par le fait que la courbure de ces arcs est de signe constant, le cusp C est situé dans le triangle borné par les droites a_1 , a_2 et a'_2 . Par conséquent, la droite Oa_1 , parallèle à a_1 passant par l'origine, sépare le plan en deux composantes connexes, l'une contenant la branche γ et l'autre la branche γ' .

Lemme 4.3.23. Soit γ le profil d'un cusp de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ et γ' son image par symétrie centrale. Alors, une droite non parallèle à l'une des asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ ou à la droite t_C possède zéro, deux ou quatre points d'intersection avec la réunion des branches γ et γ' .

Pour démontrer le Lemme 4.3.23, considérons auparavant une remarque et une assertion.

Remarque 4.3.24. Outre les asymptotes a_1 , a_2 et a'_2 , considérons la droite t_C , tangente au cusp C , et la droite CC' , passant par les deux cusps C et C' ; nous pouvons alors remarquer les faits suivants sur leurs positions relatives :

- (i) par convexité des arcs (a) et (b) d'asymptote a_2 et a_1 respectivement, la droite t_C appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_1, a_2)$,
- (ii) comme le point C est contenu dans le triangle borné par les droites a_2 , a'_2 et a_1 , la droite CC' appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_2, a'_2)$.

En résumé, les droites a_2 , t_C , a_1 , a'_2 et CC' sont disposées, à translation près, dans l'ordre donné dans la Figure 4.12.

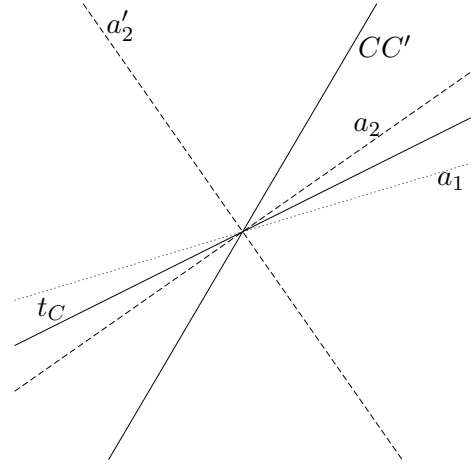


FIGURE 4.12 – La position relative des droites a_2 , t_C , a_1 , a'_2 et CC'

Assertion 4.6. Considérons le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(Ca_1, Ca_2)$ où les droites Ca_1 et Ca_2 sont les parallèles aux droites a_1 et a_2 respectivement qui passent par le cusp C .

- (I) Toute droite contenue dans le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(Ca_1, Ca_2)$ intersecte l'arc (b') en un point. En particulier, la droite t_C tangente au cusp C intersecte l'arc (b') en un point.
- (II) Aucune droite contenue dans le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(Ca_1, Ca_2)$ n'intersecte l'arc (a') . En particulier, la droite t_C tangente au cusp C n'intersecte pas l'arc (a') .

PREUVE. Remarquons tout d'abord que, par convexité des arcs (a) et (a') de même asymptote a_2 , le cusp C appartient au demi-plan défini par la droite a_2 qui ne contient pas le cusp C' .

- (I) D'une part, comme la droite a_2 intersecte l'arc (b') et que le cusp C appartient au demi-plan défini par la droite a_2 qui ne contient pas le cusp C' , la droite Ca_2 intersecte l'arc (b') en un point. Donc, par la Propriété 6 des arcs convexes (p.85), la droite Ca_2 intersecte la demi-droite $m_{(b')}$ (Rem. 4.3.1). D'autre part, la demi-droite $m_{(b')}$ est, par définition, parallèle à l'asymptote a'_1 de l'arc (b') . Finalement, par l'Assertion 4.1(I), la demi-droite $m_{(b')}$ intersecte toutes les droites du secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(Ca_1, Ca_2)$ donc, par la Propriété 6, toutes les droites du secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(Ca_1, Ca_2)$, dont la droite t_C , intersectent l'arc (b') en un point ;
- (II) D'une part, l'arc (a) et le cusp C sont contenus dans le demi-plan défini par la droite a_2 qui ne contient pas (a') ; donc la droite Ca_2 n'intersecte pas l'arc (a') . D'autre part, par la Remarque 4.3.22, l'arc (a) et le cusp C sont contenus dans le demi-plan défini par la droite Oa_1 qui ne contient pas (a') . Donc, la droite Ca_1 n'intersecte pas l'arc (a') . Comme l'arc (a') n'intersecte pas les bords du secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(Ca_1, Ca_2)$, il n'intersecte aucune des droites contenues dans ce secteur orienté ; en particulier, l'arc (a') n'intersecte pas la droite t_C .

□

Assertion 4.7.

- (I) Une droite intersectant l'arc (a) en deux points intersecte l'arc (b) en un point.
- (II) Une droite intersectant l'arc (b) en deux points intersecte l'arc (a) en un point.

PREUVE DE 4.7(I). Les droites intersectant l'arc (a) en deux points sont contenues dans la partie du plan $\omega_{(a)}(t_C, a_2)$, où a_2 est l'asymptote de l'arc (a) et t_C la tangente au cusp C . Comme la droite a_2 intersecte l'arc (b) en un point, par la Propriété 6 des arcs convexes (p.85), la droite a_2 intersecte la demi-droite $m_{(b)}$. De plus, le point C est l'origine de la demi-droite $m_{(b)}$. Donc la demi-droite $m_{(b)}$ intersecte le bord des deux composantes connexes de ${}^c\omega_{(a)}(t_C, a_2)$. Donc, par l'Assertion 4.1(I) et la Propriété 6 des arcs convexes l'arc (b) intersecte en un point les droites intersectant l'arc (a) en deux points.

La preuve de 4.7(II) est analogue.

□

PREUVE DU LEMME 4.3.23. Pour démontrer ce Lemme, nous considérons une droite d_C passant par le cusp C . Selon les secteurs définis par les droites a_1, a_2, a'_2, t_C et CC' , nous déterminons le nombre d'intersection entre la droite d_C et les deux branches γ et γ' . Dans un deuxième temps, nous translatons la droite d_C ; par la Remarque 4.3.1, le nombre d'intersections changera uniquement dans le cas où la droite passera par un cusp ou lorsqu'elle sera tangente à l'un des arcs.

Commençons par étudier le nombre d'intersections entre la droite d_C et les branches γ et γ' à l'aide des Propriétés des arcs convexes (p.85) et en fonction de l'appartenance de d_C aux secteurs définis par les droites a_1, a_2, a'_2, t_C et CC' . Nous avons le tableau suivant.

Arcs	Nombre d'intersections			
	$d_C \in \text{sec}(a_1, t_C)$	$d_C \in \text{sec}(t_C, a_2)$	$d_C \in \text{sec}(a_2, CC')$	$d_C \in \text{sec}(CC', a_1)$
(a)	1 Propriété 5	2 Propriété 3	1 Propriété 5	1 Propriété 5
(b)	2 Propriété 3	1 Propriété 5	1 Propriété 5	1 Propriété 5
(a')	0 Ass. 4.6(II)	0 Ass. 4.6(II)	1 par (i)	0 par (iii)
(b')	1 Ass. 4.6(I)	1 Ass. 4.6(I)	1 par (ii)	0 par (iii)
Total	4	4	4	2

- (i) la droite CC' intersecte l'arc (a') en un point (Propriété 5 des arcs convexes). De plus, la demi-droite $m_{(a')}$ est parallèle à l'asymptote a_2 de (a') ; donc, par l'Assertion 4.1(II) et par la Propriété 6 des arcs convexes, toutes les droites appartenant au secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(Ca_2, CC')$ intersectent l'arc (a') en un point.
- (ii) les droites Ca_2 et CC' intersectent l'arc (b') en un point (Ass. 4.6(I) et Propriété 5 des arcs convexes) ; donc, par l'Assertion 4.1(II) et par la Propriété 6 des arcs convexes, toute droite appartenant au secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(Ca_2, CC')$ intersecte l'arc (b') en un point.
- (iii) la droite CC' sépare le plan en deux demi-plans, l'un contenant γ et l'autre γ' . Par la Remarque 4.3.22 et par convexité de l'arc (b) d'asymptote a_1 , la droite Ca_1 sépare aussi le plan en deux demi-plans, l'un contenant γ et l'autre γ' . Donc une droite contenue dans le secteur orienté $\text{sec}(CC', Ca_1)$ n'intersecte pas γ' .

Translatons maintenant la droite d_C et étudions la variation du nombre d'intersections entre cette droite et la réunion de γ et γ' dans chacun des quatre cas. Pour ce qui suit, nous appelons d les translatées de la droite d_C et $d_{\mathcal{A}}$ la parallèle à d_C tangente à l'arc $\mathcal{A}$.

La droite d appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_1, t_C)$. Une droite d appartenant au secteur orienté $\text{sec}(a_1, t_C)$ peut être tangente aux arcs (b) ou (b') mais jamais aux arcs (a) et (a') (Propriétés 3 et 5 des arcs convexes). Donc, lorsqu'on translate la droite d_C , le nombre d'intersections change uniquement lorsqu'on passe par l'un des cusps ou lorsque la droite est tangente aux arcs (b) ou (b') . Dans chacun des cas, le nombre d'intersections change de 2. Remarquons de plus les faits suivants :

- comme la droite d_C intersecte l'arc (b) en deux points, la droite d_C sépare le plan en deux demi-plans dont l'un contient la droite $d_{(b)}$, parallèle à d_C et tangente à l'arc (b) ;
- par l'Assertion 4.6(II), la droite t_C n'intersecte pas l'arc (a') ; donc, la droite t_C sépare le plan en deux demi-plans l'un contenant l'arc (a) et l'autre l'arc (a') . De plus, par l'Assertion 4.7(I), l'arc (a) appartient au demi-plan contenant $d_{(b)}$.

Finalement, dans le cas où la droite d appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_1, t_C)$, le nombre d'intersections entre la droite d et la réunion des branches γ et γ' est résumé dans le tableau suivant.

Arcs	Nombre d'intersections relativement à la position de la droite translatée				
	$d_{(b)}$	d_C	$d_{C'}$	$d_{(b')}$	
(a)	1	1	0	0	0
(b)	0	2	1	1	1
(a')	0	0	0	1	1
(b')	1	1	1	2	0
Total	2	4	2	4	2

La droite d appartient au secteur orienté $\text{sec}(t_C, a_2)$. Une droite d appartenant au secteur orienté $\text{sec}(t_C, a_2)$ peut être tangente aux arcs (a) ou (a') mais jamais aux arcs (b) et (b') (Propriétés 3 et 5 des arcs convexes). Donc, lorsqu'on translate la droite d_C , le nombre d'intersections change uniquement lorsqu'on passe par l'un des cusps ou lorsque la droite est tangente aux arcs (a) ou (a') . Dans chacun des cas, le nombre d'intersections change de 2. Remarquons de plus les faits suivants :

- comme la droite d_C intersecte l'arc (a) en deux points, la droite d_C sépare le plan en deux demi-plans dont l'un contient la droite $d_{(a)}$, parallèle à d_C et tangente à l'arc (a) ;

- l'arc (a') appartient à ${}^c\omega_{(a)}(t_C, a_2)$; donc le demi-plan défini par d_C contenant $d_{(a)}$ contient aussi C' et $d_{(a')}$.

Finalement, dans le cas où la droite d appartient au secteur orienté $\text{sec}(t_C, a_2)$, le nombre d'intersections entre la droite d et la réunion des branches γ et γ' est résumé dans le tableau suivant.

Arcs	Nombre d'intersections relativement à la position de la droite translatée				
	d_C	$d_{(a)}$	$d_{(a')}$	$d_{C'}$	
(a)	1	2	0	0	0
(b)	0	1	1	1	1
(a')	0	0	0	2	1
(b')	1	1	1	1	0
Total	2	4	2	4	2

La droite d appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_2, CC')$. Une droite d appartenant au secteur orienté $\text{sec}(a_2, CC')$ n'est tangente à aucun des arcs de γ ou γ' (Propriété 5 des arcs convexes). Donc, lorsqu'on translate la droite d_C on peut seulement passer par l'un des cusps et le nombre d'intersections change de 2. Finalement, dans le cas où la droite d appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_2, CC')$, le nombre d'intersections entre la droite d et la réunion des branches γ et γ' est résumé dans le tableau suivant.

Arcs	Nombre d'intersections relativement à la position de la droite translatée		
	d_C	$d_{C'}$	
(a)	0	1	1
(b)	0	1	1
(a')	1	1	0
(b')	1	1	0
Total	2	4	2

La droite d appartient au secteur orienté $\text{sec}(CC', a_1)$. Une droite d appartenant au secteur orienté $\text{sec}(CC', a_1)$ n'est tangente à aucun des arcs de γ ou γ' (Propriété 5 des arcs convexes). Donc, lorsqu'on translate la droite d_C on peut seulement passer par l'un des cusps et le nombre d'intersections change de 2. Finalement, dans le cas où la droite d appartient au secteur orienté $\text{sec}(CC', a_1)$, le nombre d'intersections entre la droite d et la réunion des branches γ et γ' est résumé dans le tableau suivant, ce qui achève la preuve du Lemme 4.3.23.

Arcs	Nombre d'intersections relativement à la position de la droite translatée		
	d_C	$d_{C'}$	
(a)	1	0	0
(b)	1	0	0
(a')	0	0	1
(b')	0	0	1
Total	2	0	2

□

Corollaire de la Preuve. *Toute droite intersectant la réunion des branches γ et γ' en quatre points intersecte nécessairement l'arc (b') et l'arc (b) .*

À propos des profils de cusps et des paires de branches (1) et (1') ou (3) et (3'). Si l'on observe les profils des cusps, on remarque qu'ils appartiennent à la composante connexe définie par l'une des paires de branches (1) et (1') ou (3) et (3') qui contient l'origine. En fait, à symétrie près, ils ont tous la même forme que l'on peut représenter par la Figure 4.13; notons ici δ la branche (1) ou la branche (3). On remarque que la

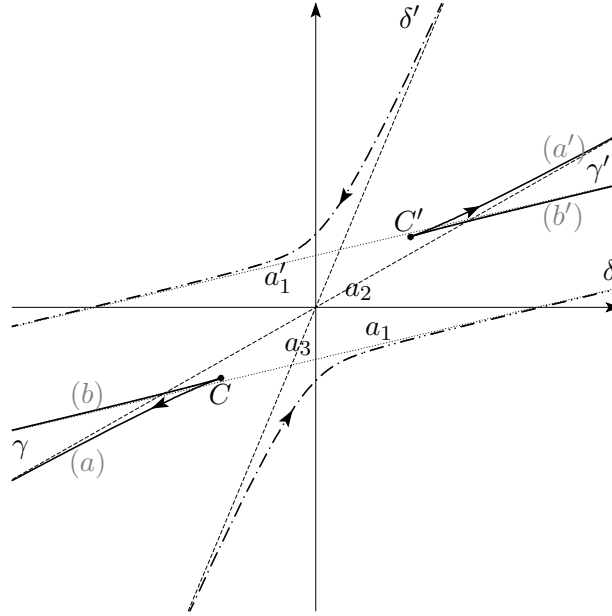


FIGURE 4.13 – Un couple de profils de cusp contenus dans la composante connexe définie par les branches δ et δ' qui contient l'origine.

paire de droites asymptotes des arcs (b) et (b') est aussi asymptote des arcs δ et δ' . L'autre asymptote de ces arcs peut être, suivant les cas, une droite passant par l'origine ou une paire de droites parallèles; nous noterons ici a_3 cette asymptote.

Remarque 4.3.25. La droite a_2 appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_1, a_3)$. Dans le cas contraire la branche γ n'aurait plus de cusp ordinaire (contradiction avec le Cor. 3.1.11).

Nous pouvons alors énoncer un dernier lemme à propos des tangentes aux cusps.

Lemme 4.3.26. *La tangente au cusp C n'intersecte pas les branches δ et δ' . Idem pour la tangente au cusp C' .*

PREUVE. Montrons tout d'abord que la tangente au cusp C n'intersecte pas la branche δ . Considérons pour cela l'arc (b) prolongé (de manière C^1) par la demi-droite tangente au cusp C et montrons que la courbe ainsi obtenue n'intersecte pas la branche δ .

La droite a_1 , en tant qu'asymptote de l'arc (b) et de la branche δ , sépare le plan en deux composantes connexes dont l'une contient l'arc (b) et l'autre la branche δ . Par convexité, l'arc (b) prolongé est entièrement contenu dans la composante connexe contenant (b) et, donc, il n'intersecte pas la branche δ .

Considérons maintenant l'arc (a) prolongé (de manière C^1) par cette même demi-droite tangente au cusp C . La demi-droite et l'arc (a) n'intersectent pas la branche δ . Donc, par convexité de (a) , la tangente au cusp C n'intersecte pas la branche δ .

Montrons maintenant que la tangente au cusp C n'intersecte pas la branche δ' . Considérons à nouveau l'arc (a) prolongé (de manière C^1) par cette même demi-droite tangente au cusp C . Par la Remarque 4.3.25, la droite a_2 appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_1, a_3)$ et, puisqu'elle passe par l'origine, elle sépare le plan en deux composantes connexes, l'une contenant la branche δ' et l'autre l'arc (a) ; par convexité de l'arc (a) , le prolongement de (a) est aussi contenu dans la composante connexe contenant (a) et donc il n'intersecte pas la branche δ' .

Considérons maintenant l'arc (b) toujours prolongé (de manière C^1) par cette même demi-droite tangente au cusp C . La demi-droite et l'arc (b) n'intersectent pas la branche δ' . Donc, par convexité de (b) , la tangente au cusp C n'intersecte pas la branche δ' , ce qui achève la preuve du Lemme 4.3.26. $\square$

Corollaire 4.3.27.

- (I) Une droite intersectant l'arc (a) en deux points n'intersecte pas la branche δ' .
- (II) Une droite intersectant l'arc (b) en deux points n'intersecte ni la branche δ ni la branche δ' .

PREUVE. (I) D'une part, par la Remarque 4.3.25, l'asymptote a_2 de l'arc (a) appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_1, a_3)$; de plus, comme elle passe par l'origine, elle sépare le plan en deux composantes connexes l'une contenant la branche δ' et l'autre l'arc (a) . D'autre part, par le Lemme 4.3.26, la tangente au cusp C n'intersecte pas la branche δ' . Par conséquent, la branche δ' est contenue dans ${}^c\omega_{(a)}(t_C, a_2)$ donc une droite intersectant l'arc (a) en deux points n'intersecte pas la branche δ' .

- (II) Pour commencer, montrons qu'une droite intersectant l'arc (b) en deux points n'intersecte pas la branche δ . D'une part, par le Lemme 4.3.26, la tangente au cusp C n'intersecte pas la branche δ' . D'autre part, l'asymptote a_1 de l'arc (b) sépare le plan en deux composantes connexes, l'une contenant la branche δ et l'autre l'arc (b) . Par conséquent, la branche δ est contenue dans ${}^c\omega_{(b)}(a_1, t_C)$ donc une droite intersectant l'arc (b) en deux points n'intersecte pas la branche δ .

Montrons maintenant qu'une droite intersectant l'arc (b) en deux points n'intersecte pas la branche δ' . Par convexité des arcs (b) et (b') , le point C appartient à la composante connexe du plan définie par la réunion des droites a_1 et a'_1 qui contient l'origine. Donc la droite a'_1 sépare le plan en deux composantes connexes, l'une contenant l'arc (b) et l'autre la branche δ' . Ainsi, la demi-droite $m_{(b)}$, parallèle à a_1 d'origine C n'intersecte pas δ' . Donc δ' est contenue dans ${}^c\omega_{(b)}(a_1, t_C)$ et une droite intersectant l'arc (b) en deux points n'intersecte pas la branche δ' . $\square$

Avant d'énoncer un dernier corollaire, remarquons que, par la Propriété 3 des arcs convexes (p.85), le secteur orienté $\text{sec}(t_C, a_2)$ auquel appartiennent les droites intersectant l'arc (a) en deux points est inclus dans le secteur $\text{sec}(a_1, a_3)$ auquel appartiennent les droites intersectant la branche δ en deux points. Autrement dit, une droite intersectant l'arc (a) en deux points peut intersecter la branche δ en zéro ou deux points. Énonçons alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite intersecte (a) et δ en deux points chacun.

Corollaire 4.3.28. *Il existe une droite intersectant l'arc (a) et la branche δ en deux points chacun si et seulement si la demi-droite $m_{(a)}$ intersecte δ en deux points distincts.*

PREUVE. Remarquons tout d'abord que a_2 appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_1, a_3)$; autrement dit, une parallèle à la droite a_2 intersecte la branche δ en zéro ou deux points. Remarquons de plus que la branche δ n'est pas contenue dans le domaine $\omega_{(a)}(t_C, a_2)$.

Supposons qu'il existe une droite intersectant simultanément l'arc (a) et la branche δ en deux points chacun. Comme le domaine $\omega_{(a)}(t_C, a_2)$ est l'union des droites intersectant l'arc (a) en deux points, l'intersection entre δ et $\omega_{(a)}(t_C, a_2)$ est non vide. Donc la branche δ intersecte les bords de $\omega_{(a)}(t_C, a_2)$. Par le Lemme 4.3.26 et le Corollaire 4.3.27(I), cette intersection ne peut avoir lieu que sur la demi-droite $m_{(a)}$. De plus, par convexité de la branche δ , le nombre de points d'intersections est deux.

Réciproquement, supposons maintenant que la demi-droite $m_{(a)}$ intersecte δ en deux points distincts, que l'on nomme I_1 et I_2 . Choisissons un point P sur l'arc $(I_1 I_2)$. La droite PC intersecte alors l'arc (a) en deux points. $\square$

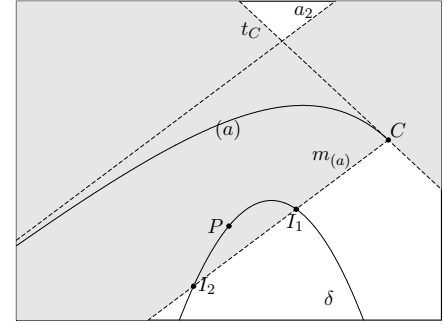


FIGURE 4.14 – Illustration du Corollaire 4.3.28

4.3.2.1 Cas où le point F est à l'extérieur des asymptotes

Théorème 4.3.29. *Lorsque le point F est à l'extérieur des asymptotes de l'hyperbole q , le nombre maximal de cercles passant par F et tangents à une droite et à l'hyperbole est 8.*

Rappelons que par *extérieur des asymptotes* nous désignons les deux composantes connexes définies par les asymptotes de l'hyperbole q qui ne contiennent pas l'hyperbole.

