А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА"

INSTITUTE OF MECHANICS
JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 3, 1940

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Г. И. ПЕТРОВ

(Москва)

При исследовании распространения колебаний в плоском прямолинейном потоке вязкой жидкости и устойчивости таких течений задача приводится к краевой задаче для уравнения:

$$L(\varphi) = \varphi^{\mathrm{IV}}(y) - 2\alpha^2 \varphi''(y) + \\ + \alpha^4 \varphi(y) - \lambda \{ [U(y) - c] [\varphi''(y) - \alpha^2 \varphi(y)] - U''(y)\varphi(y) \} = 0 \tag{A}$$

(где $\lambda = i\alpha R$, а R есть число Рейнольдса) при граничных условиях $\varphi = 0$ и $\varphi' = 0$.

Это уравнение с переменными коэффициентами не может быть приведено к самосопряженному.

В исследовании устойчивости заданного течения задача может быть поставлена как задача об отыскании такого числа λ, зависящего от $c = c_r + ic_i$ при заданных действительных α так, чтобы решение этой системы не обратилось тождественно в нуль.

Возрастание или затухание колебаний зависит от знака c_i.

Решение уравнения (А) может быть написано в конечном виде только в случаях постоянной скорости или линейной зависимости основной скорости от y; причем во втором случае исследование трансцендентного уравнения для R представляет большие трудности (см. работу Хопфа [1]).

Приближенные методы решения этой задачи, применявшиеся до сих пор, не являются удовлетворительными в силу их исключительной громоздкости и недостаточно математической обоснованности (см. работы Хайзенберга [2], Пекерис [3], Толмиен [4], Кармана [5] и др.).

Целью этой работы является строгое обоснование и возможности применения метода Галеркина к системам, собственные значения которых не обладают экстремальными свойствами, как это имеет место в нашей задаче (см. работу автора [6]).

1. Имеем линейное уравнение

$$L(\varphi) - f = 0 \tag{1.1}$$

и систему граничных условий:

φ_s — система функций, удовлетворяющая граничным условиям нашей задачи,

v_i — полная система ортогональных функций.

Подставим в уравнение (1.1) линейную комбинацию:

$$\varphi^{(n)} = \sum_{s=1}^{n} a_s \varphi_s; \tag{1.2}$$

тогда

$$L(\varphi^{(n)}) - f = \psi_n(a_s, \varphi_s).$$

Известно, что если v_i полная система ортогональных функций, то интеграл

$$\int_0^1 \left[\psi_n - \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i\right]^2 dy > 0$$

может быть сделан сколь угодно малым при $m \to \infty$, если коэффициенты β_i определены как коэффициенты Фурье:

$$\beta_i^{(n)} = \int_0^1 \psi_n v_i\, dy = \int_0^1 L(\varphi^{(n)}) v_i\, dy - \int_0^1 f v_i\, dy. \tag{1.3}$$

При достаточно большом m

$$\int_0^1 \psi_n^2\, dy - \sum_{i=1}^{m} \left[\beta_i^{(n)}\right]^2 < \varepsilon \qquad (n < m),$$

где ε может стать сколь угодно малым.

Потребуем, чтобы n коэффициентов $\beta_i^{(n)}$ равнялись нулю.

Получим n уравнений для определения n коэффициентов a_s:

$$\int_0^1 L(\varphi^{(n)}) v_i\, dy - \int_0^1 f v_i\, dy = 0. \tag{1.4}$$

Введем обозначения:

$$\gamma_{si} = \int_0^1 L(\varphi_s) v_i\, dy \quad (i \neq s), \qquad 1 + \gamma_{ss} = \int_0^1 L(\varphi_s) v_s\, dy; \qquad b_i = \int_0^1 f v_i\, dy.$$

Тогда уравнения (1.4) могут быть написаны в виде:

$$a_i + \sum_{s=1}^{n} \gamma_{si} a_s = b_i. \tag{1.5}$$

Для того, чтобы решения этой системы $a_s^{(n)}$ при увеличении n стремились к решениям a_s бесконечной системы, достаточно, чтобы сходились ряды

$$\sum\sum |\gamma_{si}|^2, \qquad \sum |b_k|^2. \tag{1.6}$$

Тогда бесконечная система (1.5) имеет решения a_s и ряд $\sum\limits_{s=1}^{n} |a_s|^2$ сходится при $n \to \infty$.

