ОТЗЫВ О РАБОТЕ ПРОФ. С. П. ТИМОШЕНКО „ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ“ [4]

Работа проф. С. П. Тимошенко „Об устойчивости упругих систем“ заключает решение очень значительного числа весьма интересных и важных задач о нахождении критической нагрузки для стержней и пластин, причем для решения всех этих вопросов автор пользуется одним и тем же методом, что составляет большое достоинство работы.

Сущность этого метода заключается в том, что, допустив разложимость функции, выражающей перемещение точек тела, в сходящийся ряд:

$$w = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 \ldots,$$

где φ — нормальные функции координат x и y или одной только координаты x (для стержней), автор составляет выражения v — изменения энергии упругих сил системы и T — работы внешних сил и, уравнивая эти выражения, находит выражение для критической нагрузки P, подбирая в нем отношения между коэффициентами ряда a_1, a_2, $a_3, \ldots$ так, чтобы P было наименьшим. Сходимость выбранного ряда, а также и степень точности результатов, получаемых при незначительном числе членов его, автор проверяет, — правда, не всегда с достаточной полнотой, — сравнением последовательных приближений в получаемых результатах, причем такое сравнение, а также и сопоставление с точными решениями, когда они известны, указывает в большинстве случаев на достаточную точность второго приближения $|a_3 = 0,\ a_4 = 0, \ldots|$, если только нормальные функции выбраны удачно.

При таких сопоставлениях автор неоднократно указывает, насколько применяемый им метод облегчает получение результатов по сравнению с теми способами, которыми пользовался ранее он сам и его предшественники; это указание мне представляется не вполне верным; дело в том, что весьма простые решения можно получить и обычным путем, т. е. не прибегая к рассмотрению энергии системы, если только сходимость ряда для w достаточно велика. При этом простой подстановкой разложения для w в общее дифференциальное уравнение равновесия, затем умножением полученного выражения на $\varphi_k\, dx\, dy$ и интегрированием по всему объему тела мы получим уравнение, связывающее коэффициент a_k со всеми другими, если только функции φ выбраны так, что

$$\int\int \varphi_n \varphi_k\, dx\, dy = 0 \text{ при } n \neq k;$$

это равенство имеет место почти во всех задачах рассматриваемой работы, так как автор обычно берет выражение w в виде тригонометрических рядов, где это условие выполнено; если же почему-либо желательно разложение по целым рациональным функциям — их можно заменить таковыми. Написав из полученного соотношения столько уравнений, сколько членов ряда мы желаем сохранить, и уравнивая нулю определитель из множителей при коэффициентах, мы сведем задачу о нахождении критической нагрузки к определению наименьшего корня целой рациональной функции, высшая степень которой равна числу сохраненных членов. Так, например, в классической задаче Эйлера о „силе колонны", положив, как сделано у автора,

$$w = a_1 \cos\frac{\pi x}{2l} + a_2 \cos\frac{3\pi x}{2l} + a_3 \cos\frac{5\pi x}{2l} + \ldots,$$

мы получим указанным путем такое уравнение для коэффициента a_k

$$0 = a_k\left(1 - \frac{2\alpha}{k^2\pi^2} + \frac{8\alpha}{k^4\pi^4}\right) + \frac{32\alpha}{k^3\pi^4}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{ia_i}{(i+k)^2} - \sum_{i=1}^{k} \frac{ia_i}{(i-k)^2}\right),$$

где i и k — нечетные числа, первая сумма в скобках берется только когда $\frac{(i-k)}{2}$ четное, а вторая — если это количество нечетное; множитель же α связан с критической нагрузкой соотношением

$$\alpha = \frac{Pl^2}{EI}.$$

Сохраняя только первый член разложения, мы получим

$$1 - \frac{2\alpha}{\pi^2} + \frac{8\alpha}{\pi^4} = 0,$$

откуда

$$P = \frac{8{,}30EI}{l^2},$$

вместо $\frac{7{,}87\, EI}{l^2}$; при двух, трех членах получим для α квадратное, кубичное... уравнение, наименьший корень которого находится весьма просто, так как приближенное значение его уже известно. Заметим, что получаемые таким образом результаты не требуют решения дифференциального уравнения равновесия, т. е. нахождения коэффициентов a_k, и будут тождественны с найденными проф. Тимошенко. Кроме того, благодаря некоторым свойствам получаемых определителей можно получить выражения для критических нагрузок в виде весьма быстро сходящихся рядов.