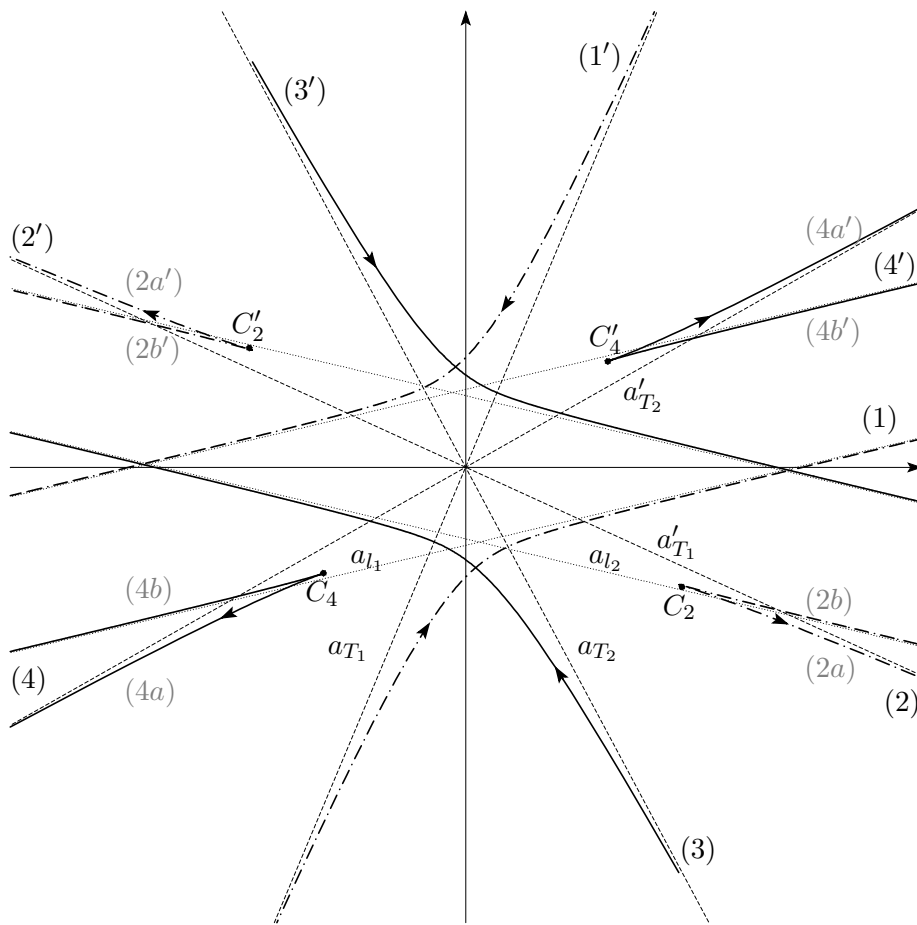
Sans perte de généralité, supposons que, avant d'appliquer la transformation $\sqrt{\cdot}$, le point F soit d'abscisse positive. Considérons les branches (1), (1'), (2), (2'), (3), (3'), (4) et (4') indiquées sur la Figure 4.15. Observons que les branches (2), (2'), (4) et (4') possèdent chacune un cusp. Nommons de plus a_{l_1} et a'_{l_1} , et a_{l_2} et a'_{l_2} les deux paires de droites asymptotes, images par $\sqrt{\cdot}$ des paraboles $\mathcal{P}_{l_1,F}$ et $\mathcal{P}_{l_2,F}$, ainsi que a_{T_1} et a'_{T_1} , et a_{T_2} et a'_{T_2} les asymptotes orthogonales des hyperboles équilatères images par $\sqrt{\cdot}$ des droites d_{T_1} et d_{T_2} (voir la Fig. 3.12, p.75).

Considérons la branche (2) privée de son cusp, noté C_2 ; nous obtenons ainsi deux arcs : l'arc $(2a)$, ayant pour asymptote la droite a'_{T_1} , et l'arc $(2b)$ ayant pour asymptote la droite a_{l_2} . De la même manière, la branche (4) privée de son cusp, noté C_4 , fournit l'arc $(4a)$, ayant pour asymptote la droite a'_{T_2} , et l'arc $(4b)$ ayant pour asymptote la droite a_{l_1} . Finalement, appelons $(2a')$, $(2b')$, $(4a')$ et $(4b')$ respectivement les images par symétrie centrale des arcs $(2a)$, $(2b)$, $(4a)$ et $(4b)$.

Pour démontrer le Théorème 4.3.29, l'idée est de séparer la courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ en quatre parties, suggérées par le Corollaire 4.3.7 et le Lemme 4.3.23, et d'étudier le nombre d'intersections d'une droite avec chacune d'entre elles. Énonçons alors une proposition que nous démontrerons par la suite.

Proposition 4.3.30.

- (I) *Si une droite possède quatre points d'intersection avec la réunion des branches (2) et (2') alors elle n'intersecte pas la réunion des branches (4) et (4').*
- (II) *Si une droite possède quatre points d'intersection avec la réunion des branches (4) et (4') alors elle n'intersecte pas la réunion des branches (2) et (2').*

FIGURE 4.15 – La courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ lorsque F est à l'extérieur des asymptotes

À l'aide du Corollaire 4.3.7, des Lemmes 4.3.20 et 4.3.23 et de la Proposition 4.3.30, nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 4.3.29.

PREUVE DU THÉORÈME 4.3.29. Montrons qu'une droite $\sqrt{\mathcal{P}}$ a au plus 8 intersections avec la courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$. Supposons que la droite $\sqrt{\mathcal{P}}$ n'est pas parallèle aux asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$. Par le Corollaire 4.3.7, nous avons deux cas possibles : soit la droite $\sqrt{\mathcal{P}}$ coupe la réunion des branches (1) et (1') en deux points, soit elle ne coupe aucune de ces deux branches. Le tableau suivant permet alors de conclure.

Branches	Nombre d'intersections					
	Corollaire 4.3.7					
$(1) \cup (1')$	2				0	
	Corollaire 4.3.7					
$(3) \cup (3')$	2			0		2 Lemme 4.3.20 et Cor. 4.3.7
	Lemme 4.3.23					
$(2) \cup (2')$	4	2	0	≤ 4 Lemme 4.3.23	0 par (i)	
$(4) \cup (4')$	0 Prop. 4.3.30(I)	≤ 2 Prop. 4.3.30(II)	≤ 4 Lemme 4.3.23	0 par (ii)		≤ 4 Lemme 4.3.23
Total	8	≤ 8	≤ 8	≤ 6		≤ 6

(i) Par la Remarque 4.3.9, les droites n'intersectant pas la réunion des branches (1)

et (1') sont contenues dans la composante connexe du plan définie par la réunion des branches (1) et (1') qui contient l'origine. Or, les branches (2) et (2') appartiennent aux deux autres composantes connexes. Donc, si une droite n'intersecte pas la réunion des branches (1) et (1'), elle n'intersecte ni la branche (2) ni la branche (2').

- (ii) Par le même raisonnement qu'en (i), une droite qui n'intersecte pas la réunion des branches (3) et (3') n'intersecte ni la branche (4) ni la branche (4').

Nous avons ainsi montré que, si le point F est à l'extérieur des asymptotes, une droite $\sqrt{\mathcal{P}}$ intersecte la transformée $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ en au plus 8 points. Pour achever la démonstration, il faut cependant montrer qu'une telle droite existe. Puisque la transformée $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ possède huit asymptotes, il suffit de prendre une droite suffisamment éloignée de l'origine pour qu'elle intersecte la transformée $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ en huit points. $\square$

Avant de démontrer la Proposition 4.3.30, commençons par une remarque sur la position relative des asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$.

Remarques 4.3.31. Quelques remarques sur la position relative des asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ et des droites t_{C_2} et t_{C_4} , tangentes aux cusps C_2 et C_4 respectivement :

- (i) par la Remarque 4.3.21, le secteur orienté $\text{sec}(a_{T_1}, a_{T_2})$ est inclus dans le secteur orienté $\text{sec}(a_{l_1}, a_{l_2})$,
- (ii) par la Remarque 4.3.25 appliquée aux branches (2), (2'), (3) et (3'), la droite a'_{T_1} appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_{T_2}, a_{l_2})$,
- (iii) par la Remarque 4.3.25 appliquée aux branches (4), (4'), (1) et (1'), la droite a'_{T_2} appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_{l_1}, a_{T_1})$,
- (iv) par convexité des arcs (2a) et (2b) d'asymptotes a'_{T_1} et a_{l_2} respectivement, la droite t_{C_2} appartient au secteur orienté $\text{sec}(a'_{T_1}, a_{l_2})$,
- (v) par convexité des arcs (4b) et (4a) d'asymptotes a_{l_1} et a'_{T_2} respectivement, la droite t_{C_4} appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_{l_1}, a'_{T_2})$.

En résumé, les asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ et les tangentes t_{C_2} et t_{C_4} sont disposées, à translation près, dans l'ordre donné dans la Figure 4.16.

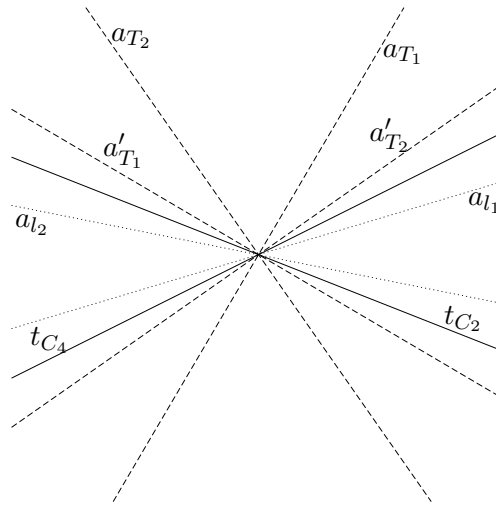


FIGURE 4.16 – La position relative des asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$

La Proposition 4.3.30 découle directement des deux lemmes suivants.

Lemme 4.3.32.

- (I) Toute droite intersectant la branche (2) en trois points (comptés avec multiplicité) n'intersecte ni la branche (4) ni la branche (4'). Idem pour une droite intersectant la branche (2') en trois points.
- (II) Toute droite intersectant la branche (4) en trois points (comptés avec multiplicité) n'intersecte ni la branche (2) ni la branche (2'). Idem pour une droite intersectant la branche (4') en trois points.

Lemme 4.3.33.

- (I) Toute droite intersectant la réunion des branches (2) et (2') en quatre points et la branche (2) en deux points (comptés avec multiplicité) n'intersecte ni la branche (4) ni la branche (4').
- (II) Toute droite intersectant la réunion des branches (4) et (4') en quatre points et la branche (4) en deux points (comptés avec multiplicité) n'intersecte ni la branche (2) ni la branche (2').

Démontrons alors les Lemmes 4.3.32 et 4.3.33.

PREUVE DU LEMME 4.3.32(I). Remarquons tout d'abord que la réunion des branches (3) et (3') sépare le plan en trois composantes connexes l'une contenant la réunion des branches (2) et (2') et les deux autres chacune des branches (4) et (4'). Donc, si une droite intersectant (2) ou (2') n'intersecte pas (3), alors elle n'intersecte pas (4) ; de même, si cette droite n'intersecte pas (3'), alors elle n'intersecte pas (4'). Récapitulons par ailleurs les résultats découlant du Corollaire 4.3.27 dans le tableau suivant.

	Nombre d'intersections	
(2a)	2	1
(2b)	1	2
(4)	?	0 Corollaire
(4')	0 Corollaire 4.3.27(I)	0 4.3.27(II)

} Hypothèses

Pour terminer la preuve du Lemme, il suffit alors de montrer qu'une droite intersectant l'arc (2a) en deux points n'intersecte pas la branche (4).

Supposons par l'absurde qu'il existe une droite d intersectant l'arc (2a) en deux points et intersectant aussi la branche (4). Alors cette droite intersecte la branche (3). Puisque cette droite d intersecte (2a) en deux points, elle appartient au secteur orienté $\text{sec}(a'_{T_1}, t_{C_2})$. Par les Remarques 4.3.31, le secteur $\text{sec}(a'_{T_1}, t_{C_2})$ est inclus dans le secteur orienté $\text{sec}(a_{T_2}, a_{l_2})$ qui contient les droites intersectant (3) en deux points ; donc la droite d intersecte (3) en deux points, que l'on nomme I_1 et I_2 . Par convexité de (3), le segment $[I_1 I_2]$ appartient à la composante connexe définie par (3) qui contient la branche (4).

Nous avons ainsi une droite d intersectant l'arc (2) et la branche (3) en deux points chacun, donc, par le Corollaire 4.3.28, il existe deux points d'intersection entre la demi-droite $m_{(2a)}$ et la branche (3), que l'on note I_1^0 et I_2^0 . Par convexité de (3) et par définition de $m_{(2a)}$, le segment $[I_1 I_2]$ est contenu dans la partie bornée du plan définie par la branche (3) et le segment $[I_1^0 I_2^0]$ (voir Fig. 4.17).

La branche (1) sépare le plan en deux composantes connexes, dont l'une contient la branche (4) et l'autre la branche (2). Comme a'_{T_1} , l'asymptote de (2a) parallèle à $m_{(2a)}$, appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_{T_1}, a_{l_1})$, elle intersecte la branche (1) en un point. Cependant, comme la branche (2) n'intersecte pas la branche (1), la demi-droite $m_{(2a)}$ n'intersecte

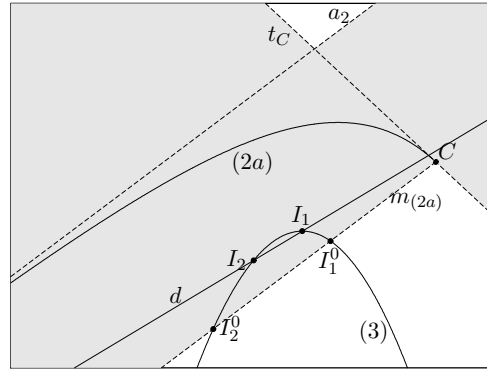


FIGURE 4.17 – Idée de la Preuve du Lemme 4.3.32(I)

pas la branche (1) non plus. Donc $m_{(2a)}$, et en particulier le segment $[I_1^0 I_2^0]$, appartient à la composante connexe définie par (1) qui ne contient pas (4) et il en va de même pour le segment $[I_1 I_2]$ qui ne peut donc pas intersecter la branche (4), ce qui achève la preuve de 4.3.32(I).

La preuve de 4.3.32(II) est analogue. $\square$

Pour démontrer le Lemme 4.3.33, nous avons besoin de l'assertion suivante.

Assertion 4.8.

- (I) La droite passant par les deux cusps C_2 et C'_2 ne coupe pas les branches (4) et (4').
- (II) La droite passant par les deux cusps C_4 et C'_4 ne coupe pas les branches (2) et (2').

PREUVE DE 4.8(I). Appelons B le point d'intersection entre les branches (1) et (3) et B' le point d'intersection entre les branches (1') et (3'); remarquons que B' est l'image de B par symétrie centrale de centre l'origine. Considérons la droite BB' passant par ces deux points. Puisque les branches (2) et (4) n'intersectent ni (1) ni (3), les branches (1) et (3) définissent quatre composantes connexes telles que l'une contient la branche (4) et celle opposée par B à cette dernière contient la branche (2). Par construction, la droite BB' est contenue dans les deux composantes connexes qui ne contiennent pas les branches (2) et (4). De même, la droite BB' est contenue dans les deux composantes connexes définies par (1') et (3') qui ne contiennent pas les branches (2') et (4').

Par convexité des arcs (2a) et (2a'), la droite passant par les cusps C_2 et C'_2 est contenue dans le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(a'_{T_1}, BB')$ où a'_{T_1} est l'asymptote commune des arcs (2a) et (2a'). Comme l'asymptote a'_{T_1} ne coupe ni la branche (4) ni la branche (4') et que la droite BB' non plus, la droite passant par les deux cusps C_2 et C'_2 ne coupe pas les branches (4) et (4').

La preuve de 4.8(II) est analogue. $\square$

PREUVE DU LEMME 4.3.33(I). Soit d_{C_2} une droite passant par le cusp C_2 et intersectant la branche (2') en deux points; cette droite est alors contenue dans le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(C_2 a'_{T_1}, C_2 C'_2)$ où $C_2 a'_{T_1}$ est la parallèle à la droite a'_{T_1} passant par C_2 . Or, par l'Assertion 4.8(I), la droite $C_2 C'_2$ n'intersecte pas la réunion des branches (4) et (4'). De plus, on a montré dans la preuve du Lemme 4.3.32, que la parallèle à la droite a'_{T_1} passant par le cusp C_2 n'intersecte pas la branche (4); comme cette parallèle appartient à la composante connexe du plan définie par a'_{T_1} qui contient l'arc (2a) est pas la branche (4'), la droite $C_2 a'_{T_1}$ n'intersecte pas la branche (4'). Donc la droite d_{C_2} n'intersecte ni (4) ni (4').

La droite d_{C_2} passant par le cusp C_2 sépare le plan en deux composantes connexes dont l'une contient la branche (2); translatons la droite d_{C_2} dans cette composante connexe jusqu'à ce qu'elle passe par le cusp C'_2 et renommons-là $d_{C'_2}$. Par les mêmes arguments, la droite $d_{C'_2}$ n'intersecte pas la réunion des branches (4) et (4') et il en va de même pour toutes les droites parallèles à $d_{C'_2}$ comprises entre d_{C_2} et $d_{C'_2}$. Les autres parallèles n'intersectent pas la réunion des arcs (2) et (2') en quatre points.

La preuve de 4.3.33(II) est analogue. $\square$

Remarque 4.3.34. Par la Remarque 3.2.1, lorsque le point F appartient à l'une des asymptotes de q , la transformée $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ ne possède qu'une seule paire de profils de cusp. Donc le nombre maximal de cercles tangents à une droite et une hyperbole q et passant par un point F appartenant à une asymptote de q est aussi d'au plus huit.

4.3.2.2 Cas où le point F est à l'intérieur des asymptotes

Théorème 4.3.35. *Lorsque le point F est à l'extérieur de l'hyperbole q et à l'intérieur des asymptotes, le nombre maximal de cercles passant par F et tangents à une droite et à l'hyperbole est 10.*

Rappelons que par *intérieur des asymptotes* nous désignons les deux composantes connexes définies par les asymptotes de l'hyperbole q qui contiennent l'hyperbole.

Remarque 4.3.36. La différence fondamentale avec le cas où le point F est à l'extérieur des asymptotes réside dans le fait que les branches (2), (2'), (4) et (4') appartiennent cette fois à la même composante connexe définie par la réunion des branches (1) et (1'). Ainsi, suivant la position du point F , une droite peut intersecter simultanément les quatre branches (2), (2'), (4) et (4'), ce qui, par la Proposition 4.3.30, est impossible dans le cas où le point F est à l'extérieur des asymptotes.

Sans perte de généralité, supposons que, avant d'appliquer la transformation $\sqrt{\cdot}$, le point F soit d'abscisse positive. Considérons les branches (1), (1'), (2), (2'), (3), (3'), (4) et (4') indiquées sur la Figure 4.18. Observons que les branches (2), (2'), (4) et (4') possèdent chacune un cusp. Nommons de plus a_{l_1} et a'_{l_1} , et a_{l_2} et a'_{l_2} les deux paires de droites asymptotes, images par $\sqrt{\cdot}$ des paraboles $\mathcal{P}_{l_1,F}$ et $\mathcal{P}_{l_2,F}$, ainsi que a_{T_1} et a'_{T_1} , et a_{T_2} et a'_{T_2} les asymptotes des hyperboles équilatères images par $\sqrt{\cdot}$ des droites d_{T_1} et d_{T_2} (voir la Fig. 3.13, p.77).

Considérons la branche (2) privée de son cusp, noté C_2 ; nous obtenons ainsi deux arcs : l'arc (2a), d'asymptote la droite a_{T_1} , et l'arc (2b), d'asymptote la droite a_{l_2} . De la même manière, la branche (4) privée de son cusp, noté C_4 , fournit l'arc (4a), d'asymptote la droite a'_{T_2} , et l'arc (4b) d'asymptote la droite a_{l_1} . Finalement, appelons (2a'), (2b'), (4a') et (4b') respectivement les images par symétrie centrale des arcs (2a), (2b), (4a) et (4b).

Pour démontrer le Théorème 4.3.35, nous avons besoin de la proposition suivante que nous démontrerons par la suite.

Proposition 4.3.37. *Une droite non parallèle aux asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ et intersectant simultanément les branches (2) et (2') en quatre points et les branches (4) et (4') en quatre points n'intersecte pas la réunion de branches (1) et (1').*

À l'aide de la Proposition 4.3.37 et des Lemmes 4.3.20 et 4.3.23 nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 4.3.35.

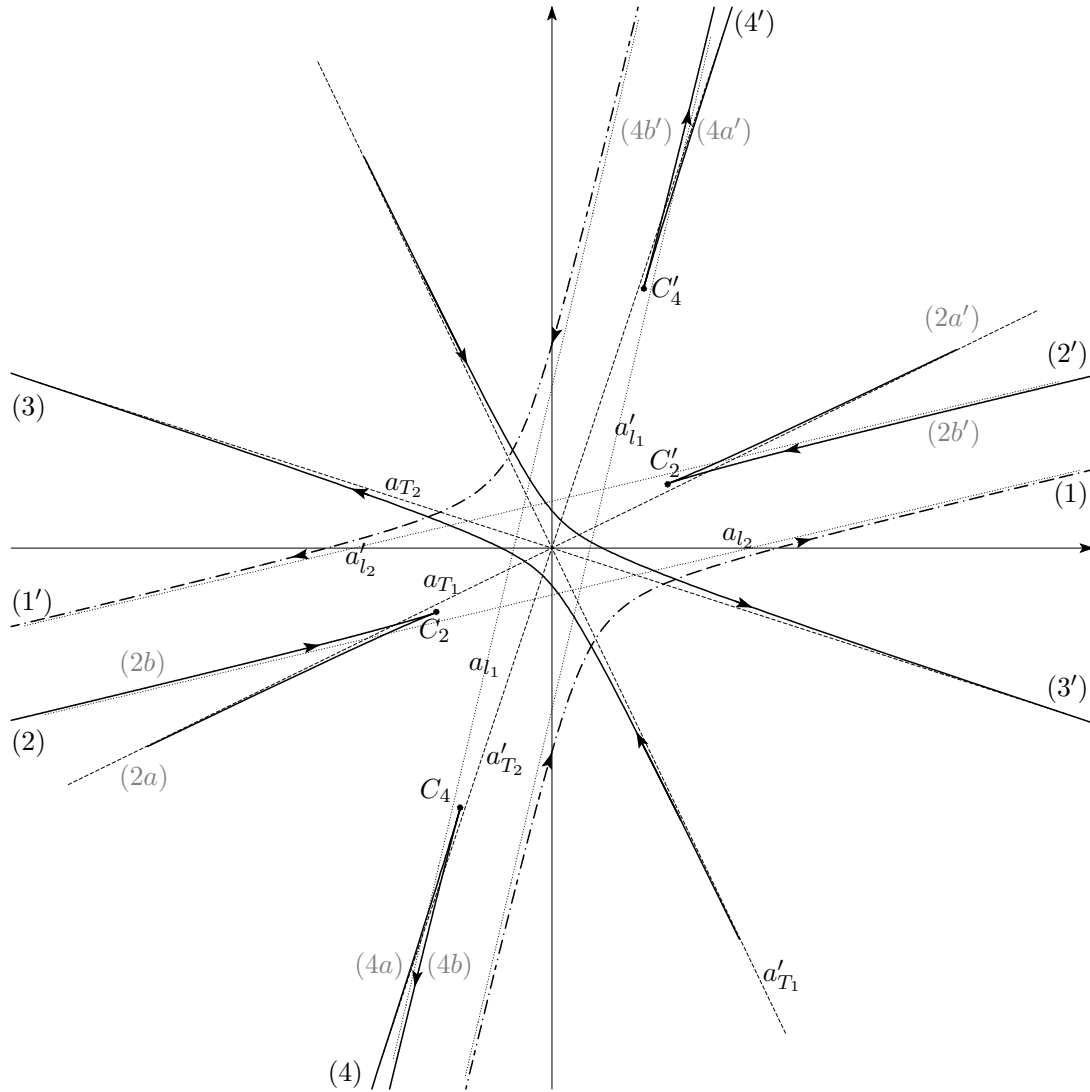


FIGURE 4.18 – La courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ lorsque F est à l'intérieur des asymptotes à l'extérieur de q

PREUVE DU THÉORÈME 4.3.35. Montrons qu'une droite $\sqrt{\mathcal{P}}$ a au plus 10 intersections avec la courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$. Supposons que la droite $\sqrt{\mathcal{P}}$ n'est pas parallèle aux asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$. Par le Lemme 4.3.23, la droite $\sqrt{\mathcal{P}}$ coupe la réunion des branche (2) et (2') en zéro, deux ou quatre points. Le tableau suivant permet alors de conclure.