Этих же условий достаточно, чтобы величина

$$\int\limits_0^1 |\psi_n|^2 dy = \sum_{n+1}^{\infty} [\beta_i^{(n)}]^2 < \sum_{s=1}^{n} |a_s|^2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{s=1}^{n} |\gamma_{is}|^2$$

стремилась к нулю при увеличении n.

Этого еще недостаточно, чтобы утверждать, что $\varphi^{(n)}$ стремится к решению системы (1.1).

Если для этой системы можно написать интегральное или интегродифференциальное уравнение с ядром $K(y, s)$, интеграл от квадрата которого ограничен, тогда для нашего приближенного решения $\varphi^{(n)}$ имеет место, например, интегральное уравнение:

$$\varphi^{(n)} = \lambda \int\limits_0^1 K(y, s)\, \varphi^{(n)}(s)\, ds + f + \int\limits_0^1 K(y, s)\, \psi_n(s)\, ds. \tag{1.7}$$

По теореме Шварца имеем:

$$\int\limits_0^1 K(y, s)\, \psi_n(s)\, ds \leqslant \sqrt{\int\limits_0^1 |K(y, s)|^2 ds \int\limits_0^1 |\psi_n(s)|^2 ds}\,. \;= 0 \tag{1.8}$$

Пусть ряд $\varphi^{(n)}$ и в случае интегродифференциального уравнения соответствующие производные этого ряда равномерно сходятся.

Тогда при $n \to \infty$ выражение (1.8) стремится к нулю, т. е. правая часть уравнения (1.7) стремится к правой части интегрального уравнения нашей задачи и $\varphi^{(n)}$ стремится к решению φ системы (1.1).

В случае $f = 0$ система линейных уравнений (1.4) становится однородной и приближенное собственное значение λ_n определяется из условия, что не все $a_s^{(n)}$ тождественно равны нулю[1]. Следовательно, уравнение (1.5) при $n \to \infty$ стремится к однородному интегральному уравнению, соответствующему нашей однородной системе, и $\varphi^{(n)}$ стремится к собственной функции этой системы.

Если точное решение нашей неоднородной системы можно выразить через интегральное или интегродифференциальное уравнение с ядром, интеграл от квадрата которого ограничен, то условия (1.6) достаточны для сходимости ряда (1.2) и некоторых его производных.

---

[1] Условие нормирования $\sum\limits_{s=1}^{n} |a_s|^2 = 1$.

Действительно,

$$\varphi^{(m)}-\varphi^{(n)}=\lambda\int_0^1 K(y,s)(\varphi^{(m)}-\varphi^{(n)})\,ds+\int_0^1 K(y,s)(\psi_m-\psi_n)\,ds,$$

и, применяя теорему Шварца, получим:

$$|\varphi^{(m)}-\varphi^{(n)}|\leqslant\lambda\sqrt{\int_0^1 |K^2|\,ds\int_0^1 |\varphi^{(m)}-\varphi^{(n)}|^2\,ds}+$$

$$+\sqrt{\int_0^1 |K^2|\,ds\int_0^1 |\psi_m-\psi_n|^2\,ds}\qquad (m>n),$$

$$\int_0^1 |\varphi^{(m)}-\varphi^{(n)}|^2\,ds=\sum_{s=1}^{m}|a_s^{(m)}|^2+\sum_{s=1}^{n}|a_s^{(n)}|^2-2\sum_{s=1}^{n}a_s^{(m)}a_s^{(n)}.$$

При увеличении n эти выражения стремятся к нулю и, следовательно, ряд (1.2) равномерно сходится.