Рассматривая критическую нагрузку для пластинки, нагруженной сжимающими силами, распределенными линейно относительно ординаты y, автор говорит: „нам пришлось убедиться, что интегрирование уравнения способом бесконечных рядов представляет собой весьма сложную работу, так как ряды в нужных для практики пределах оказываются медленно сходящимися; из произведенных вычислений выяснилось, что для квадратной пластинки $U > 240$“. Автор не указывает, какими именно рядами он пользовался, но если взять выражение для перемещений w в простейшей форме, данной еще Navier,

$$w = \sum_i \sum_j a_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b},$$

то мы без труда находим уравнение для a_{ik}

$$a_{ik} \left\{ \left(\frac{k^2 b^2}{a^2} + i^2 \right)^2 + \frac{i^2 U}{\pi^2} \frac{0{,}5 - \alpha}{1 - \alpha} \right\} + \frac{8 i^2 U}{(1 - \alpha)\pi^4} \sum_n \frac{k n a_{in}}{(k^2 - n^2)^2} = 0,$$

где k и n — целые числа, удовлетворяющие условию $[k + n]$ нечетное. Взяв всего два члена этого ряда и составив соответственный определитель второго порядка, мы найдем формулу, полученную автором и дающую для квадратной пластинки $U = 274$.

Таким образом ясно, что возможность быстрого нахождения критической нагрузки обусловливается не применением того или иного метода, а сравнительно быстрой сходимостью рядов, составленных из удачно подобранных нормальных функций.

Вопросы, рассматриваемые автором работы, чрезвычайно разнообразны и в большинстве глубоко интересны и нужны для различных отраслей инженерного дела; почти всюду решения их приведены в таком виде, что непосредственное пользование ими для задач практического характера не представляет никаких затруднений. Для составления многочисленных таблиц, позволяющих с чрезвычайной быстротой находить критическую нагрузку, автором затрачено немало труда, и многие цифры таблиц, которые мне приходилось так или иначе проверять, всегда оказывались верными. Единственный замеченный мною ошибочный результат относится, к сожалению, к чрезвычайно важному для практики случаю — получен при рассмотрении вопроса об устойчивости пластины при скалывании (стенки балок). Ошибка, вполне заметная для практических приложений, здесь произошла вследствие выбора нормальной функции, не удовлетворяющей условиям на контуре; верное решение нетрудно найти, взяв для этой функции вышеупомянутое выражение Navier.

Кроме того, я полагаю, что работа проф. Тимошенко выиграла бы, если бы в ней отсутствовали § 12 и 33, трактующие об устойчивости конструкций за границами упругости; впрочем, наличие их обусловлено, конечно, господствующей пока привычкой — измерять достоинство сооружения пятикратной прочностью его, считая от разрушающей нагрузки.

Но указанные недочеты лишь в самой незначительной мере уменьшают огромную ценность рассматриваемой работы. Вопрос об устойчивости отдельных частей сооружения уже и сейчас имеет весьма серьезное значение для многих конструкций и в особенности в судовых корпусах; но еще большим будет это значение в ближайшем будущем, при общей тенденции инженеров утилизировать успехи современной металлургии для уменьшения веса сооружений путем повышения допускаемых напряжений, что по большей части сводится к утонению отдельных частей и к соответственному уменьшению их критических нагрузок. Работа С. П. Тимошенко кладет прочное основание для дальнейшего прогресса многих отраслей инженерного дела и потому в полной мере заслуживает премии имени Журавского.