	Nombre d'intersections					
	Lemme 4.3.23					
(2) $\cup$ (2')	4			2		0
(4) $\cup$ (4')	4	≤ 2		≤ 4	Lemme 4.3.23	≤ 4 Lemme 4.3.23
(1) $\cup$ (1')	0	Prop. 4.3.37	≤ 4	Lemme 4.3.20	≤ 4	Lemme 4.3.20
(3) $\cup$ (3')	2	Lemme 4.3.20 et Cor. 4.3.7	≤ 4	Lemme 4.3.20	≤ 4	Lemme 4.3.20
Total	10		≤ 10		≤ 10	≤ 8

Nous avons ainsi montré qu'une droite peut intersecter la transformée $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ en au plus

10 points. Pour achever la démonstration, il faut cependant montrer qu'une telle droite existe; la Figure B.5 (p.148) montre un choix de point F pour lequel la courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ associée fournit 10 intersections avec une droite $\sqrt{\mathcal{P}}$. L'idée est de trouver une position du point F telle qu'il existe une droite qui intersecte chaque profil de cusp en deux points (voir Fig. 4.19). $\square$

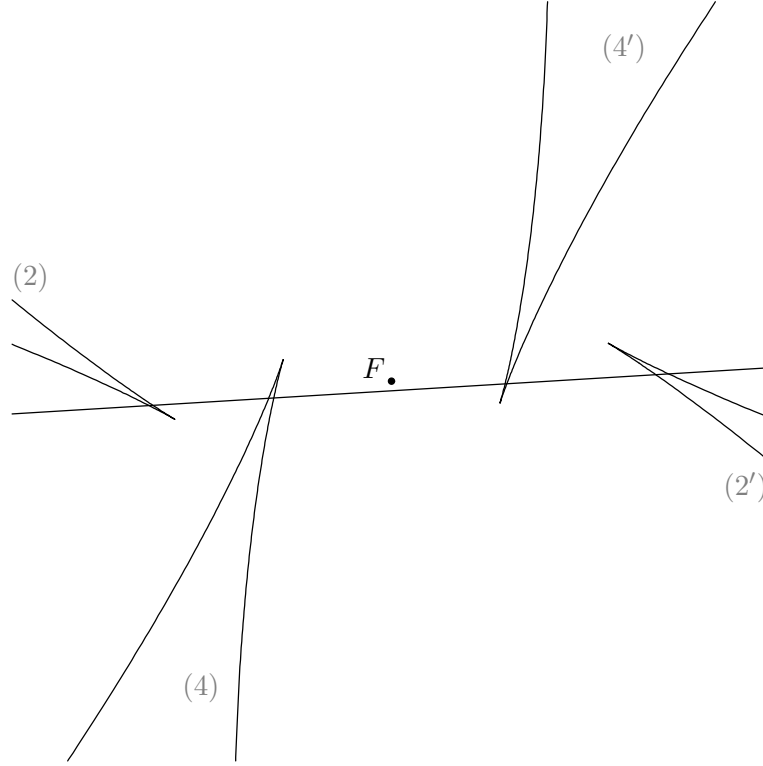


FIGURE 4.19 – Esquisse d'une droite qui intersecte chaque profil de cusp en deux points

Avant de démontrer la Proposition 4.3.37, commençons par quelques remarques sur la position relative des asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$.

Remarques 4.3.38. Quelques remarques sur la position relative des asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ et des droites t_{C_2} et t_{C_4} , tangentes aux cusps C_2 et C_4 respectivement :

- (i) par la Remarque 4.3.21, le secteur orienté $\text{sec}(a_{l_1}, a'_{T_1})$ est inclus dans le secteur orienté $\text{sec}(a_{l_2}, a_{T_2})$,
- (ii) par la Remarque 4.3.25 appliquée aux branches (2), (2'), (1) et (1'), la droite a_{T_1} appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_{l_2}, a_{l_1})$,
- (iii) par la Remarque 4.3.25 appliquée aux branches (4), (4'), (1) et (1'), la droite a'_{T_2} appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_{l_2}, a_{l_1})$,
- (iv) le secteur orienté $\text{sec}(a_{T_1}, a'_{T_2})$ est inclus dans le secteur orienté $\text{sec}(a_{l_2}, a_{l_1})$, sinon les branches (2) et (4) auraient un point d'intersection,
- (v) par convexité des arcs (2b) et (2a) d'asymptotes a'_{l_2} et a_{T_1} respectivement, la droite t_{C_2} appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_{l_2}, a_{T_1})$,
- (vi) par convexité des arcs (4a) et (4b) d'asymptotes a'_{T_2} et a_{l_1} respectivement, la droite t_{C_4} appartient au secteur orienté $\text{sec}(a'_{T_2}, a_{l_1})$.

En résumé, les asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ et les tangentes t_{C_2} et t_{C_4} sont disposées, à translation près, dans l'ordre donné dans la Figure 4.20.

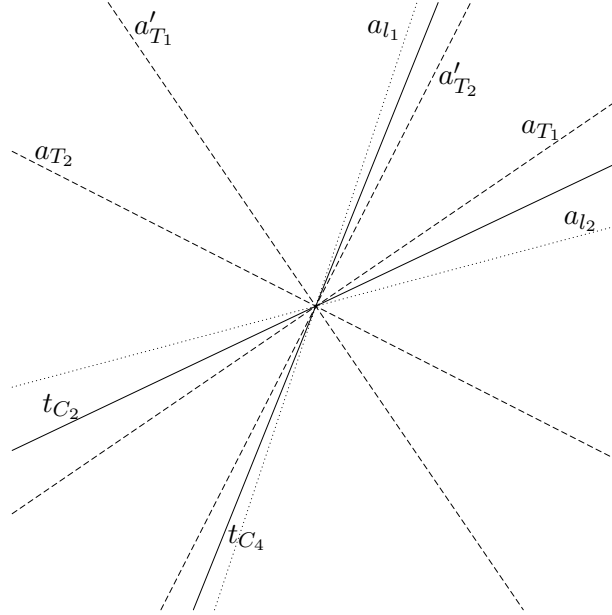


FIGURE 4.20 – La position relative des asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$

Pour démontrer la Proposition 4.3.37, nous avons besoin de deux lemmes et d'un corollaire ; mais remarquons auparavant les faits suivants.

Assertion 4.9.

- (I) Toute droite intersectant la branche (1) en deux points intersecte la réunion des branches (2) et (2') en au plus deux points. Idem pour (1').
- (II) Toute droite intersectant la branche (1) en deux points intersecte la réunion des branches (4) et (4') en au plus deux points. Idem pour (1').

PREUVE DE 4.9(I). Remarquons tout d'abord que les arcs (2b) et (4b'), d'asymptotes a_{l_2} et a'_{l_1} respectivement, sont contenus dans ${}^c\omega_{(1)}(a_{l_2}, a'_{l_1})$.

Une droite intersectant la réunion des branches (2) et (2') en quatre points intersecte nécessairement l'arc (2b) en au moins un point. Comme cet arc est contenu dans ${}^c\omega_{(1)}(a_{l_2}, a_{l_1})$, une droite intersectant (1) en deux points ne peut pas intersecter aussi (2b).

La preuve de 4.9(II) est analogue. □

Lemme 4.3.39.

- (I) Une droite intersectant la branche (2) en trois points (comptés avec multiplicité) n'intersecte pas la réunion des branches (1) et (1'). Idem pour la branche (2').
- (II) Une droite intersectant la branche (4) en trois points (comptés avec multiplicité) n'intersecte pas la réunion des branches (1) et (1'). Idem pour la branche (4').

Lemme 4.3.40. Soit une droite intersectant simultanément les branches (2), (2'), (4) et (4') en deux points chacune, alors on est dans l'un des deux cas suivants :

- (i) la droite $C_2C'_2$ appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_{T_1}, a_{l_1})$,
- (ii) la droite $C_4C'_4$ appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_{l_2}, a'_{T_2})$.

Corollaire 4.3.41. *Une droite intersectant simultanément les branches (2), (2'), (4) et (4') en deux points chacune n'intersecte pas la réunion des branches (1) et (1').*

La preuve de la Proposition 4.3.37 découle alors directement du Lemme 4.3.39 et du Corollaire 4.3.41.

PREUVE DU LEMME 4.3.39(I). Il s'agit de montrer que si une droite intersecte l'arc (2a) en deux points alors elle n'intersecte pas la branche (1) en deux points, les autres cas étant traités par le Corollaire 4.3.27.

Rappelons que, une droite intersectant l'arc (2a) en deux points coupe nécessairement l'arc (2b). Cependant, l'arc (2b) appartient à ${}^c\omega_{(1)}(a_{l_2}, a'_{l_1})$; donc toute droite intersectant la branche (1) en deux points n'intersecte pas l'arc (2b). Ainsi, une droite ne peut pas couper simultanément l'arc (2a) et la branche (1) en deux points chacun.

La preuve de 4.3.39(II) est analogue. $\square$

PREUVE DU LEMME 4.3.40. Soit d une droite intersectant simultanément les branches (2), (2'), (4) et (4') en deux points chacune et translatons-là jusqu'à ce qu'elle passe par l'un des quatre cusps. Comme cette droite n'intersecte aucun arc convexe en deux points, par la Remarque 4.3.1, cette translation ne changera pas le nombre d'intersections entre la droite et les quatre branches. Supposons que le premier cusp rencontré soit C_2 et appelons d_{C_2} cette droite par C_2 .

Puisque d_{C_2} intersecte la branche (2') en au moins un point, cette droite est incluse dans le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(C_2a_{l_2}, C_2C'_2)$, où $C_2a_{l_2}$ est la droite parallèle à a_{l_2} passant par C_2 . Comme la droite d_{C_2} intersecte la branche (4'), l'intersection entre ce secteur orienté est non vide; en particulier la droite $C_2C'_2$ intersecte (4').

Nous avons montré dans la preuve de l'Assertion 4.8, que la droite $C_2C'_2$ est contenue dans le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(a_{T_1}, BB')$, où BB' est la droite passant par le point d'intersection B entre les branches (1) et (3) et par B' , son image par symétrie centrale. Remarquons que le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(a_{T_1}, BB')$ est la réunion des secteurs orientés $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(a_{t_1}, Oa_{l_1})$ et $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(Oa_{l_1}, BB')$, où la droite Oa_{l_1} est la parallèle à a_{l_1} passant par l'origine; en effet, la droite BB' intersecte les branches (1) et (1'), donc elle appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_{l_1}, a_{l_2})$ (Propriété 5 des arcs convexes).

Cependant, une droite contenue dans le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(Oa_{l_1}, BB')$ n'intersecte ni (4a) ni (4a'), puisque, par les Remarques 4.3.38, la droite a'_{T_2} asymptote de (4a) et (4a') passant par l'origine, n'appartient pas au secteur orienté $\text{sec}(a_{l_1}, a_{l_2})$. Donc la droite $C_2C'_2$ appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_{T_1}, a_{l_1})$.

Dans le cas où le premier cusp rencontré est le cusp C_4 , par les mêmes arguments on montre que la droite $C_4C'_4$ appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_{l_2}, a'_{T_2})$, ce qui achève la preuve. $\square$

PREUVE DU COROLLAIRE 4.3.41. Une droite intersectant les branches (2) et (2') en deux points chacune appartient au secteur orienté $\text{sec}(a_{l_2}, C_2C'_2)$. Or, par le Lemme 4.3.40, pour que cette droite intersecte aussi les branches (4) et (4'), elle doit appartenir au secteur orienté $\text{sec}(a_{l_2}, a_{l_1})$. Par la Propriété 3 des arcs convexes, une droite appartenant au secteur orienté $\text{sec}(a_{l_2}, a_{l_1})$ intersecte la branche (1) (ou (1')) en zéro ou deux points. Or, par l'Assertion 4.9(I), une droite intersectant (1) (ou (1')) en deux points ne peut pas intersecter la réunion des branches (2) et (2') en quatre points. Donc, une droite intersectant simultanément les branches (2), (2'), (4) et (4') en deux points chacune n'intersecte pas la réunion des branches (1) et (1'). $\square$

4.3.3 Conclusion

Avec les Théorèmes 4.3.10, 4.3.13, 4.3.29 et 4.3.35, nous avons montré que le nombre maximal de cercles tangents à une hyperbole, une droite et passant par un point F est 10 et que ce maximum est obtenu lorsque le point F est à l'extérieur de l'hyperbole mais à l'intérieur de ses asymptotes. Pour parvenir à ce résultat, nous avons montré qu'une droite peut intersecter la transformée $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ en au plus 10 points et la Figure B.5 (p.148) montre une telle droite. Dans le Chapitre 5, nous donnons une construction explicite d'une configuration maximale.

Chapitre 5

Construction d'une configuration maximale

Dans le présent chapitre, nous construisons explicitement une configuration maximale. Nous reprenons pour cela les notations introduites dans le Chapitre 3. Nous avons vu dans le Chapitre 4 que le nombre maximal de cercles passant par un point et tangents à une droite et à une hyperbole est d'au plus 10 et nous avons montré qu'une configuration maximale peut s'obtenir lorsque le point F est à l'extérieur de l'hyperbole mais à l'intérieur des asymptotes et que la parabole $\mathcal{P}_{d,F}$ correspondant au lieu des centres des cercles passant par le point F et tangents à la droite d , intersecte les deux profils des cusps de la courbe $\mathcal{S}_F$. Pour réaliser cela, l'idée est de se placer dans le cas où il existe une droite passant par le point F et par les deux cusps de $\mathcal{S}_F$; en perturbant cette configuration, nous obtiendrons une configuration maximale. Puisque les cusps sont les centres des cercles osculateurs à l'hyperbole q et passant par le point F , il faut donc trouver deux cercles osculateurs à q tangents entre eux ; nous choisirons alors le point F comme le point de tangence.

Nous commençons par montrer trois résultats importants pour la construction qui sera donnée dans la Section 5.2. Le premier montre l'existence de cercles osculateurs à q tangents entre eux. Le deuxième précise la position relative du profil d'un cusp par rapport à la développée $\mathcal{L}_q$ de l'hyperbole q , tandis que le dernier décrit la position relative des deux profils des cusps de $\mathcal{S}_{q,F}$ dans le cas où les deux cercles osculateurs correspondants sont tangents entre eux.

5.1 Résultats préliminaires

Pour alléger la notation, la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ sera notée $\mathcal{S}_F$ et nous omettrons d'écrire qu'elle est relative à l'hyperbole q .

5.1.1 À propos des cercles osculateurs tangents entre eux

Lemme 5.1.1. *Soit un cercle $\mathcal{C}_0$ osculateur à l'hyperbole q mais non hyperosculateur, alors il existe exactement deux cercles osculateurs à l'hyperbole q tangents au cercle $\mathcal{C}_0$:*

- le premier cercle est contenu dans $\mathcal{C}_0$,
- le second cercle est à l'extérieur de $\mathcal{C}_0$ et
 - contient $\mathcal{C}_0$ lorsque $\mathcal{C}_0$ n'intersecte pas les asymptotes de l'hyperbole q ,
 - ne contient pas $\mathcal{C}_0$ et est osculateur à l'autre branche d'hyperbole lorsque $\mathcal{C}_0$ intersecte une asymptote de l'hyperbole q .

De plus, les points de tangence entre les cercles osculateurs se trouvent à l'extérieur de l'hyperbole q .

La Figure 5.1 illustre le Lemme 5.1.1 ; on a également représenté le lieu des points de tangence entre deux cercles osculateurs à l'hyperbole q . On rappelle que les asymptotes l_1 et l_2 de l'hyperbole q peuvent être considérées comme des cercles osculateurs à q à l'infini (Rem. 3.1.9).

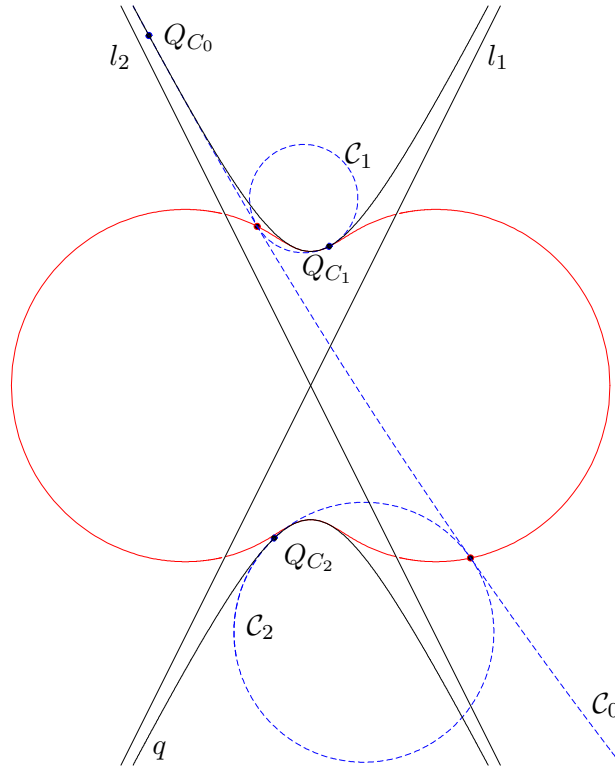


FIGURE 5.1 – Le lieu des points de tangence entre deux cercles osculateurs et deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ osculateurs en Q_{C_1} et Q_{C_2} à l'hyperbole et tangents au cercle osculateur $\mathcal{C}_0$ donné

PREUVE DU LEMME 5.1.1. Montrons tout d'abord l'existence des deux cercles osculateurs tangents à un cercle osculateur donné. Considérons la paramétrisation $\lambda(t)$ de la développée $\mathcal{L}_q$ de l'hyperbole q définie en (3.11). Supposons que le cercle $\mathcal{C}_0$ soit osculateur à la branche q^+ de l'hyperbole et que son centre $\lambda(t_0)$, soit d'abscisse positive.

Puisque les cercles osculateurs à un même quart d'hyperbole sont contenus les uns dans les autres et recouvrent le demi-plan délimité par l'asymptote du quart d'hyperbole, à l'exception de l'intérieur du cercle hyperosculateur (Corollaire 3.1.7), les cercles osculateurs à q qui intersectent le cercle $\mathcal{C}_0$ sont nécessairement soit osculateurs à la branche q^+ et leur centre est d'abscisse négative, soit osculateurs à la branche q^- et leur centre est d'abscisse positive ; cette deuxième possibilité apparaît lorsque le cercle $\mathcal{C}_0$ intersecte l'asymptote l_1 de l'hyperbole q et possède ainsi une intersection avec le demi-plan défini par l'asymptote l_1 qui contient la branche q^- de l'hyperbole.

Cas où le cercle $\mathcal{C}_0$ n'intersecte pas l'asymptote l_1 . Supposons que le cercle $\mathcal{C}_0$ n'intersecte pas l'asymptote l_1 . Soit $t_{h+} \in \mathbb{R}$ tel que le point $\lambda(t_{h+})$ soit le centre du cercle hyperosculateur à la branche q^+ de l'hyperbole et choisissons le sens de la paramétrisation $\lambda(t)$ de la développée $\mathcal{L}_q$ telle que, pour tout $t \in]t_{h+}, \infty[$, le point $\lambda(t)$ soit d'abscisse

négative et d'ordonnée positive. Considérons alors les deux fonctions scalaires τ_+ et τ_- définies par

$$\begin{aligned} \tau_+ :]t_{h+}, \infty[&\rightarrow \mathbb{R} & \tau_- :]t_{h+}, \infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \|\lambda(t_0) - \lambda(t)\| + r(t) & t &\mapsto r(t) - \|\lambda(t_0) - \lambda(t)\| \end{aligned}$$

où $r(t)$ est le rayon du cercle osculateur de centre $\lambda(t)$. Soit $r(t_0)$ le rayon du cercle $\mathcal{C}_0$. Le cercle osculateur à q de centre $\lambda(t)$ est tangent à $\mathcal{C}_0$ si et seulement si

- (1) $\tau_+(t) = r(t_0)$, dans ce cas le cercle osculateur de centre $\lambda(t)$ est tangent à $\mathcal{C}_0$ et est contenu dans $\mathcal{C}_0$
- (2) ou bien $\tau_-(t) = r(t_0)$, dans ce cas le cercle osculateur de centre $\lambda(t)$ est tangent à $\mathcal{C}_0$ et contient $\mathcal{C}_0$.

Il s'agit donc de montrer que deux tels t existent et sont uniques.