Если ядро имеет ограниченные на том же интервале интегралы от квадратов производных, то будут сходиться и соответствующие производные $\varphi^{(n)}$. Следовательно, мы можем рассматривать линейную комбинацию (1.2), где $a_s^{(n)}$ определены из уравнения (1.4) как приближенное решение нашей линейной системы, стремящееся к точному при $n\to\infty$. Если функции v_i взять те же, что и φ_i, то уравнения (1.4) будут уравнениями метода Галеркина [7].

В некоторых случаях удобно пользоваться другой системой функций, так как функции v_i не должны обязательно удовлетворять граничным условиям.

Требование ортогональности принято нами только для удобства вывода и не является необходимым.

Во многих случаях удобно пользоваться системами функции ортогональных и полных в более общем смысле.

Например, мы можем сделать сколь угодно малым левую часть выражения:

$$\int_0^1 [|\psi_n'|^2+k^2|\psi_n|^2]\,dy-\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i^2|>0, \tag{1.9}$$

где ψ_n попрежнему остаток уравнения (1.1) при подстановке $\varphi^{(n)}$, а

$$\alpha_i=\int_0^1 (\psi_n' v_i'+k^2\psi_n v_i)\,dy,$$

функции v_i ортогональны в более общем смысле, т. е.

$$\int_0^1 (v_k' v_i'+k^2 v_k v_i)\,dy=0\qquad (k\neq i),$$

и соответствующим образом нормированы. Система v_i полная в более общем смысле, т. е. выражение (1.9) может стать равным нулю при $m \to \infty$ (см. Гильберт и Курант[8]). Отметим, что из условия полноты

$$\int_0^1 (|F'|^2 + k^2 |F|^2)\, dy = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2$$

следует и обычное условие полноты системы функций v_i.

Приравнивая нулю n коэффициентов (1.9), получаем систему уравнений, аналогичных уравнениям метода Галеркина для определения коэффициентов разложения (1.2),

$$\varphi^{(n)} = \sum_{s=1}^{n} b_s \varphi_s,$$

которое в пределе стремится к решению нашей системы.

Если функции v_i удовлетворяют условиям $v_i' = 0$ при $y = 0$ и $y = 1$, то уравнения для определения b_s могут быть написаны в виде:

$$\int_0^1 (v_i'' - k^2 v_i)\, \psi_n\, dy = 0. \tag{1.10}$$

2. При доказательстве сходимости метода для уравнения (А) нашей задачи будем пользоваться системами функций, определяемыми вспомогательными уравнениями.

Так, для некоторых общих выводов мы воспользуемся функциями, определяемыми уравнением:

$$\varphi_s^{IV} - 2\alpha^2 \varphi_s'' + \alpha^4 \varphi_s + \mu_s (\varphi_s'' - \alpha^2 \varphi_s) = 0. \tag{2.1}$$

Граничные условия те же, что для уравнения (А).

Введя обозначения

$$f_s = \varphi_s'' - \alpha^2 \varphi_s,$$

уравнение (2.1) можно записать в виде:

$$f_s'' - \alpha^2 f_s + \mu_s f_s = 0. \tag{2.2}$$

Легко видеть, что собственные функции этой системы обладают следующими свойствами:

$$\begin{gathered}\int_0^1 \bar{\varphi}_s f_k\, dy = 0, \quad \int_0^1 \bar{f}_s f_k\, dy = 0, \quad \int_0^1 \bar{f}_s (f_k'' - \alpha^2 f_k)\, dy = 0 \qquad (s \neq k), \\ \int_0^1 \bar{f}_s (f_s'' - \alpha^2 f_s)\, dy = \int_0^1 f_s (\bar{f}_s'' - \alpha^2 \bar{f}_s)\, dy = -\mu_s \int_0^1 \bar{f}_s f_s\, dy.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Пусть приближенные выражения для наших решений будут:

$$\varphi^{(n)} = \sum_{s=1}^{n} a_s \varphi_s, \qquad f^{(n)} = \sum_{s=1}^{n} a_s f_s, \tag{2.4}$$

где коэффициенты a_s определяются уравнениями

$$\int_0^1 \bar{\varphi}_k L(\varphi^{(n)})\, dy = 0,$$

где $L(\varphi^{(n)})$ — левая часть уравнения (A).

