Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren

Von E. Trefftz, Dresden

Wenn man zur Lösung der ersten Randwertaufgabe (gegebene Randwerte) partieller Differentialgleichungen das sogenannte «RITZsche Verfahren» benutzt, welches die Minimaleigenschaften der Lösung zu ihrer zahlenmäßigen Darstellung heranzieht, so ist das naturgemäße Maß für die Güte der Annäherung der Betrag, um welchen das für die Näherungsfunktion berechnete Minimalintegral von dem durch die wahre Lösung erreichten Minimalwerte abweicht. Das RITZsche Verfahren liefert aber zunächst keine Möglichkeit, diese Abweichung zu bestimmen oder wenigstens in Grenzen einzuschließen, denn da alle Näherungswerte für das Minimalintegral zu groß sind, wird für den wahren Wert desselben nur eine obere, aber keine untere Grenze gefunden. — Es ist das Ziel der folgenden Betrachtungen, ein Analogon zum RITZschen Verfahren aufzuzeigen, durch welches der Wert des Minimalintegrals von unten approximiert wird, so daß durch das Verfahren von RITZ einerseits und das neue Verfahren andererseits das Minimalintegral in Grenzen eingeschlossen wird. Für die praktische Rechnung ist das in allen den Fällen von besonderer Wichtigkeit, wo es in erster Linie auf den Wert dieses Integrals ankommt.

Der Einfachheit wegen lege ich meine Methode am Beispiel der ersten Randwertaufgabe der ebenen Potentialtheorie dar, sie läßt sich ohne weiteres auf andere Differentialgleichungen übertragen.

Haben wir die Aufgabe, die Potentialfunktion u zu bestimmen, welche auf der Randkurve K eines gegebenen Gebietes G die vorgeschriebenen Randwerte $u = g(s)$ annimmt, so verfahren wir nach RITZ folgendermaßen:

Wir setzen die Näherungslösung in der Form

$$v(x,y) = g(x,y) + \sum_1^n c_h q_h(x,y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

an, wo $g(x,y)$ eine Funktion ist, welche die vorgeschriebenen Randwerte auf K annimmt, und die $q_h(x, y)$ Funktionen sind, welche auf K verschwinden. $v(x,y)$ erfüllt dann für beliebige Werte der Koeffizienten c die Randbedingungen, die c_h werden so bestimmt, daß das für v gebildete DIRICHLETsche Integral möglichst klein wird. Bezeichnen wir jetzt mit $f(x,y)$ den Fehler der Approximation

$$f(x,y) = v(x,y) - u(x,y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

so wird auf dem Rande $f = 0$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} \iint \mathrm{grad}^2\, v\, dx\, dy &= \iint \mathrm{grad}^2\, u\, dx\, dy + 2\iint \mathrm{grad}\, u\, \mathrm{grad}\, f\, dx\, dy + \iint \mathrm{grad}^2\, f\, dx\, dy \qquad (3)\\ &= \iint \mathrm{grad}^2\, u\, dx\, dy + \iint \mathrm{grad}^2\, f\, dx\, dy \end{aligned}$$

da das Integral $\int\!\!\int \mathrm{grad}\, u\, \mathrm{grad}\, f\, dx\, dy = \int_k f \frac{\partial u}{\partial \nu} ds - \int\!\!\int f \Delta u\, dx\, dy = 0 \;\ldots\ldots\ldots \quad (4)$

verschwindet; (ν ist die äußere Normale der Randkurve).

Dies führt uns zu einer etwas modifizierten Form des Minimalproblems. Da nämlich das DIRICHLETsche Integral $\iint \mathrm{grad}^2\, v\, dxdy$ und das Integral über das Quadrat des Fehlergradienten $\iint \mathrm{grad}^2\, f\, dxdy$ sich nur um den konstanten Wert des DIRICHLETschen Integrals der wahren Lösung unterscheiden, so wird bei dem Ritzschen Verfahren mit dem Integral $\iint \mathrm{grad}^2\, v\, dxdy$ auch das Integral $F = \iint \mathrm{grad}^2\, f\, dxdy$ ein Minimum. Das Ritzsche Verfahren liefert also unter allen Funktionen der Form (1) diejenige, für welche das Integral über das Quadrat des Fehlergradienten ein Minimum wird.

Wenn wir von dieser Formulierung ausgehen, kommen wir sofort zu einem Analogon des Ritzschen Verfahrens, indem wir die Lösung nicht wie bei Ritz durch Funktionen approximieren, welche den Randbedingungen genügen, aber die Differentialgleichung nicht erfüllen, sondern solche Funktionen nehmen, welche die Differentialgleichung befriedigen, aber nicht die Randbedingung. Das ist offenbar eine Verallgemeinerung der klassischen Methode der Entwicklung nach Partikularlösungen — tatsächlich sind die bekannten Reihenentwicklungen als Spezialfälle in unserer Methode enthalten.