D'une part, puisque les cercles osculateurs sont contenus les uns dans les autres, les fonctions τ_+ et τ_- sont strictement croissantes, de plus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_+(t) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tau_-(t) = d(\lambda(t_0), l_1)$$

où $d(\lambda(t_0), l_1)$ est la distance entre le centre $\lambda(t_0)$ et la droite l_1 . D'autre part, comme le cercle $\mathcal{C}_0$ contient ce cercle hyperosculateur, on a

$$\lim_{t \rightarrow t_{h+}} \tau_+(t) < r(t_0) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_{h+}} \tau_-(t) < r(t_0).$$

De plus, comme le cercle $\mathcal{C}_0$ n'intersecte pas l'asymptote l_1 , on a

$$r(t_0) < d(\lambda(t_0), l_1). \quad (5.1)$$

Donc, par continuité de τ_+ et τ_- , il existe $t_+, t_- \in \mathbb{R}$ uniques tels que $\lambda(t_+)$ et $\lambda(t_-)$ sont d'abscisse négative et $\tau_+(t_+) = r(t_0)$ et $\tau_-(t_-) = r(t_0)$; autrement dit, il existe un cercle osculateur à q tangent à $\mathcal{C}_0$ et contenu dans $\mathcal{C}_0$ et, lorsque le cercle $\mathcal{C}_0$ n'intersecte pas d'asymptotes, il existe un cercle osculateur tangent à $\mathcal{C}_0$ contenant $\mathcal{C}_0$.

Cas où le cercle $\mathcal{C}_0$ intersecte l'asymptote l_1 . Dans le cas où le cercle $\mathcal{C}_0$ intersecte l'asymptote l_1 , l'inégalité (5.1) n'est plus vérifiée; il n'existe donc pas de t tel que $\tau_-(t) = r(t_0)$. Il faut donc considérer les cercles osculateurs à la branche q^- dont le centre est d'abscisse positive. Soit alors $t_{h-} \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda(t_{h-})$ est le centre du cercle hyperosculateur à la branche q^- de l'hyperbole. Avec le sens de la paramétrisation $\lambda(t)$ choisi précédemment, pour tout $t \in]-\infty, t_{h-}[$, le point $\lambda(t)$ est d'abscisse positive et d'ordonnée négative. Considérons alors la fonction scalaire τ_{q^-} définie par

$$\begin{aligned} \tau_{q^-} :]-\infty, t_{h-}[&\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \|\lambda(t_0) - \lambda(t)\| + r(t) \end{aligned}$$

Rappelons que le rayon $r(t)$ a été défini comme une longueur signée dont le signe dépend du signe de la courbure de q , donc ici $r(t) < 0$. La fonction $\tau_{q^-}(t)$ est strictement croissante et

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \tau_{q^-}(t) = d(\lambda(t_0), l_1).$$

D'une part, puisque le cercle hyperosculateur à la branche q^- appartient au demi-plan défini par l'asymptote l_2 qui ne contient pas le cercle $\mathcal{C}_0$ (Cor. 3.1.7), on a

$$\lim_{t \rightarrow t_{h-}} \tau_{q^-}(t) > r(t_0).$$

D'autre part, comme le cercle $\mathcal{C}_0$ intersecte l'asymptote l_1 par hypothèse, on a

$$r(t_0) > d(\lambda(t_0), l_1) .$$

Donc, il existe $t_- \in]-\infty, t_{h-}[$ tel que $\lambda(t_-)$ soit d'abscisse positive et d'ordonnée négative et que $\tau_{q^-}(t) = r(t_0)$; autrement dit, lorsque le cercle $\mathcal{C}_0$ intersecte l'asymptote l_1 , il existe un cercle osculateur à la branche q^- tangent à $\mathcal{C}_0$ et situé à l'extérieur de $\mathcal{C}_0$.

Il reste à montrer que le point de tangence entre deux cercles osculateurs se situe à l'extérieur de l'hyperbole. Commençons par remarquer trois faits.

Assertion 5.1. *Il existe au moins un point de tangence entre deux cercles osculateurs qui est à l'extérieur de l'hyperbole.*

En effet, soit $\mathcal{C}$ un cercle osculateur à q tangent à une asymptote de q . Puisque les asymptotes de q peuvent être vues comme des cercles osculateurs à l'infini (Rem. 3.1.9), le point de tangence entre $\mathcal{C}$ et une asymptote peut être vu comme le point de tangence entre deux cercles osculateurs. Comme ce point est sur une asymptote, il est à l'extérieur de l'hyperbole. $\square$

Assertion 5.2. *Le point de tangence entre deux cercles osculateurs tangents distincts n'appartient pas à l'hyperbole.*

Par le Théorème de Bézout, le nombre d'intersections complexes entre un cercle et une conique, compté avec multiplicité, est de quatre. Donc un cercle osculateur possède exactement deux points d'intersection réels avec l'hyperbole : le point d'osculation (multiplicité 3) et un point d'intersection de multiplicité exactement 1. Cette dernière intersection est donc réelle et transverse à l'hyperbole.

Supposons par l'absurde qu'il existe deux cercles osculateurs $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ dont le point de tangence T appartient à l'hyperbole q . Par tout point du plan à l'exception de l'intérieur des deux cercles hyperosculateurs passent exactement deux cercles osculateurs. Si T appartient à q , l'un des deux cercles osculateurs passant par T oscule q en T , par exemple le cercle $\mathcal{C}$. Puisque $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents en T , le cercle $\mathcal{C}'$ oscule aussi q en T , et donc $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$. $\square$

Nous avons montré que, si on considère un cercle $\mathcal{C}_0$ osculateur à q de centre $\lambda(t_0)$ avec $t_0 \in]0, t_{h+}[$, alors il existe exactement deux cercles osculateurs à q tangents à $\mathcal{C}_0$ et paramétrés par t_1 et t_2 avec $t_1 \in]t_{h+}, \infty[$ et correspondant au zéro de la fonction

$$\tilde{\tau}_+(t_0, t_1) := \tau_+(t_1) - r(t_0) = \|\lambda(t_0) - \lambda(t_1)\| + r(t_1) - r(t_0)$$

et t_2 correspond au zéro des fonctions suivantes

- si $\mathcal{C}_0$ n'intersecte pas l'asymptote l_1 , alors $t_2 \in]t_{h+}, \infty[$ et

$$\tilde{\tau}_-(t_0, t_2) := \tau_-(t_2) - r(t_0) = r(t_2) - \|\lambda(t_0) - \lambda(t_2)\| - r(t_0)$$

- sinon $t_2 \in]-\infty, t_{h-}[$ avec

$$\tilde{\tau}_{q^-}(t_0, t_2) := \tau_{q^-}(t_2) - r(t_0) = \|\lambda(t_0) - \lambda(t_2)\| + r(t_2) - r(t_0) .$$

Pour tout $t_0 \in]0, t_{h+}[$, ces trois fonctions sont strictement croissantes par rapport à t_1 et t_2 (sur les domaines indiqués), donc leurs dérivées partielles par rapport à ces variables sont non nulles. Ainsi le Théorème des fonctions implicites s'applique : les couples (t_0, t_1) et (t_0, t_2) correspondant à ces cercles osculateurs tangents sont des graphes de fonctions

continues, donc des parties connexes. Les points de tangence entre cercles osculateurs dépendent continûment des paramétrisations des cercles (il s'agit d'un barycentre). Par conséquent, le lieu des points de tangence de cercles osculateurs avec un cercle osculateur à la moitié de q^+ d'abscisses négatives est constitué de trois parties connexes du plan qui constituent chacune un arc de courbe homéomorphe à un intervalle ouvert de $\mathbb{R}^2$ (Fig. 5.2). Il reste à montrer que l'adhérence de ces trois composantes connexes forme en fait une unique courbe connexe, topologiquement fermée dans le plan et située à l'extérieur de l'hyperbole. Étudions pour cela les points limites de nos trois fonctions.

Remarque 5.1.2. La composante connexe associée à $\tilde{\tau}_{q^-}(t_0, t_2)$ est nécessairement entièrement à l'extérieur de l'hyperbole. En effet, les points de cette composante connexe correspondent aux points de tangence entre la famille de cercles osculateurs à q recouvrant le demi-plan défini par l_2 qui contient q^+ (à l'exception de cercle hyperosculateur à q^+) et la famille de cercles osculateurs à q^- qui recouvrent le demi-plan défini par l_1 qui ne contient pas q^+ (à l'exception de cercle hyperosculateur à q^-). L'intersection entre ces demi-plans est donc à l'extérieur des asymptotes de q , donc, a fortiori, à l'extérieur de l'hyperbole.

Lorsque t_0 tend vers 0, le cercle $\mathcal{C}_0$ tend vers l'asymptote l_2 vue comme cercle osculateur à l'infini. Soit alors $t_{l_2^+} \in]t_{h^+}, \infty[$ tel que $\lambda(t_{l_2^+})$ soit le centre du cercle osculateur à q^+ tangent à l'asymptote l_2 . Alors

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0} \tilde{\tau}_+(t_0, t_{l_2^+}) = 0 .$$

Ainsi le point limite à gauche de la composante connexe correspondante existe et se situe sur l'asymptote l_2 située et donc à l'extérieur de l'hyperbole par l'Assertion 5.1.

Soit maintenant $t_{l_2^-} \in]-\infty, t_{h^-}[$ tel que $\lambda(t_{l_2^-})$ soit le centre du cercle osculateur à q^- tangent à l'asymptote l_2 . Alors, par les mêmes arguments,

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0} \tilde{\tau}_{q^-}(t_0, t_{l_2^-}) = 0 . \quad (5.2)$$

Ainsi un des points limite de la composante connexe correspondant à $\tilde{\tau}_{q^-}(t_0, t_2)$ existe et se situe sur l'asymptote l_2 (donc à l'extérieur de l'hyperbole par l'Assertion 5.1).

Soit $t_{l_1^+} \in]0, t_{h^+}[$ tel que $\lambda(t_{l_1^+})$ soit le centre du cercle osculateur à q^+ tangent à l'asymptote l_1 . En considérant l'asymptote l_1 comme un cercle osculateur à l'infini on a alors

$$\begin{aligned} \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \tilde{\tau}_-(t_{l_1^+}, t_2) &= \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \tau_-(t_2) - r(t_{l_1^+}) \\ &= d(\lambda(t_{l_1^+}), l_1) - r(t_{l_1^+}) = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

mais aussi

$$\begin{aligned} \lim_{t_2 \rightarrow -\infty} \tilde{\tau}_{q^-}(t_{l_1^+}, t_2) &= \lim_{t_2 \rightarrow -\infty} \tau_{q^-}(t_2) - r(t_{l_1^+}) \\ &= d(\lambda(t_{l_1^+}), l_1) - r(t_{l_1^+}) = 0 . \end{aligned} \quad (5.4)$$

Les équations 5.2 et 5.4 montrent que l'adhérence de la composante connexe correspondant à $\tilde{\tau}_{q^-}(t_0, t_2)$ est un arc de courbe topologiquement fermé dans le plan et entièrement à l'extérieur de l'hyperbole (Rem.5.1.2 et Ass. 5.1).

On déduit de plus des équations (5.3) et (5.4) que l'adhérence des composantes correspondant à $\tilde{\tau}_-(t_0, t_2)$ et $\tilde{\tau}_{q^-}(t_0, t_2)$ possède au moins un point d'intersection qui est le point de tangence entre le cercle de centre $\lambda(t_{l_1^+})$ et l'asymptote l_1 . Il s'agit en fait de l'unique point d'intersection entre ces deux composantes connexes. En effet, par la Remarque 5.1.2, nous savons que la composante $\tilde{\tau}_{q^-}(t_0, t_2)$ est à l'extérieur des asymptotes. Par le même

types d'arguments, on montre que la composante $\tilde{\tau}_-(t_0, t_2)$ est elle à l'intérieur des asymptotes. Donc l'unique point d'intersection entre l'adhérence de ces composantes connexes est le point limite correspondant au point de tangence entre le cercle de centre $\lambda(t_{l_1}^+)$ et l'asymptote l_1 . Puisque ce point d'intersection appartient à l'adhérence des composantes connexes mais pas aux composantes connexes, nous avons ainsi montré que la réunion des adhérences des composantes connexes correspondant à $\tilde{\tau}_{q^-}(t_0, t_2)$ et $\tilde{\tau}_-(t_0, t_2)$ forme un unique arc homéomorphe à un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$.

Lorsque t_0 tend vers t_{h^+} , le cercle osculateur correspondant, noté $\mathcal{C}_0$, tend vers le cercle hyperosculateur à q^+ . Rappelons que cercle hyperosculateur à q^+ est contenu dans tous les cercles osculateurs à q^+ et qu'il ne contient aucun cercle osculateur. Donc, lorsque t_0 tend vers t_{h^+} , le cercle osculateur tangent à $\mathcal{C}_0$ et contenu dans $\mathcal{C}_0$ (noté par la suite $\mathcal{C}_1$) tend aussi vers le cercle hyperosculateur à q^+ . De même, le cercle osculateur tangent à $\mathcal{C}_0$ et contenant $\mathcal{C}_0$ (noté par la suite $\mathcal{C}_2$) tend lui aussi vers le cercle hyperosculateur à q^+ . Donc, lorsque $t_0 = t_{h^+}$ alors $t_1 = t_2 = t_{h^+}$ et les trois cercles tangents entre eux sont confondus. Il reste donc à savoir où se trouve le point de tangence limite.

Montrons que, lorsque t_0 tend vers t_{h^+} , le point de tangence entre $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ ne peut pas tendre vers un point du cercle hyperosculateur situé à l'intérieur de l'hyperbole. En effet, nous avons montré que l'adhérence de la composante connexe correspondant à $\tilde{\tau}_+(t_0, t_1)$ est un arc de courbe possédant un point à l'extérieur de l'hyperbole. Pour atteindre un point situé à l'intérieur de l'hyperbole, cet arc doit donc intersecter q , ce qui contredit l'Assertion 5.2. Donc le point limite se situe sur l'hyperbole et il s'agit par conséquent du sommet de l'hyperbole q^+ (qui est le point où le cercle hyperosculé l'hyperbole). Nous avons ainsi montré que l'adhérence de la composante connexe correspondant à $\tilde{\tau}_+(t_0, t_1)$ est un arc de courbe topologiquement fermé dans le plan.

Par le même raisonnement, on montre que lorsque t_0 tend vers t_{h^+} , le point de tangence entre $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_2$ tend aussi vers le sommet de l'hyperbole q^+ . Donc le sommet de l'hyperbole q^+ est l'extrémité des arcs topologiquement fermés correspondant à l'adhérence des composantes connexes $\tilde{\tau}_+(t_0, t_1)$ et $\tilde{\tau}_-(t_0, t_2)$ qui forment donc une unique courbe homéomorphe à un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et dont tous les points sont à l'extérieur de l'hyperbole.

Par symétrie de l'hyperbole, la même démonstration s'applique aux trois autres quarts de l'hyperbole, ce qui achève la preuve du Lemme 5.1.1. $\square$

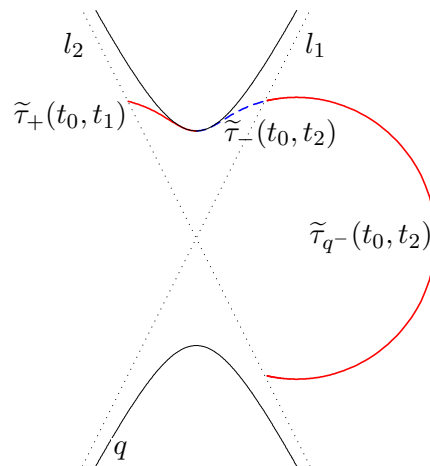


FIGURE 5.2 – Les trois composantes connexes correspondant aux fonctions $\tilde{\tau}_+(t_0, t_1)$, $\tilde{\tau}_-(t_0, t_2)$ et $\tilde{\tau}_{q^-}(t_0, t_2)$

5.1.2 À propos de la position relative du profil d'un cusp par rapport à la développée $\mathcal{L}_q$

Poursuivons maintenant avec la proposition suivante qui décrit la position relative de la développée $\mathcal{L}_q$ par rapport à un profil de cusp.

Proposition 5.1.3. *Soit S un point appartenant au profil $[\mathcal{S}_F, C]$ d'un cusp C de la courbe $\mathcal{S}_F$ et un point L appartenant à la branche de la développée de l'hyperbole $\mathcal{L}_q$ qui contient C . Supposons que S et L sont de même abscisse x d'ordonnée y_S et y_L respectivement. Alors $|y_S| \geq |y_L|$, avec égalité si et seulement si S est le point C .*

Autrement dit, le profil d'un cusp est situé au-dessus (resp. en dessous) de la développée de l'hyperbole $\mathcal{L}_q$ si le cusp correspond à un cercle osculateur à la branche q^+ de l'hyperbole (resp. q^-).

PREUVE. Sans perte de généralité, supposons que le point C soit d'abscisse et d'ordonnée positives et appelons Q_C le point d'osculation entre le cercle de centre C et l'hyperbole q (donc Q_C appartient à la moitié de q^+ d'abscisse négative). Rappelons que tout point de la courbe $\mathcal{S}_F$ appartient à une normale à l'hyperbole. Donc, par la Proposition 3.1.17(i), la Proposition est vérifiée pour tout point S du profil $[\mathcal{S}_F, C]$ d'abscisse positive et tel que le cercle de centre S est tangent à la moitié de q^+ d'abscisse négative.

Montrons que, outre le point C , il n'existe pas d'autre point d'intersection entre le profil $[\mathcal{S}_F, C]$ et la branche $\mathcal{L}_q^+$ de la développée. Comme dans le Chapitre 3, choisissons une paramétrisation $\tilde{q}(t)$ de l'hyperbole et une paramétrisation $\sigma(t)$ de la courbe $\mathcal{S}_F$ telle que le point de tangence entre le cercle de centre $\sigma(t)$ et l'hyperbole soit $\tilde{q}(t)$.

Soit $\sigma(t_I)$ un point d'intersection entre les courbes $\mathcal{S}_F$ et $\mathcal{L}_q^+$, autre qu'un cusp de $\mathcal{S}_F$, et montrons que ce point n'appartient pas au profil $[\mathcal{S}_F, C]$. Deux cas se présentent :

le point $\tilde{q}(t_I)$ est d'abscisse négative : la Proposition est vérifiée pour tout point $\sigma(t)$ d'abscisse positive tel que le point $\tilde{q}(t)$ est d'abscisse négative ; par conséquent le point $\sigma(t_I)$ est d'abscisse négative ;

le point $\tilde{q}(t_I)$ est d'abscisse positive : puisque le point $\sigma(t_I)$ n'est pas un cusp de $\mathcal{S}_F$ (Prop. 3.1.10), le cercle tangent à q de centre $\sigma(t_I)$ passant par F n'est pas un cercle osculateur à l'hyperbole, donc la normale à l'hyperbole en $\tilde{q}(t_I)$ n'est pas tangente à $\mathcal{L}_q^+$ au point $\sigma(t_I)$ et donc $\sigma(t_I)$ est d'abscisse positive (Rem. 3.1.16).

Supposons que le point $\sigma(t_I)$ est à l'extérieur de l'hyperbole. Dans ce cas, comme le centre du cercle $\sigma(t_I)$ et le point de tangence $\tilde{q}(t_I)$ sont d'abscisse de même signe, ce cercle n'appartient pas au demi-plan défini par la tangente à q en $\tilde{q}(t)$ qui contient le cercle osculateur en $\tilde{q}(t)$, donc $\sigma(t_I)$ n'appartient pas au profil $[\mathcal{S}_F, C]$ par la Remarque 3.1.13.

Supposons maintenant que le point d'intersection $\sigma(t_I)$ soit à l'intérieur de l'hyperbole (voir Fig. 5.3(a)). Dans ce cas, comme $\sigma(t_I)$ et $\tilde{q}(t_I)$ sont d'abscisses de même signe, la distance entre $\sigma(t_I)$ et $\tilde{q}(t_I)$ est plus petite que la distance entre $\tilde{q}(t_I)$ et l'intersection de la normale en $\tilde{q}(t_I)$ avec l'axe des ordonnées. Comme l'intersection de la normale en $\tilde{q}(t_I)$ avec l'axe des ordonnées est le centre du cercle bitangent à l'hyperbole au point $\tilde{q}(t_I)$, le cercle de centre $\sigma(t_I)$ est contenu dans ce cercle bitangent (voir Fig. 5.3(b)). Donc le cercle tangent à q de centre $\sigma(t_I)$ et passant par le point F est à l'intérieur de l'hyperbole ; donc le point F aussi et le point $\sigma(t_I)$ appartient soit à l'arc $\sigma([t_{Q'_{B_1}}, t_{Q'_{B_2}}])$ soit à l'arc $\sigma([t_{Q''_{B_1}}, t_{Q''_{B_2}}])$ (voir Section 3.2.2.2), donc le point $\sigma(t_I)$ n'appartient pas au profil du cusp $[\mathcal{S}_F, C]$, ce qui achève la démonstration. $\square$

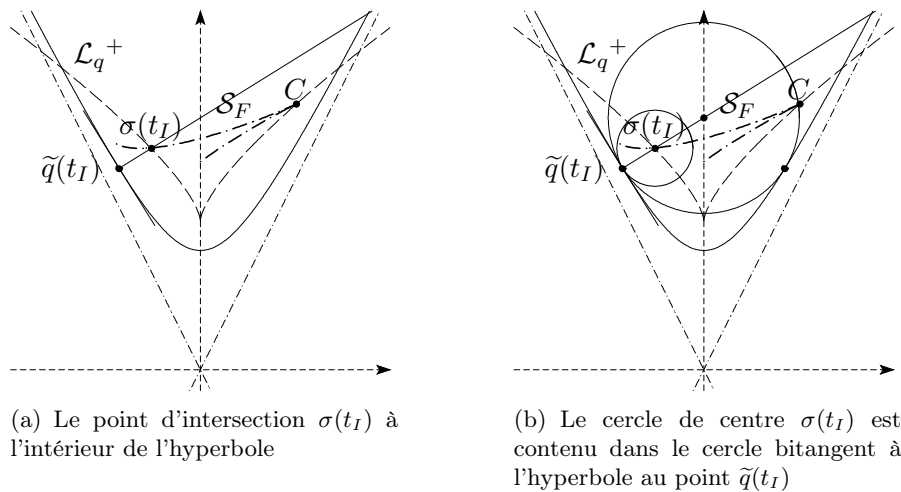


FIGURE 5.3 – Illustration de la preuve de la Proposition 5.1.3 lorsque le point $\sigma(t_I)$ est à l'intérieur de l'hyperbole

5.1.3 À propos des profils des cusps lorsque les cercles osculateurs correspondants sont tangents entre eux

Enfin, notre troisième résultat décrit la position relative des deux profils des cusps de la courbe $\mathcal{S}_F$ par rapport à la droite reliant ces deux cusps. Cette proposition est la clé de voûte de la construction de la configuration maximale.

Proposition 5.1.4. *Soit C un cercle de centre C osculateur à l'hyperbole q et passant par le point F situé à l'intérieur des asymptotes de q et à l'extérieur de l'hyperbole. Considérons le profil $[\mathcal{S}_F, C]$ de C et la droite d passant par le point F et le cusp C . Considérons de plus le vecteur unitaire $\vec{n}_l$, normal à l'asymptote du quart d'hyperbole auquel le cercle C est osculateur, et le vecteur unitaire $\vec{a}_T$, vecteur directeur de la droite asymptote du profil du cusp $[\mathcal{S}_F, C]$; supposons que le sens de ces vecteurs indique les deux directions asymptotiques du profil $[\mathcal{S}_F, C]$.*

Supposons que les points $P' := F + \vec{n}_l$ et $P'' := F + \vec{a}_T$ soient dans le même demi-plan défini par la droite d . Alors le profil du cusp $[\mathcal{S}_F, C]$ est entièrement contenu dans le demi-plan défini par d qui contient les points P' et P'' .