Функции φ_s мы можем нормировать так, чтобы

$$\int_0^1 f_s \bar{f}_s\, dy = 1. \tag{2.5}$$

Тогда наша система линейных уравнений для определения коэффициентов a_s будет составлена из n уравнений вида:

$$a_s - \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_{si} = 0, \tag{2.6}$$

где

$$\gamma_{si} = \int_0^1 \bar{\varphi}_s [B_1(y) f_i - B_2(y)\varphi_i]\, dy = \int_0^1 [A(y)\bar{\varphi}_s' \varphi_i' + A_1(y)\bar{\varphi}_s \varphi_i' + A_2(y)\bar{\varphi}_s \varphi_i]\, dy.$$

Для оценки величины $|\gamma_{si}|^2$ имеем:

$$|\gamma_{si}| \leqslant \left|\int_0^1 A\bar{\varphi}_s' \varphi_i'\, dy\right| + \left|\int_0^1 A_1 \bar{\varphi}_s \varphi_k'\, dy\right| + \left|\int_0^1 A_2 \varphi_s \varphi_i\, dy\right|.$$

Оценивая каждое из слагаемых в правой части по теореме Шварца и приняв во внимание, что A, A_1, A_2 ограничены в интервале (0.1), получим:

$$|\gamma_{si}|^2 < M^2 \left[\int_0^1 |\varphi_s'|^2 dy \int_0^1 |\varphi_i'|^2 dy + \int_0^1 |\varphi_s|^2 dy \int_0^1 |\varphi_i'|^2 dy + \ldots\right].$$

Из условия (2.6) следует, что

$$\int_0^1 [|\varphi_s'|^2 + \alpha^2 |\varphi_s|^2]\, dy = \frac{1}{\mu_s}.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 |\varphi_s'|^2 dy < \frac{1}{\mu_s}, \qquad \int_0^1 |\varphi_s|^2 dy < \frac{1}{\alpha^2 \mu_s}.$$

Тогда

$$|\gamma_{si}|^2 < M_x^2 \frac{1}{\mu_s \mu_i}, \qquad |\gamma_{ss}| < M_x \frac{1}{\mu_s}, \tag{2.7}$$

где M_x — постоянное число, не зависящее от s и i, а μ_s есть собственное значение для уравнения (2.1) при граничных условиях $\varphi = 0$ и $\varphi' = 0$ при $y = 0$ и $y = 1$.

Величина μ_s определяется из трансцендентного уравнения:

$$\frac{1 - \operatorname{ch}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \mu})}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \mu}} = \frac{1 - \operatorname{ch}(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \mu})}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \mu}}. \tag{2.8}$$

Легко видеть, что это уравнение имеет только один действительный корень $\mu = \alpha^2$.

Следовательно, все собственные значения μ_s будут положительны и больше или равны α^2.

Положим $\mu - \alpha^2 = k^2$, тогда уравнение (2.8) можно преобразовать к виду:

$$\sin k = \frac{2\alpha}{k}\left[\frac{\operatorname{ch} a \cos k + 2}{\left(\frac{\alpha^2}{k^2} - 1\right)\operatorname{sh}\alpha}\right]. \tag{2.9}$$

$k \approx \pi s$

При возрастании k правая часть уравнения (2.9) стремится к нулю:

$$\mu_s \approx s^2\pi^2 + \alpha^2.$$

Обращаясь к оценкам (2.7), мы можем заключить, что ряды

$$\sum_1^\infty \sum_1^\infty |\gamma_{si}|^2, \qquad \sum_1^\infty |\gamma_{ss}|$$

сходятся.