PREUVE. Puisque les vecteurs $\vec{n}_l$ et $\vec{a}_T$ représentent les directions asymptotiques du profil du cusp $[\mathcal{S}_F, C]$, il s'agit de montrer que, outre le point C , le profil du cusp ne possède pas d'autres intersections avec la droite d passant par F et C , le résultat suit par continuité de $\sigma(t)$ sur le profil $[\mathcal{S}_F, C]$. Considérons pour cela une paramétrisation polaire $(R(t), \theta(t))$ de la courbe $\mathcal{S}_F - \vec{OF}$ telle que $\theta(t) \in \mathbb{R}$ représente l'angle entre le vecteur $\vec{F\sigma(t)}$ et l'axe des abscisses. Nous avons alors l'assertion suivante que nous démontrons plus loin :

Assertion 5.3. *Soit $t_C \in \mathbb{R}$ tel que $\sigma(t_C) = C$; alors $\theta(t_C)$ est un extremum global de l'application θ définie sur l'intervalle ouvert $\sigma^{-1}([\mathcal{S}_F, C])$.*

Il reste à montrer que pour tout point $t \in \sigma^{-1}([\mathcal{S}_F, C])$ on a les inégalités strictes $\theta(t_C) - \pi < \theta(t) < \theta(t_C) + \pi$.

Nommons $([\mathcal{S}_F, C], \vec{n}_l)$ et $([\mathcal{S}_F, C], \vec{a}_T)$, l'adhérence des composantes connexes du profil $[\mathcal{S}_F, C]$ privée du point C ayant comme direction asymptotique $\vec{n}_l$ et $\vec{a}_l$ respectivement. Nommons de plus s_C la tangente au cusp C et $Q_C = \tilde{q}(t_C)$ le point d'osculation entre le

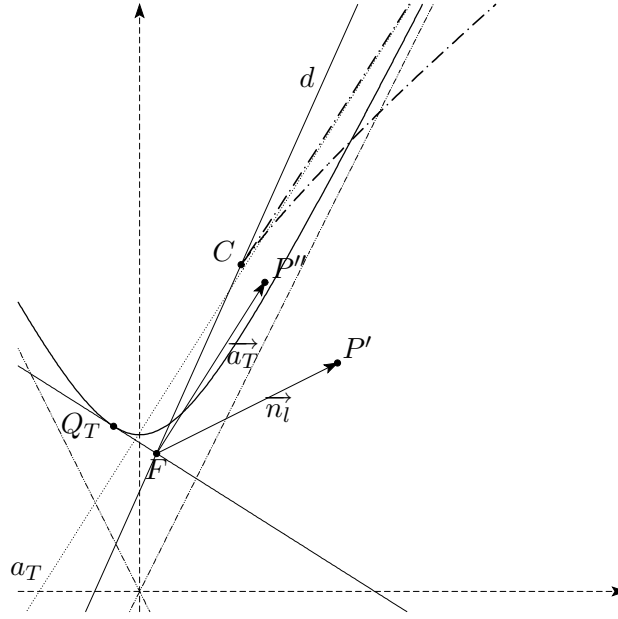


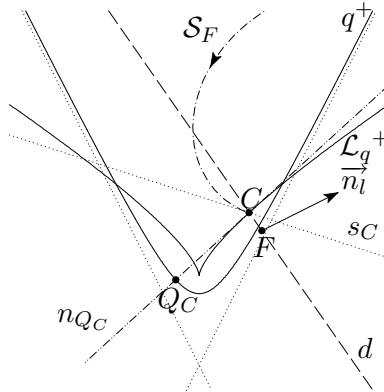
FIGURE 5.4 – Illustration de la Proposition 5.1.4

cercle de centre C passant par F et l'hyperbole q . Sans perte de généralité supposons que le point C soit d'abscisse positive. Dans ce cas, avec la paramétrisation choisie dans le Chapitre 3, pour $t < t_C$ le point $\sigma(t)$ appartient à l'arc $([\mathcal{S}_F, C], \vec{n}_l)$ et pour $t > t_C$ le point $\sigma(t)$ appartient à l'arc $([\mathcal{S}_F, C], \vec{a}_T)$.

Rappelons que les deux arcs $([\mathcal{S}_F, C], \vec{n}_l)$ et $([\mathcal{S}_F, C], \vec{a}_T)$ sont de courbure strictement positive (Prop. 3.1.18) et que le point C est un cusp ordinaire (Prop. 3.1.10).

Étudions les intersections entre la droite d et le profil $[\mathcal{S}_F, C]$ suivant la position de la tangente s_C par rapport aux droites d et n_{Q_C} (la normale à q au point Q_C).

Si la tangente s_C appartient au secteur orienté $\text{sec}(d, n_{Q_C})$, où n_{Q_C} est la normale au point Q_C , alors l'arc $([\mathcal{S}_F, C], \vec{n}_l)$ de courbure strictement positive intersecte la droite d en un point noté I (Fig. 5.5). Or, dans ce cas, il existe une tangente à l'arc $[C, I]$ passant par

FIGURE 5.5 – La tangente au cusp appartient au secteur orienté $\text{sec}(d, n_{Q_C})$

le point F et donc le point $\theta(t_C)$ n'est pas un extremum global sur le profil $[\mathcal{S}_F, C]$, ce qui contredit l'Assertion 5.3. Donc la tangente s_C appartient au secteur orienté $\text{sec}(n_{Q_C}, d)$.

Supposons alors par l'absurde que l'arc $([\mathcal{S}_F, C], \vec{n}_l)$ possède (au moins) un point d'intersection avec la droite d . Comme $\theta(t_C)$ est un extremum global sur le profil, ceci revient

à dire qu'il existe point $t \in \sigma^{-1}([\mathcal{S}_F, C])$ tel que $\theta(t) = \theta(t_C) + \pi$ ou $\theta(t) = \theta(t_C) - \pi$. Puisque l'arc $([\mathcal{S}_F, C], \vec{n}_l)$ est de courbure strictement positive, l'arc $([\mathcal{S}_F, C], \vec{n}_l)$ forme alors une spirale d'origine le point C (Fig. 5.6(a)). Rappelons que le point C appartient à la développée $\mathcal{L}_q^+$ en tant que centre d'un cercle osculateur à q . S'il existe un point t tel que $\theta(t) = \theta(t_C) + \pi$ ou $\theta(t) = \theta(t_C) - \pi$, une partie du profil du cusp d'origine C intersecte la développée de l'hyperbole $\mathcal{L}_q$ ce qui contredit la Proposition 5.1.3. Donc l'arc $([\mathcal{S}_F, C], \vec{n}_l)$ n'intersecte pas la droite d .

Supposons alors que l'arc $([\mathcal{S}_F, C], \vec{a}_T)$ possède (au moins) un point d'intersection avec la droite d , que l'on note I (Fig. 5.6(b)). Puisque le cusp C est ordinaire que la courbure de l'arc $([\mathcal{S}_F, C], \vec{a}_T)$ est strictement positive, il existe alors une tangente à l'arc $[C, I]$ passant par le point F et donc le point $\theta(t_C)$ n'est pas un extremum global sur le profil, ce qui contredit l'Assertion 5.3. Nous avons ainsi montré que C est le seul point d'intersection entre la droite d et le profil du cusp $[\mathcal{S}_F, C]$, ce qui achève la preuve de la Proposition 5.1.4. $\square$

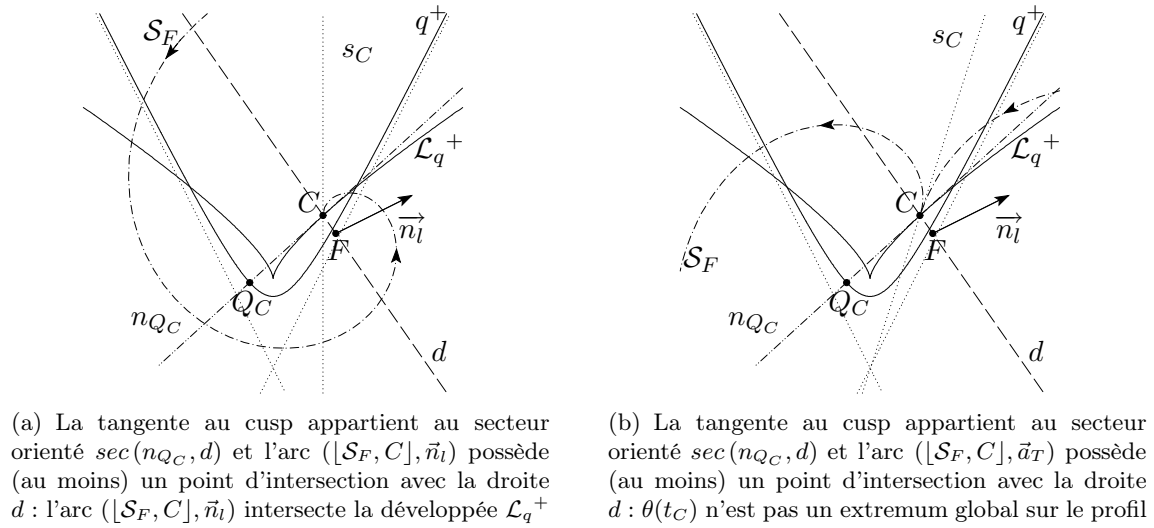


FIGURE 5.6 – La tangente au cusp appartient au secteur orienté $\text{sec}(n_{Q_C}, d)$

PREUVE DE L'ASSERTION 5.3. Le choix des coordonnées polaires est motivé par le fait que la dérivée $\dot{\theta}(t)$ s'exprime de manière simple pour tout $t \in \sigma^{-1}([\mathcal{S}_F, C])$ par :

$$\dot{\theta}(t) = \frac{R(t) - r(t)}{r(t)R(t)}. \quad (5.5)$$

En effet, si l'on considère l'application de changement de coordonnées définie par

$$\vec{v} = (x, y) \mapsto (R \cos \phi, R \sin \phi)$$

alors on a

$$\nabla \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} = \frac{\vec{v}^\perp}{\|\vec{v}\|^2}.$$

De plus, la dérivée $\dot{\theta}(t) = \frac{d}{dt} \phi(\sigma_F(t))$ s'écrit comme

$$\dot{\theta}(t) = \langle \nabla \phi(\sigma_F(t)) \mid \dot{\sigma}(t) \rangle.$$

où $\sigma_F(t)$ est la paramétrisation de la courbe $\mathcal{S}_F$ translatée par le vecteur $\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}$. En utilisant une paramétrisation $\tilde{q}(t)$ unitaire de l'hyperbole, la paramétrisation (3.1) de la courbe $\mathcal{S}_F$, le repère orthonormé $(\tilde{q}(t), \tilde{q}(t)^\perp)$ et les relations (3.6), (3.12) et (4.1), on calcule

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}(t) &= \frac{1}{\|\sigma_F(t)\|^2} \langle \sigma_F(t)^\perp \mid \dot{\sigma}(t) \rangle \\
&= \frac{-1}{|R(t)|^2} \sigma_F(t) \wedge \dot{\sigma}(t) \\
&= \frac{-1}{|R(t)|^2} \left(\left(\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t) \right) \begin{pmatrix} \delta(t) \\ -1 \end{pmatrix} + R(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \wedge \left(\frac{1}{r(t)} (r(t) - R(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ \delta(t) \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{R(t) - r(t)}{r(t)|R(t)|^2} \left(\left(\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t) \right) (\delta(t)^2 + 1) - R(t) \right) \\
&= \frac{R(t) - r(t)}{r(t)|R(t)|^2} \left(\frac{2\overrightarrow{F\tilde{q}(t)} \wedge \dot{\tilde{q}}(t)}{\|\overrightarrow{F\tilde{q}(t)}\|^2} 2R(t)^2 - R(t) \right) \\
&= \frac{R(t) - r(t)}{r(t)R(t)}
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc bien la relation (5.5) pour $\dot{\theta}(t)$. Celle-ci s'annule et change de signe lorsque le rayon $R(t)$ du cercle passant par F et tangent à l'hyperbole en $\tilde{q}(t)$ est égal au rayon $r(t)$ du cercle osculateur à l'hyperbole en $\tilde{q}(t)$ (voir Rem. 3.1.14); autrement dit, lorsque $t = t_C$ (Prop. 3.1.10). Ceci montre que t_C est l'unique extremum local de l'application $\theta(t)$ définie sur $\sigma^{-1}([\mathcal{S}_F, C])$. De plus, comme l'application $\theta(t)$ est monotone de part et d'autre de t_C , le point t_C est un extremum global de l'application $\theta(t)$ définie sur $\sigma^{-1}([\mathcal{S}_F, C])$. $\square$

Corollaire 5.1.5. *Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles osculateurs à la même branche de l'hyperbole q et tangents entre eux au point F_0 . Appelons C_1 et C_2 leurs centres. Soit d la droite passant par C_1 , C_2 et F_0 . Considérons la courbe $\mathcal{S}_{F_0}$ relative au point F_0 . Alors, les profils des deux cusp $[\mathcal{S}_{F_0}, C_1]$ et $[\mathcal{S}_{F_0}, C_2]$ sont de part et d'autre de la droite d .*

Pour démontrer ce corollaire, nous utilisons la notion de secteur vectoriel, similaire au secteur orienté défini au Chapitre 4.

Définition 5.1.6. Soit $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs. On appelle *secteur vectoriel*, que l'on note $sec_v(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, l'ensemble de vecteurs suivant

$$sec_v(\vec{v}_1, \vec{v}_2) := \{ \vec{v} \mid \vec{v} = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2, \alpha, \beta > 0 \}.$$

PREUVE DU COROLLAIRE 5.1.5. Sans perte de généralité, supposons que le point F_0 est d'ordonnée positive et que les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont osculateurs à la branche q^+ de l'hyperbole. Nous utiliserons ici les notations de la Section 3.2.3.2; rappelons donc que Q_{C_1} est le point d'osculation du cercle osculateur au quart d'hyperbole d'asymptote l_2 passant par F_0 , tandis que Q_{C_2} est le point d'osculation du cercle osculateur au quart d'hyperbole d'asymptote l_1 passant par F_0 . Rappelons de plus que l'arc d'hyperbole $[Q_{T_1}, Q_{T_2}]$, où Q_{T_1} et Q_{T_2} sont les points de tangence entre l'hyperbole q et les tangentes à q passant par F_0 , est contenu dans l'arc d'hyperbole $[Q_{C_1}, Q_{C_2}]$.

Par la Proposition 5.1.4, il s'agit donc de montrer que la droite d sépare le plan en deux demi-plans, l'un contenant les points $P'_1 = F_0 + \vec{n}_{l_2}$ et $P''_1 = F_0 + \vec{a}_{T_1}$ et l'autre les points $P'_2 = F_0 + \vec{n}_{l_1}$ et $P''_2 = F_0 + \vec{a}_{T_2}$.

Remarquons tout d'abord que, par convexité, les droites normales à la branche q^+ de l'hyperbole appartiennent au secteur orienté $\text{sec}(n_{l_2}, n_{l_1})$ où n_{l_1} et n_{l_2} sont les normales respectivement aux asymptotes l_1 et l_2 de l'hyperbole q . En particulier, le secteur orienté $\text{sec}(a_{T_1}, a_{T_2})$ est inclus dans le secteur orienté $\text{sec}(n_{l_2}, n_{l_1})$, puisque les droites a_{T_1} et a_{T_2} , asymptotes de $\mathcal{S}_{F_0}$, sont parallèles aux droites normales à q aux points Q_{T_1} et Q_{T_2} respectivement. Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{a_{T_1}}$ et $\overrightarrow{a_{T_2}}$ appartiennent au secteur vectoriel $\text{sec}_v(\overrightarrow{n_{l_1}}, \overrightarrow{n_{l_2}})$ (Fig. 5.7). Il suffit donc de montrer l'assertion suivante.

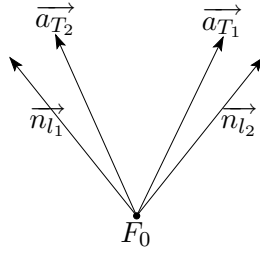


FIGURE 5.7 – La position respective des vecteurs

Assertion 5.4. *Le vecteur $\overrightarrow{F_0 C_1}$, vecteur directeur de la droite d , appartient au secteur vectoriel $\text{sec}_v(\overrightarrow{a_{T_1}}, \overrightarrow{a_{T_2}})$.*

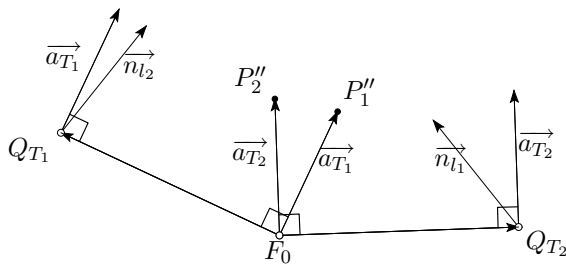
Pour ce qui suit, nous utilisons la paramétrisation unitaire de l'hyperbole choisie dans la Section 3.2. Ainsi, un vecteur unitaire $\overrightarrow{n_Q}$ normal à l'hyperbole q en un point $Q = \tilde{q}(t)$ est défini par

$$\overrightarrow{n_Q} := \frac{r(t)}{|r(t)|} \dot{\tilde{q}}(t)^\perp$$

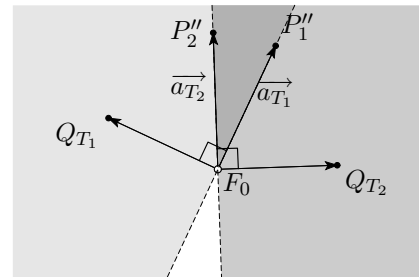
où $r(t)$ est le rayon de courbure de q au point Q (avec signe).

Remarquons alors les faits suivants.

- (i) Avec le repère de coordonnées choisi dans le Chapitre 3, le produit vectoriel $\overrightarrow{n_{l_2}} \wedge \overrightarrow{n_{l_1}}$ est positif.
- (ii) Comme le point F_0 est le point de tangence entre deux cercles osculateurs, il est situé à l'extérieur de l'hyperbole (Lemme 5.1.1). De plus, l'hyperbole est convexe, donc le produit vectoriel $\overrightarrow{F_0 Q_{T_2}} \wedge \overrightarrow{F_0 Q_{T_1}}$ est positif.



(a) Les points P_1'' et P_2'' et les vecteurs étudiés



(b) L'intersection entre les demi-plans définis par les droites $F_0 P_1''$ et $F_0 P_2''$

FIGURE 5.8 – Illustration de la preuve de l'Assertion 5.4

Montrons que le vecteur $\overrightarrow{F_0C_1}$ appartient aux secteur vectoriel $sec_v(\overrightarrow{a_{T_1}}, \overrightarrow{a_{T_2}})$. Considérons l'arc $([C_1, \mathcal{S}_{F_0}], \overrightarrow{a_{T_1}})$. Cet arc est de courbure strictement positive (Prop. 3.1.18) et appartient au demi-plan défini par la droite a_{T_1} qui ne contient pas le point F_0 . Donc, pour tout point S_1 appartenant à l'arc $([C_1, \mathcal{S}_{F_0}], \overrightarrow{a_{T_1}})$, le vecteur $\overrightarrow{F_0S_1}$ s'écrit comme

$$\overrightarrow{F_0S_1} = \alpha_1 Q_{T_1} + \beta_1 a_{T_1} \quad \text{avec } \alpha_1 \geq 0; .$$

Autrement dit, le point S_1 appartient au demi-plan défini par la droite F_0P_1'' qui contient le point Q_{T_1} .

Par le même raisonnement, pour tout point S_2 appartenant à l'arc $([C_2, \mathcal{S}_{F_0}], \overrightarrow{a_{T_2}})$, le vecteur $\overrightarrow{F_0S_2}$ s'écrit comme

$$\overrightarrow{F_0S_2} = \alpha_2 Q_{T_2} + \beta_2 a_{T_2} \quad \text{avec } \alpha_2 \geq 0$$

donc le point S_2 appartient au demi-plan défini par la droite F_0P_2'' qui contient le point Q_{T_2} .

Par les remarques (i) et (ii), ces deux demi-plans ont une intersection commune contenant les points P tels que le vecteur $\overrightarrow{F_0P}$ appartient au secteur vectoriel $sec_v(\overrightarrow{a_{T_1}}, \overrightarrow{a_{T_2}})$ (Fig. 5.8(b)). Puisque la droite d passe par les points C_1 et C_2 , qui appartiennent donc chacun à l'un des demi-plans, les points C_1 et C_2 appartiennent à l'intersection ; donc le vecteur $\overrightarrow{F_0C_1}$, vecteur directeur de la droite d , appartient aux secteur vectoriel $sec_v(\overrightarrow{a_{T_1}}, \overrightarrow{a_{T_2}})$, ce qui achève la preuve du Corollaire 5.1.5. $\square$

5.2 Construction de la configuration maximale

Dans le Chapitre 4, nous avons montré qu'une configuration maximale s'obtient lorsque le point F est à l'extérieur de l'hyperbole mais à l'intérieur des asymptotes. Il faut de plus que la parabole de foyer F et de directrice la droite à laquelle les cercles doivent être tangents intersecte chacun des profils de cusp de $\mathcal{S}_F$ en quatre points. Pour obtenir ceci, nous nous plaçons au voisinage d'une configuration où les cercles osculateurs à l'hyperbole q sont tangents entre eux. Le Lemme 5.1.1 montre que le point de tangence entre deux cercles osculateurs à l'hyperbole q se situe à l'extérieur de celle-ci.

Situation initiale. Sans perte de généralité, soit $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}'_0$, deux cercles osculateurs à la branche d'hyperbole q^+ tangents entre eux et tels que leur point de tangence, nommé F_0 , soit à l'intérieur des asymptotes ; le point F_0 est de plus à l'extérieur de l'hyperbole. Appelons respectivement C_0 et C'_0 leurs centres. En tant que centres de cercles osculateurs tangents entre eux, les points C_0 et C'_0 appartiennent à des moitiés différents de la développée de l'hyperbole $\mathcal{L}_q^+$. Quitte à renommer les cercles, supposons que l'ordonnée x_{C_0} du point C_0 soit négative et que l'ordonnée $x_{C'_0}$ du point C'_0 soit positive (Fig. 5.9).

Les points F_0 , C_0 et C'_0 appartiennent à une droite que l'on nommera d_0 .

Considérons la courbe $\mathcal{S}_{F_0}$ relative à F_0 ; par la Proposition 5.1.3 et le Corollaire 5.1.5, les profils des deux cusp $[\mathcal{S}_{F_0}, C]$ et $[\mathcal{S}_{F_0}, C']$ sont chacun d'un côté de la droite d_0 et au-dessus de la développée $\mathcal{L}_q$.

Perturbation. Perturbons maintenant le point F_0 en un point F situé sur la droite d_0 à l'intérieur des cercles $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}'_0$ mais toujours à l'extérieur de l'hyperbole (Fig. 5.10) et considérons la nouvelle courbe $\mathcal{S}_F$ relative à F .

Observons les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de centre C et C' respectivement, passant par F et osculateurs à l'hyperbole. Par le Corollaire 3.1.7, ils sont contenus dans $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}'_0$ respectivement.

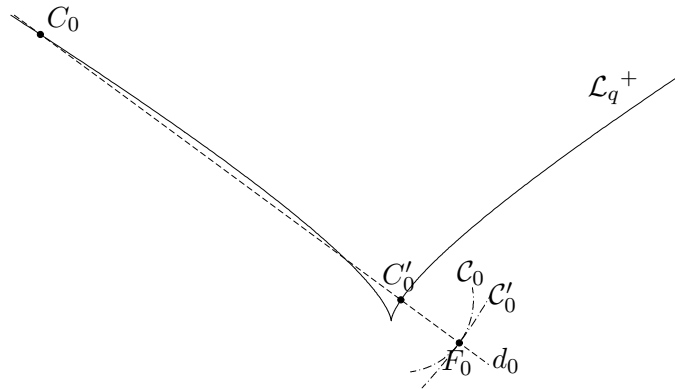


FIGURE 5.9 – La situation initiale

Donc, si l'on considère les abscisses x_C et $x_{C'}$ des points C et C' , nous avons par la Proposition 3.1.17(ii) que $x_{C_0} < x_C$ et $x_{C'} < x_{C'_0}$. Ainsi, les points C et C' , qui se trouvent sur la développée $\mathcal{L}_q$, seront de part et d'autre de la droite d_0 . Donc, la droite d_0 coupe chacun des profils des cusps $[\mathcal{S}_F, C]$ et $[\mathcal{S}_F, C']$ en deux points.

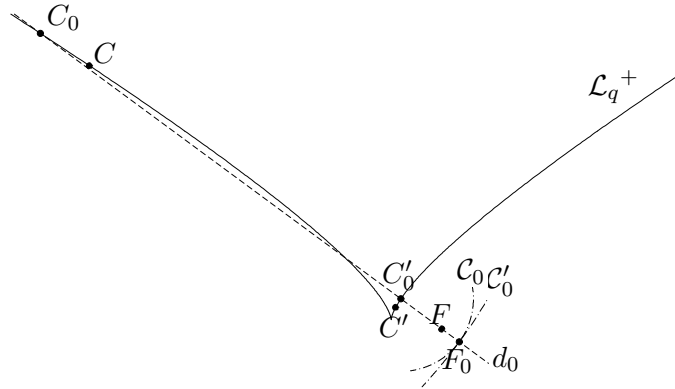


FIGURE 5.10 – La perturbation

De la droite à la parabole. Prenons maintenant $d_F^\perp$, la droite orthogonale à d_0 passant par F et choisissons une droite $d^\perp$, parallèle à $d_F^\perp$, suffisamment proche de celle-ci pour que la parabole de foyer F et de directrice $d^\perp$ coupe chacun des profils $[\mathcal{S}_F, C]$ et $[\mathcal{S}_F, C']$ en quatre points.

On obtient ainsi 4 points d'intersection entre la parabole et chaque profil $[\mathcal{S}_F, C]$ et $[\mathcal{S}_F, C']$ plus 2 points d'intersection entre la parabole et l'arc $\sigma([t_{Q''_{B_2}}, t_{Q''_{B_1}}])$ de $\mathcal{S}_F$, pour un total de 10 intersections. Chacune de ces intersections correspondant au centre d'un cercle tangent à l'hyperbole, à la droite et passant par le point, nous avons ainsi obtenu les dix cercles désirés et illustrés par la Figure B.6, p.149.

Perspectives

Comme nous l'avons déjà dit, lorsqu'on étudie le nombre maximal de cercles tangents à une hyperbole, une droite et passant par un point, la méthode décrite dans [RTV97] fournit un nombre maximal de seulement 8 cercles. Or, le Théorème 4.0.2 montre que, dans ce cas particulier, la méthode [RTV97] ne fournit pas le nombre maximal de cercles. Rappelons que, pour le problème général du nombre maximal de cercles tangents à trois coniques, le nombre de solutions complexes est 184 tandis que la méthode [RTV97] ne fournit que 136 solutions réelles (Chapitre 1). Au vu du Théorème 4.0.2, peut-on alors penser que 136 ne soit pas le nombre maximal de cercles tangents à trois coniques ? et peut-on espérer atteindre le maximum de 184 cercles ?

Le fait que, dans le cas particulier étudié dans la Partie II, le nombre maximal de cercles réels est strictement inférieur au nombre de solutions complexes laisse présager que le maximum de 184 cercles ne sera probablement pas atteint. Cependant, nous pouvons espérer que notre nouvelle méthode, appliquée au problème des cercles tangents à trois coniques, fournit un nombre de cercles supérieur à 136.

Estimons alors le nombre de cercles tangents à trois coniques. Pour cela, choisissons une hyperbole et deux coniques dégénérées en deux droites et comptons le nombre de cercles tangents à ces trois coniques. Rappelons qu'un cercle est tangent à une conique dégénérée en deux droites s'il est tangent à l'une des droites ou s'il passe par le point singulier ; les cercles tangents à une hyperbole et deux coniques dégénérées se répartissent alors en cercles passant par k points singuliers et tangents à $k - 2$ droites et à l'hyperbole, avec $k = 0, 1, 2$.

Admettons alors qu'il existe une configuration d'une hyperbole et de deux coniques dégénérées en deux droites telle que la Proposition 1.2.7 et le Théorème 4.0.2 s'appliquent et que l'on obtient le nombre maximal de cercles pour chaque choix de k points singuliers et $2 - k$ droites, $k = 0, 1, 2$. Nous obtenons alors le tableau ci-dessous. La colonne "Nombre de choix possibles" correspond au choix de points singuliers par lesquels passent les cercles et de droites auxquelles ils sont tangents.

k	Cercles passant par k points singuliers, tangents à $2 - k$ droites et à une hyperbole	Nombre de choix possibles	Prop. 1.2.7	Total
2	6 (i)	1	2^2	24
1	10 Thm. 4.0.2	$2 \cdot 2$	2^1	80
0	12 méthode [RTV97]	4	2^0	48

Estimation du nombre de cercles tangents à trois hyperboles : **152**

- (i) Intersection de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ (de degré 6) avec la droite médiatrice des deux points choisis, lieu des centres des cercles passant par deux points ;

En utilisant la même construction que dans le Chapitre 5, on peut effectivement trouver une hyperbole et deux coniques dégénérées en paires de droites telles qu'il existe 6 cercles

passant par les deux points singuliers et tangents à l'hyperbole et 40 cercles passant par un point singulier et tangents à l'hyperbole et à l'une des droites de l'autre conique dégénérée. On peut même espérer que la Proposition 1.2.7 puisse s'appliquer dans ce cas. Il existe toutefois encore une interrogation sur le nombre de cercles tangents à deux droites et une hyperbole. En effet, le nombre de coniques complexes passant par deux points et tangentes à deux droites et une hyperbole (calculé à l'aide d'un résultant) est 16. Ceci amènerait alors à **168** l'estimation du nombre de cercles tangents à trois coniques. Surgit donc une première question :

Problème. *Quel est le nombre maximal de cercles (réels) tangents à deux droites et à une hyperbole.*

Une première approche consiste à étudier le lieu des centres des cercles tangents à une droite d et une hyperbole q , noté $\mathcal{D}_{q,d}$. On peut aisément vérifier qu'il s'agit d'une courbe de degré 8. On peut de plus montrer l'assertion suivante :

Assertion. *Le lieu des centres des cercles tangents à une droite d et une hyperbole q est l'enveloppe des bissectrices de la droite d et des tangentes à q .*

Des expériences numériques permettent d'énoncer de plus la conjecture suivante :

Conjecture. *Si la droite d n'intersecte pas les cercles hyperosculateurs de la conique q , la courbe $\mathcal{D}_{q,d}$ possède quatre cusps correspondant au centres des cercles osculateurs à q et tangents à la droite d .*

On remarque que, encore une fois, les cercles osculateurs jouent un rôle important dans le problème.

Une fois cette courbe $\mathcal{D}_{q,d}$ étudiée, on pourrait étudier son intersection avec le lieu des centres des cercles tangents à deux droites, à savoir les deux bissectrices des deux droites, que l'on peut voir comme une conique dégénérée en deux droites. Le Théorème de Bézout nous prédit donc 16 intersections complexes ; reste à savoir combien sont réelles. Toutefois, cette approche reste dépendante de la Proposition 1.2.7, ce qui suscite le problème suivant :

Question. *Trouver une méthode (géométrique) efficace pour compter le nombre de cercles tangents à trois coniques données.*

Au vu du Chapitre 2 et plus particulièrement du Théorème 2.3.2, un autre problème intéressant serait le suivant :

Problème. *Trouver une configuration de trois coniques réelles et deux points réels telle que, lorsque l'on envoie les deux points réels sur deux points conjugués complexes, il n'y ait pas de disparition mais uniquement l'apparition de coniques réelles.*

Par l'action du groupe $GL(3, \mathbb{R})$, on obtiendrait ainsi une nouvelle configuration de trois coniques pour laquelle le nombre de cercles tangents à ces trois coniques pourrait être supérieur à 136.

Enfin, on peut évoquer un dernier problème en analogie avec les travaux de Welschinger, et plus particulièrement avec son résultat sur les 32 coniques tangentes à cinq coniques d'intérieurs disjoints (voir [Wel06]). Rappelons que le nombre maximal de cercles tangents à trois cercles est 8. Si les trois cercles sont d'intérieurs disjoints, les huit cercles tangents sont tous réels (toutefois, il existe aussi des configurations de trois cercles d'intérieurs non disjoints tels que les huit cercles tangents sont aussi tous réels, voir par exemple la Figure 1). On peut alors poser le problème suivant :

Problème. *Étant données trois coniques (lisses) d'intérieurs disjoints, existe-t-il toujours au moins huit cercles réels tangents à ces trois coniques ?*

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Preuve des Assertions 1.4 et 1.5

Assertion (Rappel de l'Assertion 1.4). *Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C},r} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_{\mathcal{C},r}(x, y) = 0\}$$

vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ est une hyperbole équilatère passant par les points R , (u, v) , L_1 et L_2 et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de symétrie de r et s'intersectent au point

$$G_0 = \left(\frac{x_{L_1} + x_{L_2}}{2}, \frac{y_{L_1} + y_{L_2}}{2} \right) \quad ;$$

- (ii) les points L_1, L_2 et R sont des points lisses de $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$;
(iii) les points L_1, L_2 et R sont les seuls points d'intersection entre $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ et la conique dégénérée r ;
(iv) tout point $P \in \mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ détermine un cercle $\mathcal{C}'$ concentrique à $\mathcal{C}$ et une hyperbole q_r d'asymptotes r tangents entre eux au point P . En particulier, si $P \in \{R, L_1, L_2\}$, l'hyperbole q_r est la conique dégénérée r elle-même ;

Soit $\mathcal{C}_R$ le cercle concentrique à $\mathcal{C}$ passant par le point singulier R

- (v) si le cercle $\mathcal{C}_R$ est tangent à r au point R de manière non dégénérée alors, dans un voisinage de R , la courbe $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ passe dans les secteurs positifs de r définis par le cercle $\mathcal{C}$;
(vi) le cercle $\mathcal{C}_R$ est tangent à $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ en R de tangente la droite l_i si et seulement si $\mathcal{C}_R$ est tangent de manière dégénérée à r .

Avant de commencer la preuve de cette assertion, introduisons la matrice J définie par

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice nous permet d'écrire les égalités suivantes :

$$\det(v, w) = \langle Jv \mid w \rangle \tag{A.1}$$

$$= \langle v \mid -Jw \rangle \tag{A.2}$$

PREUVE DE L'ASSERTION 1.4.

(i) Étudions l'application $g_{\mathcal{C},r}$.

On calcule

$$\nabla_{(x,y)}\mathcal{C} = 2 \begin{pmatrix} x-u \\ y-v \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla_{(x,y)}r = 2A^\ell \begin{pmatrix} x-x_R \\ y-y_R \end{pmatrix}$$

Alors, comme

$$A^\ell = \sigma(r) \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

où $\sigma(r)$ dépend du système de coordonnées choisi, on a :

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{C},r}(x,y) &= \det \left(\begin{pmatrix} x-u \\ y-v \end{pmatrix}, A^\ell \begin{pmatrix} x-x_R \\ y-y_R \end{pmatrix} \right) \\ &= (x-u, y-v)(-JA^\ell) \begin{pmatrix} x-x_R \\ y-y_R \end{pmatrix} \\ &= \sigma(r) \left[(x-u) \left(\alpha(x-x_R) + \beta(y-y_R) \right) \right. \\ &\quad \left. + (y-v) \left(-(x-x_R) - \alpha(y-y_R) \right) \right] \\ &= \sigma(r) \left[\alpha x^2 + (\beta-1)xy - \alpha y^2 - (\alpha(x_R+u) + \beta y_R - v)x \right. \\ &\quad \left. + (\alpha(v+y_R) - \beta u + x_R)y + \alpha(ux_R - vy_R) + \beta uy_R - vx_R \right] \end{aligned}$$

qui donne bien une équation quadratique. En outre, on vérifie aisément que

$$g_{\mathcal{C},r}(u,v) = g_{\mathcal{C},r}(x_R, y_R) = 0.$$

Vérifions maintenant que $g_{\mathcal{C},r}(L_i) = 0$.

Les coordonnées de L_i sont les coordonnées du vecteur

$$\overrightarrow{OL_i} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \frac{l_i(u,v)}{\|\nabla l_i\|^2} \nabla l_i$$

De plus, le vecteur $\begin{pmatrix} x_{L_i} - u \\ y_{L_i} - v \end{pmatrix} = \nabla_{L_i}\mathcal{C}$ est colinéaire au vecteur ∇l_i .

Par (1.5) et par la Remarque 1.4.5, le gradient de r en un point P se calcule de la manière suivante :

$$\nabla_P r = l_2(P) \cdot \nabla l_1 + l_1(P) \cdot \nabla l_2,$$

on a donc, au signe $\sigma(r)$ près,

$$2g_{\mathcal{C},r}(x,y) = l_2(P) \det(\nabla_P \mathcal{C}, \nabla l_1) + l_1(P) \det(\nabla_P \mathcal{C}, \nabla l_2). \quad (\text{A.3})$$

D'où, pour L_1 ,

$$2g_{\mathcal{C},r}(L_1) = l_2(L_1) \underbrace{\det(\nabla_{L_1} \mathcal{C}, \nabla l_1)}_{=0} + \underbrace{l_1(P)}_{=0} \det(\nabla_{L_1} \mathcal{C}, \nabla l_2) = 0$$

De même pour L_2 .

Remarque A.0.1 (Interprétation géométrique). Un cercle de centre C est tangent à une droite d en un point P si et seulement si le rayon $[CP]$ est orthogonal à la droite d . Dans notre cas, par définition de la projection orthogonale, le segment $[(u,v)L_i]$ est orthogonal à la droite l_i . C'est-à-dire que le cercle de centre (u,v) passant par L_i sera tangent à la droite l_i et donc à r . Donc, L_i appartient à la courbe $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$.

Asymptotes. Supposons, sans perte de généralité, que le point R soit l'origine du système de coordonnées. Ainsi, $r(x, y) = x^2 + 2\alpha xy + \beta y^2$.

D'une part, les axes de symétrie d'une conique dégénérée sont les bissectrices des droites l_1 et l_2 . Tout point P sur les axes vérifie donc la condition $\delta(P, l_1) = \delta(P, l_2)$ où $\delta(P, d)$ est la distance entre un point et une droite. Autrement dit :

$$\begin{aligned} \frac{l_1(P)}{\|\nabla l_1\|} &= \pm \frac{l_2(P)}{\|\nabla l_2\|} \\ \Leftrightarrow \frac{l_1(P)^2}{\|\nabla l_1\|^2} &= \frac{l_2(P)^2}{\|\nabla l_2\|^2} \\ \Leftrightarrow \alpha x^2 + (\beta - 1)xy - \alpha y^2 &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part, soit une hyperbole d'équation $f(x, y) = 0$. On peut alors écrire

$$f(x, y) = f_2(x, y) + f_1(x, y) + f_0$$

où $f_i(x, y)$ sont des polynômes homogènes de degré i . La direction des asymptotes est alors donnée par $f_2(x, y) = 0$.

Dans notre cas, $(g_{C,r})_2(x, y) = \alpha x^2 + (\beta - 1)xy - \alpha y^2$. Donc, la direction des asymptotes de $\mathcal{L}_{C,r}$ est la même que celle des bissectrices de r , elles sont donc parallèles.

Point d'intersection des asymptotes. Quitte à changer de repère de coordonnées, on peut supposer que r est de la forme :

$$r(x, y) = x^2 - \beta y^2 \quad \text{avec } \beta > 0$$

Le point d'intersection des asymptotes est le centre de symétrie de l'hyperbole.

Une symétrie centrale de centre $C = (x_C, y_C)$ est une application :

$$\sigma_C : (x, y) \mapsto (2x_C - x, 2y_C - y)$$

Montrons alors que $\mathcal{L}_{C,r} = \{g_{C,r}(x, y) = 0\}$ est invariante par σ_{G_0} .

Dans notre cas, les points L_1 et L_2 sont donnés par :

$$\begin{aligned} L_1 &= \left(u - \frac{(u + \sqrt{\beta}v)}{\beta + 1}, v - \frac{(u + \sqrt{\beta}v)\sqrt{\beta}}{\beta + 1} \right) \\ L_2 &= \left(u - \frac{(u - \sqrt{\beta}v)}{\beta + 1}, v - \frac{(u - \sqrt{\beta}v)\sqrt{\beta}}{\beta + 1} \right) \end{aligned}$$

D'où

$$G_0 = \left(\frac{\beta u}{\beta + 1}, \frac{v}{\beta + 1} \right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} g_{C,r}(\sigma_{G_0}(x, y)) &= - \left(2 \frac{\beta u}{\beta + 1} - x - u \right) \beta \left(2 \frac{v}{\beta + 1} - y \right) \\ &\quad - \left(2 \frac{v}{\beta + 1} - y - v \right) \left(2 \frac{\beta u}{\beta + 1} - x \right) \\ &= -\beta \left(\frac{(\beta - 1)u}{\beta + 1} - x \right) \left(\frac{2v}{\beta + 1} - y \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{(\beta-1)v}{\beta+1} + y \right) \left(\frac{2\beta u}{\beta+1} - x \right) \\
= & -\beta \left(\frac{2(\beta-1)uv}{(\beta+1)^2} - \frac{2v}{\beta+1}x - \frac{(\beta-1)u}{\beta+1}y + xy \right) \\
& + \left(\frac{2(\beta-1)\beta uv}{(\beta+1)^2} - \frac{(\beta-1)v}{\beta+1}x + \frac{2\beta u}{\beta+1}y - xy \right) \\
= & \frac{\beta+1}{\beta+1}vx + \frac{\beta(\beta+1)}{\beta+1}uy - (\beta+1)xy \\
= & g_{\mathcal{C},r}(x, y)
\end{aligned}$$

Remarque A.0.2. Les asymptotes de $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ forment une conique dégénérée $\bar{g}$ d'équation

$$\bar{g}(x, y) = (x - x_{G_0}, y - y_{G_0})S \begin{pmatrix} x - x_{G_0} \\ y - y_{G_0} \end{pmatrix}$$

où S est la matrice

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta-1}{2} \\ \frac{\beta-1}{2} & -\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A^\ell J - JA^\ell \end{pmatrix}$$

(ii) Le gradient de $g_{\mathcal{C},r}$ est donné par

$$\nabla_{(x,y)} g_{\mathcal{C},r} = A^\ell J \begin{pmatrix} x - u \\ y - v \end{pmatrix} - JA^\ell \begin{pmatrix} x - x_R \\ y - y_R \end{pmatrix} = 2S \begin{pmatrix} x - x_{G_0} \\ y - y_{G_0} \end{pmatrix}$$

Si $R \neq (u, v)$, alors

$$\nabla_R g_{\mathcal{C},r} = A^\ell \begin{pmatrix} -(y_R - v) \\ x_R - u \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{puisque } \det(A^\ell) < 0.$$

Donc, comme $g_{\mathcal{C},r}(x_R, y_R) = 0$, on a bien que R est un point lisse de $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$.

Calculons maintenant le gradient $\nabla_{L_i} g_{\mathcal{C},r}$, $i = 1, 2$.

Comme r est une conique dégénérée en deux droites distinctes, alors $L_1 \neq L_2$ et $L_i \neq G_0$, $i = 1, 2$. Donc

$$\nabla_{L_i} g_{\mathcal{C},r} = 2S \begin{pmatrix} x - x_{G_0} \\ y - y_{G_0} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{puisque } \det(S) < 0$$

Donc, comme $g_{\mathcal{C},r}(L_i) = 0$, on a bien que L_i est un point lisse de $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$, $i = 1, 2$.

(iii) Par le Théorème de Bézout, le nombre de points d'intersection entre l'hyperbole $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ et la conique dégénérée r est quatre. Comme le point R est un point singulier de r , nous avons bien quatre points d'intersection (comptés avec multiplicité) entre ces deux courbes, à savoir R , L_1 et L_2 .

(iv) Le point $P \in \mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ si et seulement si $g_{\mathcal{C},r}(P) = 0$, c'est à dire si et seulement si le gradient $\nabla_P \mathcal{C}$ est colinéaire au gradient $\nabla_P r$. Or, pour tout cercle $\mathcal{C}'$ concentrique à $\mathcal{C}$, comme le gradient est indépendant du rayon du cercle, nous avons

$$\nabla_P \mathcal{C}' = \nabla_P \mathcal{C}$$

De plus, comme il s'agit de cercles concentriques, la donnée d'un point détermine de manière unique le rayon du cercle. Il existe donc un cercle $\mathcal{C}'$ concentrique à $\mathcal{C}$ passant par P .

De même, pour toute hyperbole q de la forme $q = r + cte$

$$\nabla_P q = \nabla_P r$$

et, puisque les asymptotes sont fixées, la donnée d'un point permet de déterminer la constante et donc l'équation de la conique q passant par P .