Следовательно, бесконечная система линейных уравнений (2.6) есть система Коха [9]. Для нее доказано, что она имеет решение, которое может быть получено укорачиванием системы, и сумма квадратов модулей этих решений $\sum |a_s|^2$ сходится. Доказательство сходимости ряда $\varphi^{(m)}$ может быть проведено для нашей однородной системы, так же как в разделе **1**, так как для случая однородной системы при условиях (1.6) собственные значения λ_n, определяемые из детерминанта системы (2.6) при $n \to \infty$ стремятся к определенному пределу.

Но мы проведем это доказательство другим методом, более простым и не требующим наложения условий на ядро интегрального уравнения нашей задачи.

Рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} I_{mn} &= \int_0^1 \left[|\eta''_{mn}|^2 + 2\alpha^2|\eta'_{mn}|^2 + \alpha^4|\eta_{mn}|^2\right] dy = \\ &= \int_0^1 \bar{\eta}_{mn}\left[\eta^{\mathrm{IV}}_{mn} - 2\alpha^2\eta''_{mn} + \alpha^4\eta_{mn}\right] dy, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где

$$\eta_{mn} = \varphi^{(m)} - \varphi^{(n)}.$$

Подставив в выражение (2.10)

$$\varphi^{(m)} = \sum_{s=1}^{m} a_s^{(m)}\varphi_s, \qquad \varphi^{(n)} = \sum_{s=1}^{n} a_s^{(n)}\varphi_s$$

и пользуясь соотношением (2.4), получим:

$$I_{mn}=\sum_{s=1}^{m}|a_s^{(m)}|^2+\sum_{s=1}^{n}|a_s^{(n)}|^2-\sum_{s=1}^{n}a_s^{(n)}\bar{a}_s^{(m)}-\sum_{s=1}^{n}\bar{a}_s^{(n)}a_s^{(m)}. \qquad (2.11)$$

Так как при увеличении n коэффициенты $a_s^{(n)}\to a_s^{(m)}\to a_s$ и $\sum_{s=1}^{m}|a_s^{m}|^2$ стремится к определенному пределу, то I_{mn} может стать сколь угодно малым.

Для оценки $|\eta_{mn}|$ имеем:

$$|\eta_{mn}|^2=\int_0^y(\eta_{mn}\bar{\eta}'_{mn}+\bar{\eta}_{mn}\eta'_{mn})\,dy<4\sqrt{\int_0^1|\eta_{mn}|^2dy\int_0^1|\eta'_{mn}|^2dy},$$

$$|\eta'_{mn}|^2<4\sqrt{\int_0^1|\eta'_{mn}|^2dy\int_0^1|\eta''_{mn}|^2dy}.$$

Так как I_{mn} стремится к нулю при $n\to\infty$, то и все интегралы, стоящие под корнями, стремятся к нулю. Следовательно, ряд (2.4) и его первая производная равномерно сходятся.

В некоторых случаях удобно пользоваться разложением в виде:

$$\varphi^{(n)}=\sum_{s=1}^{n}b_s\varphi_s \quad \text{и} \quad f^{(n)}=\sum_{1}^{n}b_sf_s, \qquad (2.12)$$

где коэффициенты b_s определяются из уравнений

$$\int_0^1\bar{f}_sL(\varphi^{(n)})\,dy=0,$$

т. е. пользуясь указанными в разделе **1** обобщениями.

Доказательство сходимости в этом случае также не представляет затруднений и проводится тем же методом, как и прежде, но функции φ_s и f_s, определяемые уравнением (2.1), нормируются так, что

$$\int_0^1 f_s\bar{f}_s\,dy=\frac{1}{\mu_s}.$$

Тогда

$$\int_0^1\bar{f}_s(f_s''-\alpha^2f_s)\,dy=\int_0^1 f_s(\bar{f}_s''-\alpha^2\bar{f}_s)\,dy=-1.$$

Тем же методом легко доказать сходимость метода Галеркина для несколько более общих уравнений вида (A), например, содержащих φ, φ', при тех же граничных условиях, по функциям, определяемым уравнением

$$\varphi_s^{\mathrm{IV}}-\mu_s\varphi_s=0$$

и некоторым другим.