Ainsi, pour un point P tel que $g_{\mathcal{C},r}(P) = 0$ et $\mathcal{C}'(P) = q(P) = 0$,

$$0 = \det(\nabla_P \mathcal{C}, \nabla_P r) = \det(\nabla_P \mathcal{C}', \nabla_P q)$$

donc les gradients $\nabla_P \mathcal{C}'$ et $\nabla_P q$ sont colinéaires et, puisque $\mathcal{C}'(P) = q(P) = 0$, par l'Assertion 1.3 le cercle $\mathcal{C}'$ est tangent à la hyperbole q en P .

- (v) Il s'agit de montrer que $r(P) \geq 0$ pour tout point $P \in \mathcal{L}_{\mathcal{C},r} \cap (\mathbb{R}^2, R)$ si $\mathcal{C}$ est tangent de manière non dégénérée à r en R .

Cependant, comme nous travaillons dans un voisinage de R et que r est normalisée en accord avec $\mathcal{C}$, il suffit de montrer que pour tout point $P_{\mathcal{L}} \in T_R^{\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}}$ et tout point $P_{\mathcal{C}} \in T_R^{\mathcal{C}_R}$, avec $P_{\mathcal{C}}, P_{\mathcal{L}} \neq R$ et $\mathcal{C}_R$ concentrique à $\mathcal{C}$ passant par R ,

$$r(P_{\mathcal{L}}) = -c \cdot r(P_{\mathcal{C}}) \neq 0$$

où $c \in \mathbb{R}_{>0}$ est une constante positive.

Comme $l_1(R) = l_2(R) = 0$, le gradient de $g_{\mathcal{C},r}$ au point R s'écrit (à une constante multiplicative près) à l'aide de l'équation (A.3)

$$\nabla_R g_{\mathcal{C},r} = \det(\nabla l_1, \nabla_R \mathcal{C}) \cdot \nabla l_2 + \det(\nabla l_2, \nabla_R \mathcal{C}) \cdot \nabla l_1$$

Puisque $\nabla_P \mathcal{C} = \nabla_P \mathcal{C}'$ pour tout cercle $\mathcal{C}'$ concentrique à $\mathcal{C}$, on a en particulier $\nabla_P \mathcal{C} = \nabla_P \mathcal{C}_R$ où $\mathcal{C}_R$ est le cercle concentrique à $\mathcal{C}$ passant par le point singulier R . D'où

$$\begin{aligned} \nabla_R g_{\mathcal{C},r} &= \det(\nabla l_1, \nabla_R \mathcal{C}_R) \cdot \nabla l_2 + \det(\nabla l_2, \nabla_R \mathcal{C}_R) \cdot \nabla l_1 \\ &= \langle \nabla l_1 \mid \tau_{\mathcal{C}} \rangle \cdot \nabla l_2 + \langle \nabla l_2 \mid \tau_{\mathcal{C}} \rangle \cdot \nabla l_1 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

où $\tau_{\mathcal{C}} := J \nabla_R \mathcal{C}$ est un vecteur tangent au cercle $\mathcal{C}_R$ en R .

Prenons maintenant $\tau_{\mathcal{L}}$ un vecteur tangent à $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$ au point R . Le vecteur $\tau_{\mathcal{L}}$ est donc orthogonal au gradient de $g_{\mathcal{C},r}$.

Ainsi :

$$\tau_{\mathcal{L}} = J \nabla_R g_{\mathcal{C},r} = \langle \nabla l_1 \mid \tau_{\mathcal{C}} \rangle \cdot J \nabla l_2 + \langle \nabla l_2 \mid \tau_{\mathcal{C}} \rangle \cdot J \nabla l_1$$

Choisissons un point $P_{\mathcal{L}}$ sur la droite $T_R^{\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}}$ tel que ses coordonnées soient les coordonnées du vecteur

$$\overrightarrow{OP_{\mathcal{L}}} = \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \end{pmatrix} + \tau_{\mathcal{L}}$$

et évaluons la conique normalisée r au point $P_{\mathcal{L}}$:

$$\begin{aligned} r(P_{\mathcal{L}}) &= l_1(P_{\mathcal{L}}) \cdot l_2(P_{\mathcal{L}}) \\ &= \langle \nabla l_1 \mid \tau_{\mathcal{L}} \rangle \cdot \langle \nabla l_2 \mid \tau_{\mathcal{L}} \rangle \\ &= \langle \nabla l_1 \mid J \nabla l_2 \rangle \langle \nabla l_1 \mid \tau_{\mathcal{C}} \rangle \cdot \langle \nabla l_2 \mid J \nabla l_1 \rangle \langle \nabla l_2 \mid \tau_{\mathcal{C}} \rangle \\ &= \det(\nabla l_1, \nabla l_2) \langle \nabla l_1 \mid \tau_{\mathcal{C}} \rangle \cdot \det(\nabla l_2, \nabla l_1) \langle \nabla l_2 \mid \tau_{\mathcal{C}} \rangle \end{aligned}$$

Le vecteur τ_C est tangent au cercle $\mathcal{C}_R$ au point R . Il existe donc un point $P_C \in T_R^{\mathcal{C}_R}$ qui a pour coordonnées les coordonnées du vecteur

$$\overrightarrow{OP_C} = \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \end{pmatrix} + \tau_C.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} r(P_C) &= -(\det(\nabla l_1, \nabla l_2))^2 \cdot l_1(P_C) l_2(P_C) \\ &= -(\det(\nabla l_1, \nabla l_2))^2 \cdot r(P_C) \end{aligned}$$

Le cercle $\mathcal{C}_R$ est tangent de manière non dégénérée à r en R si et seulement si $T_R^{\mathcal{C}_R} \neq l_i$, $i = 1, 2$, donc si et seulement si $l_i(P_C) \neq 0$ donc si et seulement si

$$r(P_C) = -(\det(\nabla l_1, \nabla l_2))^2 \cdot r(P_C) \neq 0$$

(vi) Soit $\mathcal{C}_R$ tangent à r de manière dégénérée. Supposons que $T_R^{\mathcal{C}_R} = l_1$. Donc, par l'Assertion 1.3, les gradients ∇l_1 et $\nabla_R \mathcal{C}_R$ sont colinéaires donc

$$\det(\nabla l_1, \nabla_R \mathcal{C}_R) = 0.$$

Dans ce cas, par l'équation (A.4), le gradient $\nabla g_{\mathcal{C},r}$ est colinéaire au gradient ∇l_1 .

De plus, comme $g_{\mathcal{C},r}$ et l_1 passent par R , on a, par l'Assertion 1.3, que $T_R^{\mathcal{L}^{c,r}} = l_1$. □

Assertion (Rappel de l'Assertion 1.5). *Soit une hyperbole équilatère q et un point C sur l'une des branches de q . Alors il existe un unique cercle de centre C tangent à q . De plus, le point de tangence se situe sur la branche de q qui ne contient pas le point C .*

Il s'agit de montrer que, dans le cas d'une hyperbole équilatère q , il existe exactement deux points d'intersection réels entre q et $\mathcal{L}_{\mathcal{C},q}$, où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre C , l'un étant le point C lui-même (Ass. 1.4(i)). Remarquons que, puisqu'il s'agit de l'intersection de deux coniques, pour une hyperbole $\tilde{q}$ quelconque il existe au plus quatre intersections entre $\tilde{q}$ et $\mathcal{L}_{\mathcal{C},\tilde{q}}$, donc au plus trois cercles de centre C tangents à l'hyperbole $\tilde{q}$.

PREUVE. Rappelons qu'un cercle est tangent à une courbe en un point P si le centre du cercle est sur la normale à la courbe au point P .

Pour tout point $P \in q$, nous allons donc observer la droite normale à q en P ainsi que la droite passant par C et P . Si ces deux droites coïncident, alors il existera un cercle de centre C tangent à q en P .

À l'aide un changement de coordonnées, une hyperbole équilatère q peut s'écrire sous la forme

$$q = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid xy = c\}$$

où c est une constante. Les axes de coordonnées seront alors les asymptotes de q . De plus, pour tout $x > 0$, les points $(x, y) \in q$ appartiendront à l'une des branches et pour $x < 0$, ils appartiendront à l'autre branche.

Supposons que $C = (u, v)$ soit tel que $u > 0$ (le raisonnement est le même pour $u < 0$) et construisons deux applications de $\mathbb{R}$ dans $[-\pi, \pi]$.

La première, α_n , associe à tout point $x \in \mathbb{R}$ l'angle entre la normale à q en $(x, \frac{c}{x})$ et l'axe des abscisses.

La deuxième, α_C , associe à tout point $x \in \mathbb{R}$ l'angle entre la droite passant par $(x, \frac{c}{x})$ et C et l'axe des abscisses.

Pour $x > 0$, la fonction α_n est strictement croissante et $0 < \alpha_n(x) < \frac{\pi}{2}$ tandis que la fonction α_C , elle aussi strictement croissante, est telle que $-\frac{\pi}{2} < \alpha_C(x) < 0$ (voir Fig. A.1).

Les deux graphes n'ayant aucun point d'intersection, il n'existe donc aucun cercle de centre C tangent à cette branche d'hyperbole.

Pour $x < 0$, la fonction α_n est strictement décroissante et $\frac{\pi}{2} < \alpha_n(x) < 0$ tandis que la fonction α_C , est strictement croissante, est telle que $0 < \alpha_C(x) < \frac{\pi}{2}$.

Il existe donc un unique point d'intersection entre les deux graphes et ce point correspond à la coordonnée x du point de tangence entre un cercle de centre C et q .

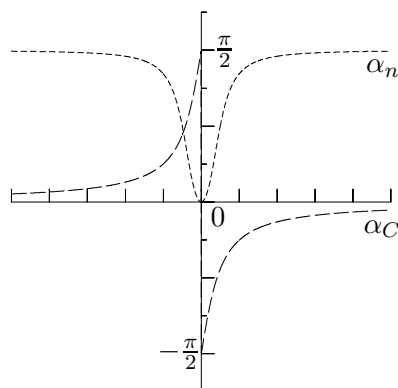


FIGURE A.1 – Les graphes des applications α_n et α_C .

□

Annexe B

Figures en couleur

B.1 Chapitre 1

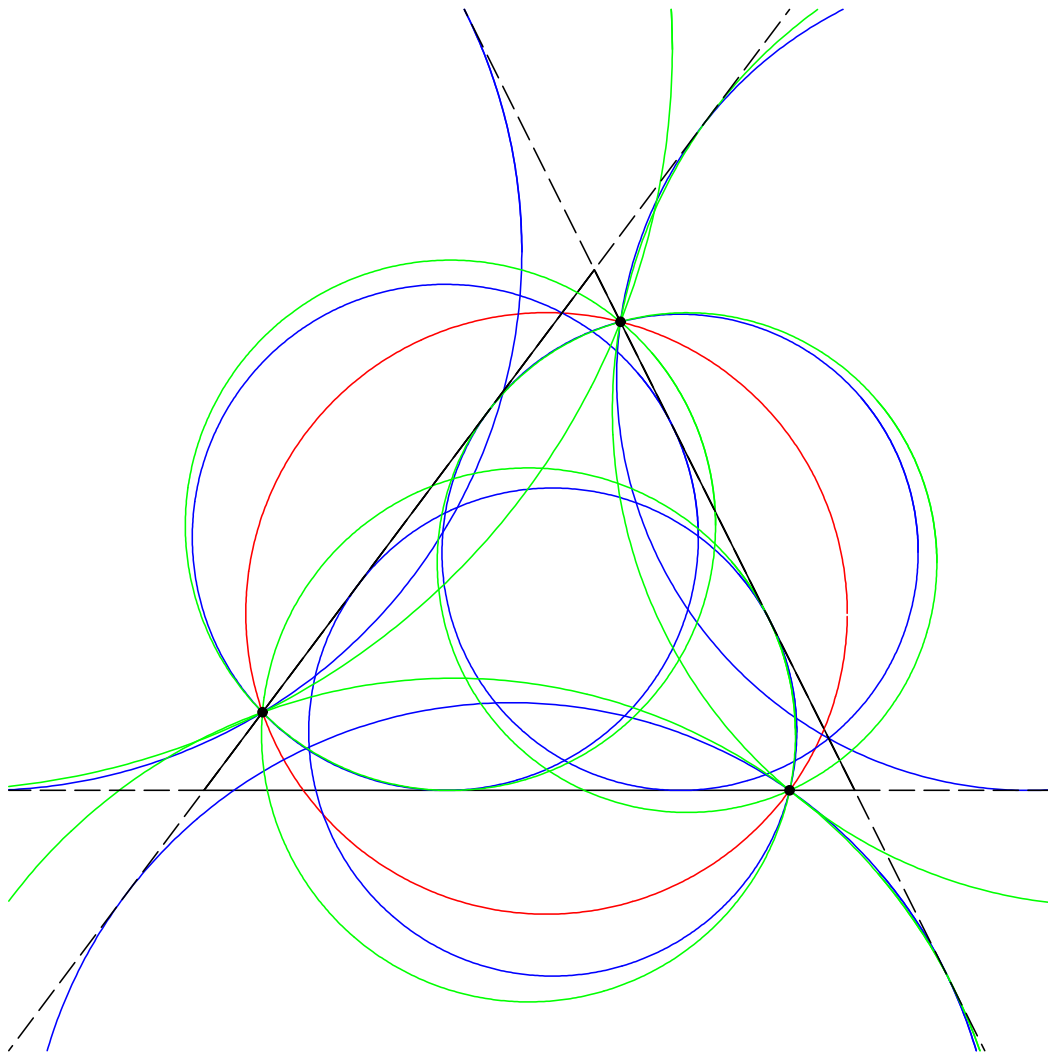


FIGURE B.1 – Les 13 cercles passant par au moins un point marqué du triangle

Pour ne pas surcharger les dessins, nous n'avons pas représenté ici les cercles tangents à trois côtés du triangle.

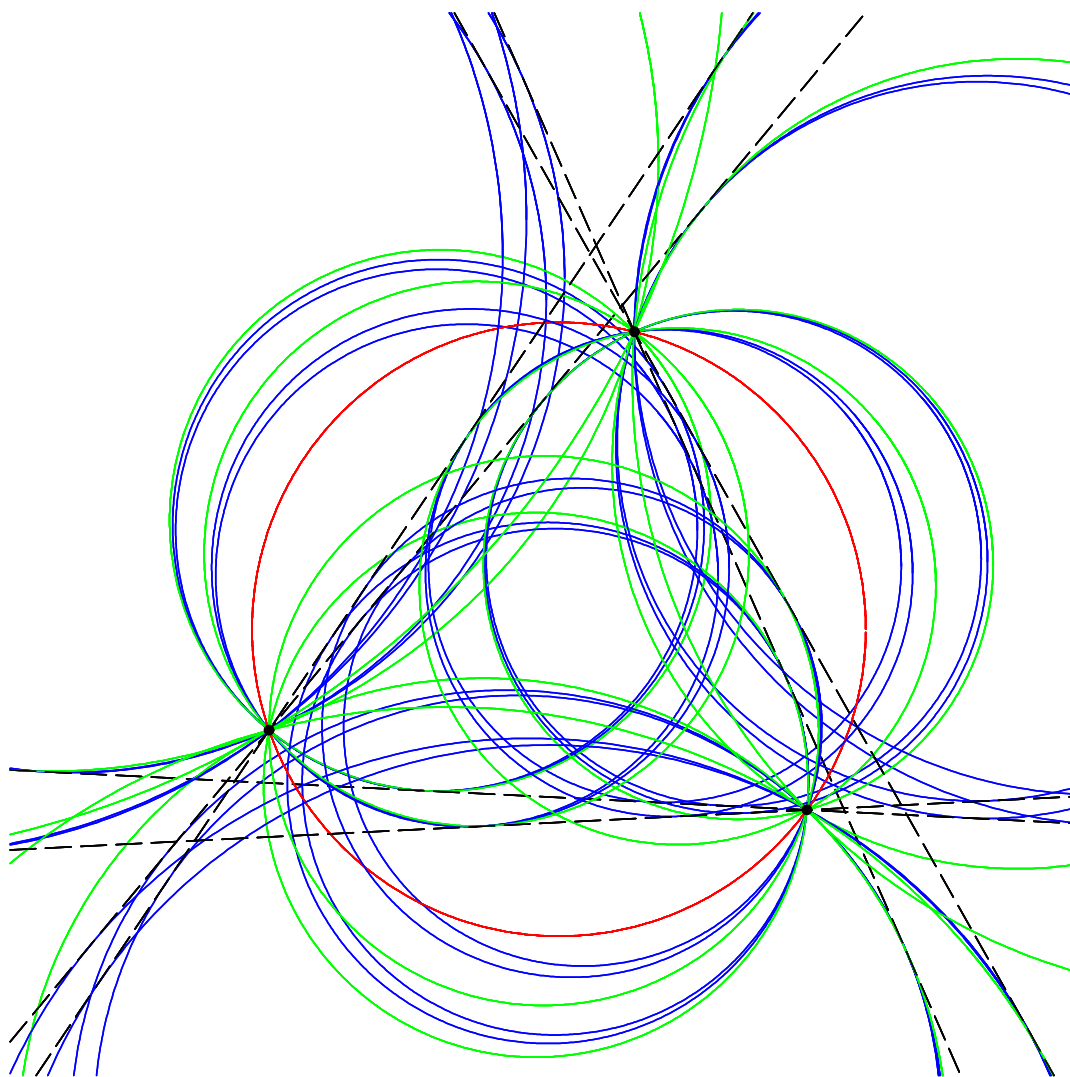


FIGURE B.2 – Une configuration de 3 coniques dégénérées fournissant 136 cercles tangents à des coniques lisses proches

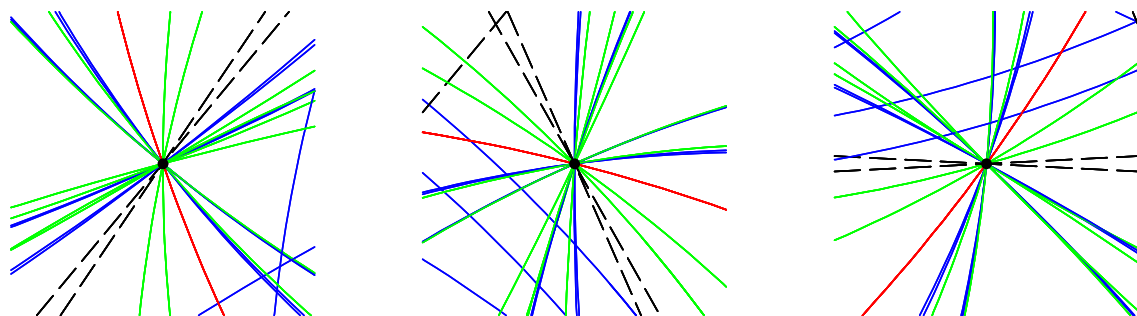
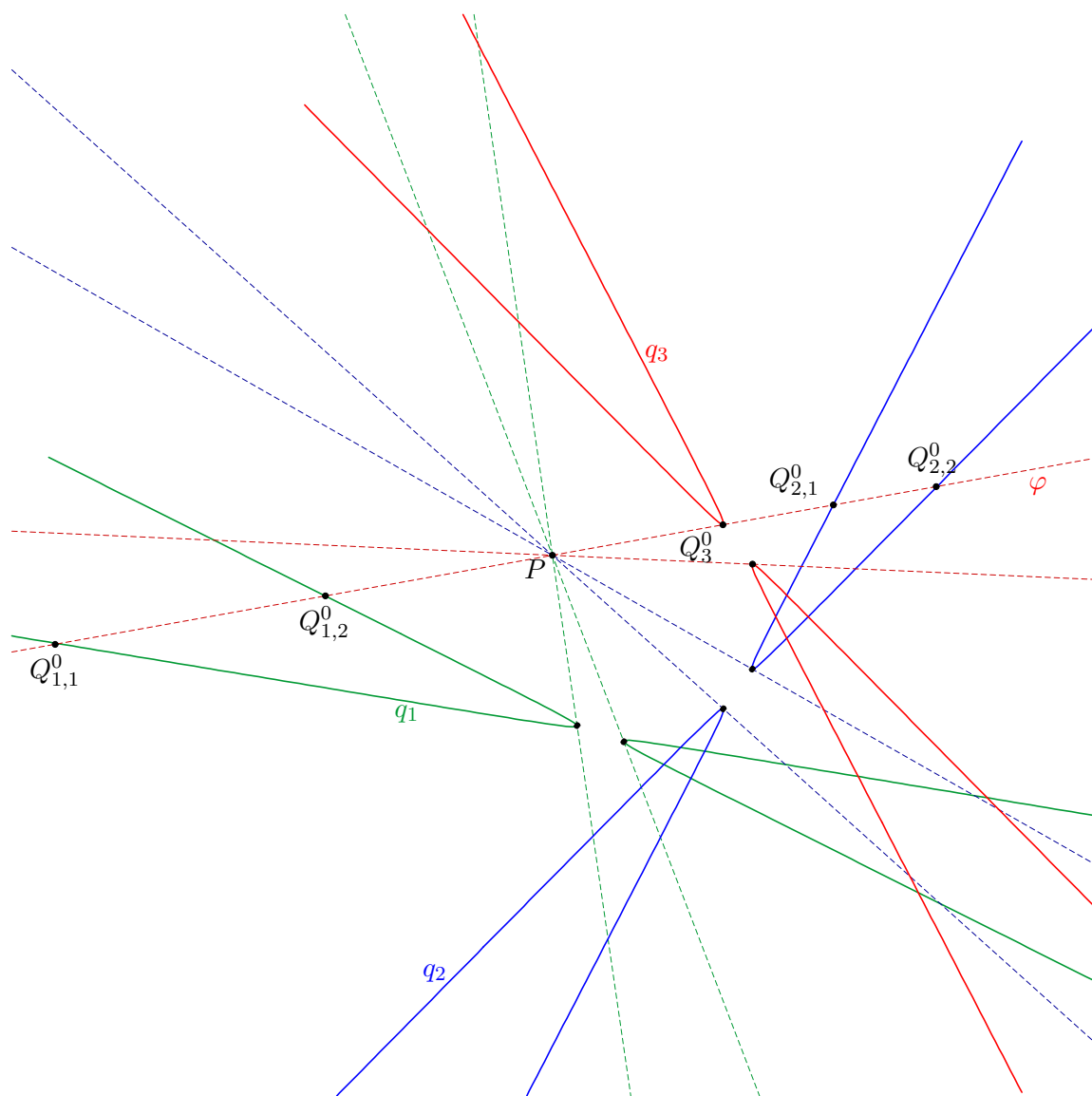


FIGURE B.3 – Les cercles passent tous dans les mêmes secteurs définis par les coniques dégénérées r_1^0 , r_2^0 et r_3^0

B.2 Chapitre 2

FIGURE B.4 – Les 6 droites passant par P et tangentes aux trois coniques fixées

B.3 Chapitre 4

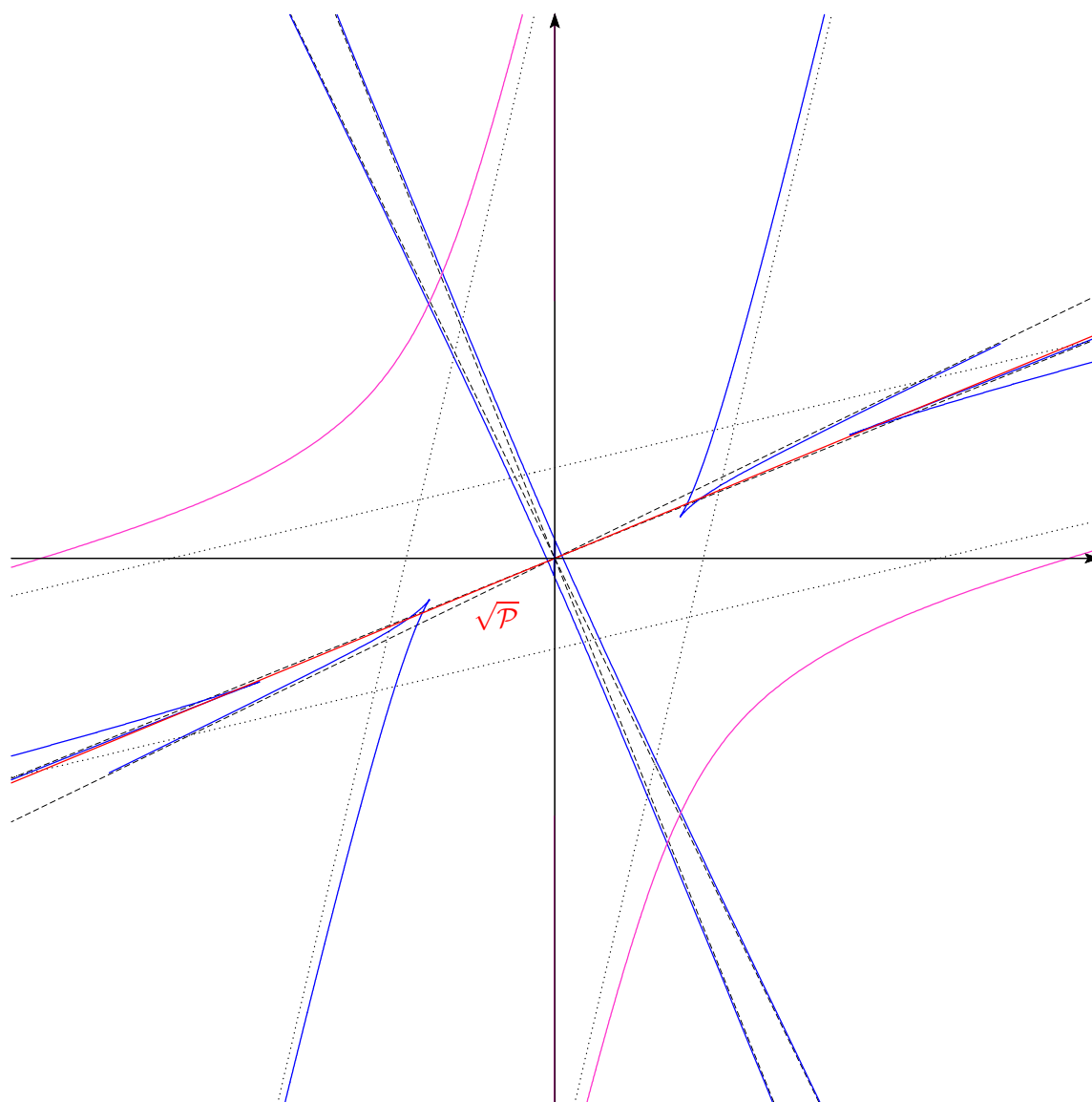
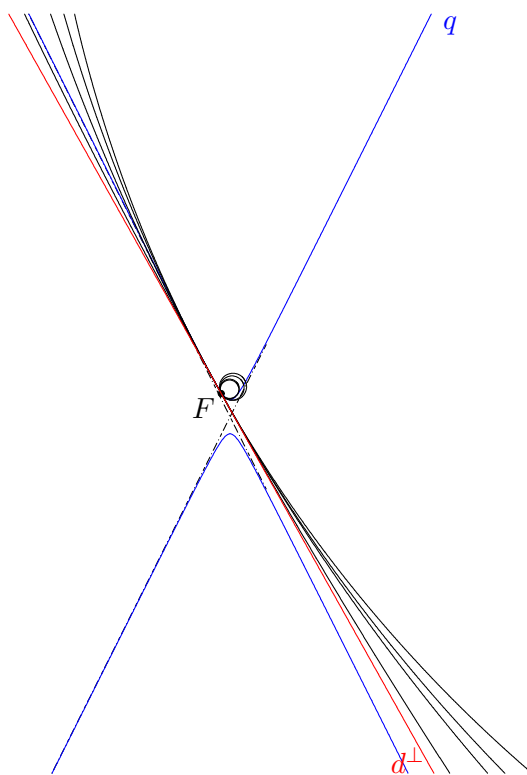


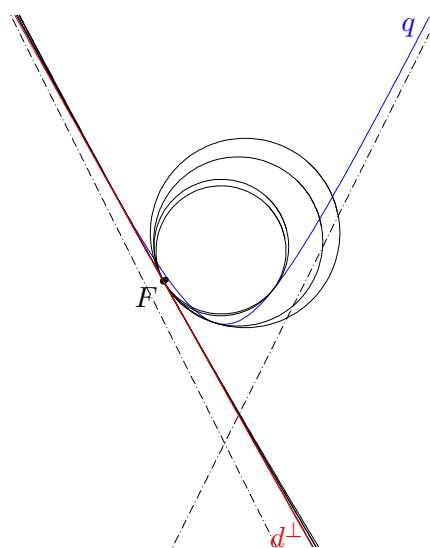
FIGURE B.5 – Une courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ qui fournit 10 intersections avec une droite $\sqrt{\mathcal{P}}$

Remarquons que, malgré les apparences, la droite $\sqrt{\mathcal{P}}$ ne passe pas par l'origine.

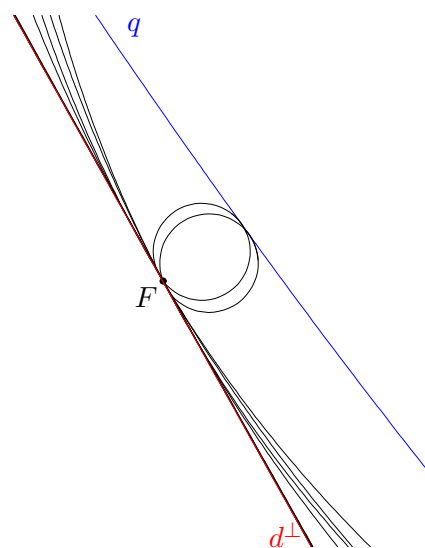
B.4 Chapitre 5



(a) Quatre cercles proches d'un cercle osculateur...



(b) ... plus quatre cercles proches de l'autre cercle osculateur...



(c) ... plus deux cercles situés entre la droite et l'hyperbole.

FIGURE B.6 – 10 cercles passant par un point et tangents à une droite et à une hyperbole

Remarquons ici aussi que la droite $d^\perp$ ne passe pas par le point F .

Le code MAPLE permettant de trouver les coordonnées de ces 10 cercles est donné dans l'Annexe C.

Annexe C

Code Maple permettant de trouver les 10 cercles tangents

Pour trouver numériquement la configuration d'une hyperbole, une droite et un point de la Figure B.6, p.149, qui fournit la solution maximale avec 10 cercles, nous avons utilisé le logiciel de calcul symbolique MAPLE et le logiciel de géométrie dynamique GEOGEBRA. Nous donnons ci-dessous le code MAPLE fournissant les coordonnées des centres des 10 cercles solutions.

```
# MAPLE SCRIPT
> with(plots):
> with(LinearAlgebra):
> assume(alpha1>0,t,real,epsilon>0,x,real,e>0);
>
# les deux asymptotes de l'hyperbole #
> l1:=(x,y)->y-alpha1*x:
> l2:=(x,y)->y+alpha1*x:
# paramétrisations projective et affine de l'hyperbole q #
> xyt:=solve({l1(x,y)=t,l2(x,y)=epsilon/t},{x,y}):
> parP_q:=(T,E)->(subs({t=T,epsilon=E},numer(subs(xyt,x))),
    subs({t=T,epsilon=E},alpha1*numer(subs(xyt,y))),subs({t=T,epsilon=E},denom(subs(xyt,x)))):
> parA_q:=(T,E)->(subs({t=T,epsilon=E},subs(xyt,x)),subs({t=T,epsilon=E},subs(xyt,y))):
>
# l'équation l'équation d'un cercle passant par le point (xpt,ypt) #
> cerP:=(x,y,z)->x^2-xpt^2*z^2+y^2-ypt^2*z^2-(x-xpt*z)*a*z-2*(y-ypt*z)*b*z:
> cerA:=(x,y)->cerP(x,y,1):
>
# l'équation de la sextique comme discriminant #
> eq_sext:=(A,B,E)->subs({a=A,b=B,e=E},discrim(cerP(parP_q(t,e)),t)):
>
# l'équation de la droite et une paramétrisation affine #
> assume(M,real,N,real):
> drA:=x->M*x+N:
> drP:=(x,y,z)->M*x+N*z-y:
> parA_d:=t->(t,drA(t)):parA_d(t):
>
# une paramétrisation de la parabole (lieu des centres des cercles tangents à la droite d
# et passant par le point (xpt,ypt) #
> ProjOrthodr:=(u,v)->(u-(drP(u,v,1))/(M^2+1^2)*M,v+(drP(u,v,1))/(M^2+1^2)):
> x0:=ProjOrthodr(xpt,ypt)[1]:
> y0:=ProjOrthodr(xpt,ypt)[2]:
> p:=-drP(xpt,ypt,1)/sqrt(M^2+1):
> det:=sqrt(M^2+1):
> tourne:=(x,y)->(ProjOrthodr(xpt,ypt)[1]+(x-M*(y))/det,ProjOrthodr(xpt,ypt)[2]+(M*(x)+y)/det):
> parA_para:=t->(factor(tourne(t,t^2/p/2+p/2)[1]),factor(tourne(t,t^2/p/2+p/2)[2])):
>
# PARAMÉTRISATION DE LA SEXTIQUE
> qdot_x:=simplify(diff(parA_q(t,epsilon)[1],t)):
> qdot_y:=simplify(diff(parA_q(t,epsilon)[2],t)):
```

```

# Calcul du facteur R(t) (voir Equation (3.2)) #
> wedge:=(parA_q(t,epsilon)[1]-xpt)*qdot_x-(parA_q(t,epsilon)[2]-ypt)*qdot_y:
> Rt:=simplify(1/2*((parA_q(t,epsilon)[1]-xpt)^2+(parA_q(t,epsilon)[2]-ypt)^2)/wedge):
# la paramétrisation de la sextique donnée par l'Equation (3.1) #
> parA_Sext:=(u,e)->subs({t=u,epsilon=e},
    <parA_q(t,epsilon)[1]|parA_q(t,epsilon)[2]>+Rt*<-qdot_y|qdot_x>):
> parA_Sext(u,e):
>
>
# LES 10 SOLUTIONS
# paramètres de l'hyperbole q #
> eps:=0.2:
> alpha1=2:
# à l'aide du logiciel de géométrie dynamique "Geogebra", nous choisissons un point (xpt10,ypt10)
# qui est à peu près le point de tangence entre deux cercles osculateurs à l'hyperbole définie
# par les paramètres ci-dessus #
> xpt10:=-0.23:
> ypt10:=0.61:
>
> numerik10:=alpha1=2,xpt=xpt10,ypt=ypt10:
>
# recherche des cercles osculateurs à l'hyperbole q passant par le point (xpt,ypt)
>
> # les trois équations qui déterminent l'osculation #
> eq:=subs({numerik10},cerA(parA_q(t,eps))):
> eq:=eq,subs({numerik10},diff(cerA(parA_q(t,eps)),t)):
> eq:=eq,subs({numerik10},diff(cerA(parA_q(t,eps)),t,t)):
>
> ssosc:=solve({eq},{a,b,t}):
>
> # test pour ne retenir que les solutions réelles #
> ptosc:=NULL:
> for i from 1 to nops({ssosc}) do
>   Aa:=subs(ssosc[i],a):
>   if Im(Aa)=0 then
>     ptosc:=ptosc,ssosc[i];
>   end if;
> end do:
# pente des droites passant par le point (xpt10,ypt10) et par le centre d'un cercle osculateur
# à l'hyperbole passant par (xpt10,ypt10) #
> pente[1]:=(ypt10-subs(ptosc[1],b))/(xpt10-subs(ptosc[1],a));
> pente[2]:=(ypt10-subs(ptosc[2],b))/(xpt10-subs(ptosc[2],a));

    pente[1] := 0.1524919707
    pente[2] := 0.5702086352

# nous choisissons une pente proche et déterminons l'équation de la droite y=M10*x+N10
# à laquelle les cercles seront tangents #
> PenteAxe:=0.56;
>
> pert:=-10^(-4):
> DirPara10:=(x,y)->-1/PenteAxe*(x-(xpt10+pert))-(y-ypt10):DirPara10(x,y):
> M10:=coeff(DirPara10(x,y),x):
> N10:=DirPara10(0,0):
> numerik10:=M=M10,N=N10,numerik10:
>
# recherche des cercles réels tangents à l'hyperbole q, la droite y=M10*x+N10
# et passant par le point (xpt,ypt) #
> Digits:=40:
>
> Nrel:=0:
> sol:=solve({subs({numerik10},eq_sext(parA_para(t),eps))=0},{t}):
>
> # test pour choisir les valeurs réelles #
> for i from 1 to nops({sol}) do
>   imm:=Im(subs(sol[i],t));
>   if imm=0 then
>     Nrel :=Nrel+1;
>     TR[Nrel]:=subs(sol[i],t);
>     print(subs({numerik10},parA_para(TR[Nrel])[1]),subs({numerik10},parA_para(TR[Nrel])[2]));

```

```

>     end if:
>   end do:
> print(Nrel);
>
-0.2213658199539635285446366758958919331966 , 0.6133806747779919197526893640154967694889
-0.01349193511327960735141598137482005580318 , 0.7237576964132517593622932240502535476135
0.05131359024329646186374294822530956003929 , 0.7589939457752537066603444715250523977884
40.85787534959198358283579327384505658517 , 23.51536903511395380189802359982193494738
157.2097658122194085217453587845762303277 , 88.57294690089001753186653715948354477571
-0.2227279100167793738201974479318806492758 , 0.6155153308722522736842347369699564540762
-0.01223395726478917539062958371013787772189 , 0.7395696800690596614940203825337482397541
0.07712609738906874848405688489405044464461 , 0.7910300047592619642106821714879981594972
32.41460979182492948184791222937980003248 , 18.98364636023491829962052685276111904685
53.33234405693990954748415223366554694191 , 30.72359375502061157975608488645782067004

10

# Dessin des 10 cercles (voir aussi la Figure B.6) #
> xmin:=-1:xmax:=-xmin:
> ymin:=xmin:ymax:=-xmin:
>
> pl_con:=plot([subs({numerik10},parA_q(t,eps)[1]),subs({numerik10},parA_q(t,eps)[2]),t=-10..10],
numpoints=20000,color=blue):
> pl_para:=plot([subs({numerik10},parA_para(t)[1]),subs({numerik10},parA_para(t)[2]),t=-10..10],
numpoints=20000,color=green):
>
> pl_list:=NULL:
> for i from 1 to Nrel do
>   AA:=subs({numerik10},parA_para(TR[i])[1]);
>   BB:=subs({numerik10},parA_para(TR[i])[2]);
>   RR:=sqrt((xpt10-AA)^2+(ypt10-BB)^2);
>   pl_cer:=implicitplot(subs({numerik10},subs({a=AA,b=BB},cerA(x,y)=0)),
x=AA-RR..AA+RR,y=BB-RR..BB+RR,numpoints=20000):
>   pl_list:=pl_list,pl_cer
> end do:
> display({pl_con,pl_list,pl_para},view=[xmin..xmax,ymin..ymax],scaling=constrained);

```


Bibliographie

- [BKT08] Andrew Bashelor, Amy Ksir, and Will Traves. Enumerative algebraic geometry of conics. *Amer. Math. Monthly*, 115(8) :701–728, 2008.
- [Har95] Joe Harris. *Algebraic geometry*, volume 133 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. A first course, Corrected reprint of the 1992 original.
- [Kne12] Adolf Kneser. Bemerkungen über die anzahl der extreme der krümmung auf geschlossenen kurven und über verwandte fragen in einer nichteuklidischen geometrie. In *Festschrift Heinrich Weber zu seinem siebzigsten Geburtstag am 5. März 1912*, pages 170–180, Leipzig, 1912. Teubner.
- [Lei62] G. W. Leibniz. Acta Eruditorum 1692. In *Mathematische Schriften. Bd. V : Die mathematischen Abhandlungen*, Herausgegeben von C. I. Gerhardt, pages viii+418 pp. (7 inserts). Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 1962.
- [Lei89] G. W. Leibniz. *La naissance du calcul différentiel*. Mathesis. Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 1989. 26 articles des Acta Eruditorum.
- [RTV97] Felice Ronga, Alberto Tognoli, and Thierry Vust. The number of conics tangent to five given conics : the real case. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, 10(2) :391–421, 1997.
- [Wel06] J.-Y. Welschinger. Towards relative invariants of real symplectic four-manifolds. *Geom. Funct. Anal.*, 16(5) :1157–1182, 2006.

Table des figures

1	8 cercles tangents à 3 cercles donnés	1
2	Cinq coniques réelles fournissant 3264 coniques réelles tangentes	2
3	Une différence entre coniques et cercles	3
1.1	Les tangences dégénérées et non dégénérées	9
1.2	Les secteurs négatifs de r définis par le cercle $\mathcal{C}_R$	9
1.3	Les deux manières de lisser le point singulier d'une conique dégénérée	9
1.4	Une conique en accord avec le cercle	10
1.5	Les configurations que l'on ne veut pas	10
1.6	Illustration de la Proposition 1.2.7	11
1.7	Comportement du nombre de préimages donné par la Proposition 1.2.8	12
1.8	Comportement du nombre de préimages pour l'application F	12
1.9	Un cercle tangent à $3 - k$ côtés d'un triangle est transverse aux autres côtés	13
1.10	Les secteurs S_i^1 et S_i^2 recouvrent presque tout le plan	13
1.11	La courbe $\mathcal{L}_{\mathcal{C},r}$	19
1.12	Assertion 1.4(iv)	19
1.13	Assertion 1.5 : Le cercle de centre C tangent à q	21
1.14	Les deux points que l'on ne veut pas	21
1.15	Interprétation géométrique du discriminant	26
2.1	Une différence entre coniques et cercles	33
2.2	Comportements observés pour des coniques passant par les points $P \pm i\sqrt{\varepsilon}v$	34
2.3	Position relative des points P, Q_3, Q_1 et Q_2 - Cas 1	36
2.4	Position relative des points P, Q_3, Q_1 et Q_2 - Cas 2	36
2.5	Illustration de la Remarque 2.3.1	38
2.6	Illustration de la Remarque 2.4.2	46
3.1	La courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ comme enveloppe des médiatrices	53
3.2	Le produit vectoriel est positif	54
3.3	Le produit vectoriel est négatif	54
3.4	Illustration du Corollaire 3.1.7	56
3.5	La développée de l'hyperbole $\mathcal{L}_q$	61
3.6	Illustration de la Proposition 3.1.17(i)	62
3.7	Quelques cercles des deux familles de cercles bitangents à l'hyperbole	64
3.8	Les points remarquables Q_{C_1} , Q_{T_1} et Q'_{B_1} et leurs cercles et droite respectifs	68
3.9	La courbe $\mathcal{S}_F$ lorsque q est dégénérée en deux droites	69
3.10	La courbe $\mathcal{S}_F$ lorsque F est à l'intérieur d'un cercle hyperosculateur	71
3.11	La courbe $\mathcal{S}_F$ lorsque F est à l'intérieur de q	72
3.12	La courbe $\mathcal{S}_F$ lorsque F est à l'extérieur des asymptotes	75
3.13	La courbe $\mathcal{S}_F$ lorsque F est à l'extérieur de q et à l'intérieur des asymptotes	77

4.1	Transformation d'une souris par l'application conforme $z \mapsto z^2$	80
4.2	Le secteur orienté $\text{sec}_{\mathbb{R}^2}(t_1, t_2)$	84
4.3	$\omega_{\mathcal{A}}(t_2, t_1)$ et ${}^c\omega_{\mathcal{A}}(t_2, t_1)$	85
4.4	Illustration du Lemme 4.3.6	86
4.5	La courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ lorsque F est à l'intérieur d'un cercle hyperosculateur	88
4.6	La courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ lorsque F est à l'intérieur de q	91
4.7	Illustration de la Remarque (iii)	93
4.8	Illustration de la Définition 4.3.18	94
4.9	La courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ lorsque le point F est à l'extérieur de l'hyperbole	95
4.10	Les branches (1), (1'), (3) et (3').	96
4.11	Un profil de cusp et son image par symétrie centrale	96
4.12	La position relative des droites a_2 , t_C , a_1 , a'_2 et CC'	97
4.13	Un couple de profils de cusp et les branches δ et δ'	101
4.14	Illustration du Corollaire 4.3.28	103
4.15	La courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ lorsque F est à l'extérieur des asymptotes	104
4.16	La position relative des asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$	105
4.17	Idée de la Preuve du Lemme 4.3.32(I)	107
4.18	La courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ lorsque F est à l'intérieur des asymptotes à l'extérieur de q	109
4.19	Esquisse d'une droite qui intersecte chaque profil de cusp en deux points	110
4.20	La position relative des asymptotes de $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$	111
5.1	Lieu des points de tangence entre deux cercles osculateurs	116
5.2	Les trois composantes connexes	120
5.3	Illustration de la preuve de la Proposition 5.1.3	122
5.4	Illustration de la Proposition 5.1.4	123
5.5	Illustration de la preuve de la Proposition 5.1.4	123
5.6	Illustration de la preuve de la Proposition 5.1.4	124
5.7	La position respective des vecteurs	126
5.8	Illustration de la preuve de l'Assertion 5.4	126
5.9	La situation initiale	128
5.10	La perturbation	128
A.1	Les graphes des applications α_n et α_C .	143
B.1	Les 13 cercles passant par au moins un point marqué du triangle	145
B.2	Une configuration de 3 coniques dégénérées fournissant 136 cercles	146
B.3	Les cercles passent tous dans les mêmes secteurs	146
B.4	Les 6 droites passant par P et tangentes aux trois coniques fixées	147
B.5	Une courbe $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ qui fournit 10 intersections avec une droite $\sqrt{\mathcal{P}}$	148
B.6	10 cercles passant par un point et tangents à une droite et à une hyperbole	149