3. Воспользуемся разложениями (2.12) для исследования устойчивости некоторых плоских прямолинейных течений между твердыми стенками. Пусть скорость течения U направлена по оси x и зависит только от y.

Уравнение возмущения для этого случая будет:

$$\Delta\Delta\xi - R\left[U\frac{\partial\Delta\xi}{\partial x} - U''\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\Delta\xi}{\partial t}\right] = 0. \tag{3.1}$$

Здесь $\xi(x, y, t)$ — функция тока возмущений.

Рассмотрим частное решение вида:

$$\xi = \varphi(y)\, e^{i\alpha(x-ct)} \qquad (c = c_r + ic_i).$$

Тогда для функции φ мы получим уравнение Хайзенберга [уравнение вида (А)], которое, пользуясь прежними обозначениями, напишем в виде:

$$f'' - \alpha^2 f = i\alpha R\,[(U - c_r - ic_i)f - U''\varphi]. \tag{3.2}$$

Умножим это уравнение на $\bar{f}$ и рассмотрим действительную часть интеграла полученного произведения:

$$\int_0^1 \bar{f}_s(f_s'' - \alpha^2 f_s)\,dy = c_i R\alpha \int_0^1 \bar{f} f\,dy + i\alpha R \int_0^1 \frac{U'''}{2}(\bar{\varphi}'\varphi - \varphi'\bar{\varphi})\,dy. \tag{3.3}$$

Подставляя в левую часть (3.3) разложение (2.12) и пользуясь выражением (2.4), получим:

$$-\sum_{s=1}^{\infty}|b_s|^2 = c_i\,\alpha R \int_0^1 \bar{f} f\,dy + iR\alpha \int_0^1 \frac{U'''}{2}(\bar{\varphi}'\varphi - \varphi'\bar{\varphi})\,dy. \tag{3.4}$$

Отсюда легко видеть, что если интеграл, содержащий U''', равен нулю или имеет знак минус, то $c_i < 0$, т. е. всякое возмущение такого типа будет затухать. В частности, течение между прямолинейными стенками с линейным распределением скорости (случай Куэтта) и с параболическим распределением (случай Пуазейля) всегда устойчивы для любого возмущения такого типа.

Поступила в редакцию 28 X 1939.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hopf L. Verlauf kleiner Schwingungen einer Strömung reibender Flüssigkeit. „Annalen d. Physik". 1914. Vol. XLIV. [S. 1—60].
2. Heisenberg W. Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen. „Annalen d. Physik". 1924. Vol. LXXIV. № 15. [S. 577—627].
3. Pekeris C. L. On the Stability Problem in Hydrodynamics. „Proc. of Cambridge Philos. Soc." 1936. Vol. XXXII. № 1. [P. 55—66].
4. Tollmien. Ueber die Entstehung der Turbulenz. (№ 1). Ein allgemeines Kriterium der Unstabilität laninarer Geschwindigkeitsverteilungen. (№ 5). „Nachrichten v. d. Gesellschaft d. Wissen. zu Göttingen". 1929. № 1. [S. 21—44]; 1935. № 5. [S. 79—114].
5. Karman Th. Ueber die Stabilität der Laminarströmung und die Theorie der Turbulenz. "Proc. of First Intern. Congress for Applied Mechanics". 1924. [P. 91—112].
6. Петров Г. И. О распространении колебаний вязкой жидкости и возникновении турбулентности. „Труды ЦАГИ". № 345.
7. Галеркин Б. Г. Стержни и пластины. „Вестник инженеров". 1915. № 19.