Wir machen also einen Ansatz

$$w(x,y) = \sum_1^n c_k p_k(x,y) \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (5)$$

wo die $p_k(x, y)$ Potentialfunktionen sind, und bestimmen die Koeffizienten c so, daß das Integral über das Quadrat des Fehlergradienten

$$F = \iint \operatorname{grad}^2 f\,dx\,dy = \iint \operatorname{grad}^2 (w-u)\,dx\,dy \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (6)$$

möglichst klein wird (u ist die wahre Lösung). Es muß also

$$\frac{\partial F}{\partial c_k} = 2\int\!\!\int \operatorname{grad}(w-u)\operatorname{grad}\frac{\partial w}{\partial c_k}\,dx\,dy = 0 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (7)$$

sein. Hier ist

$$\frac{\partial w}{\partial c_k} = p_k(x,y) \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (8)$$

Eine Integration nach dem GAUSSschen Satze liefert, wenn ν die äußere Normale ist,

$$\left.\begin{aligned} &\int\!\!\int \operatorname{grad}(w-u)\operatorname{grad} p_k\,dx\,dy = \int_K (w-u)\frac{\partial p_k}{\partial \nu}\,ds = 0 \\ &\text{oder:} \\ &\sum_1^n c_\rho \int p_\rho \frac{\partial p_k}{\partial \nu}\,ds = \int g(s)\frac{\partial p_k}{\partial \nu}\,ds \end{aligned}\right\} \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

dies sind n lineare Gleichungen für die n Koeffizienten c, da auf dem Rande die Werte von $u = g(s)$ gegeben sind.

Daß bei dieser Art der Approximation das DIRICHLETsche Integral zu klein herauskommt, ist von vornherein zu erwarten, weil das bei den klassischen Reihenentwicklungen stets der Fall ist, eine einfache Rechnung bestätigt es. Es ist, wenn wieder f den Fehler bezeichnet

$$\iint \operatorname{grad}^2 u\,dx\,dy = \iint \operatorname{grad}^2 w\,dx\,dy - 2\iint \operatorname{grad} w \operatorname{grad} f\,dx\,dy + \iint \operatorname{grad}^2 f\,dx\,dy$$

Das mittlere Integral der rechten Seite verschwindet, denn es ist

$$\int\!\!\int \operatorname{grad} w \operatorname{grad} f\,dx\,dy = \int_K f\frac{\partial w}{\partial \nu}\,ds = \Sigma c_\rho \int (w-u)\frac{\partial p_\rho}{\partial \nu}\,ds \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

und die c_ρ waren gerade so bestimmt, daß dies null wird. Also wird

$$\iint \operatorname{grad}^2 w\,dx\,dy = \iint \operatorname{grad}^2 u\,dx\,dy - \iint \operatorname{grad}^2 f\,dx\,dy \leq \iint \operatorname{grad}^2 u\,dx\,dy \quad \dots \quad (11)$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Für die praktische Rechnung hat unser Verfahren vor dem Ritzschen den Vorzug, daß man keine Funktion zu suchen hat, welche die Randbedingungen befriedigt, was nicht immer einfach ist. Außerdem ist die Fehlerschätzung vereinfacht: der größte Fehler liegt auf der Randkurve. Der Konvergenzbeweis ist, wenn man die Existenz der Lösung voraussetzt, leicht zu führen, mit den Funktionswerten konvergieren auch sämtliche Ableitungen im Innern des Gebietes.

Man kann sowohl die Ritzsche als die neue Methode noch etwas erweitern, wenn man im Innern des Gebietes Unstetigkeiten zuläßt. Ich will das nur an einem ganz einfachen Beispiel erläutern, weil diese Ueberlegungen nur bei einfachen Fällen praktische Bedeutung besitzen. Wir nehmen an, das Gebiet, für welches die Randwertaufgabe zu lösen ist, bestehe aus zwei Rechtecken, welche längs einer Strecke A—B zusammenstoßen (etwa der Querschnitt eines T-Trägers). Diejenigen Randstücke der Rechtecke, wo sie nicht aneinanderstoßen, nennen wir den «Außenrand», die Strecke A—B den «Innenrand».

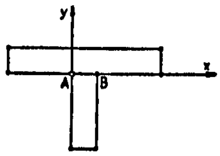

Abb. 1.

Das Koordinatensystem legen wir so, daß A der Koordinatenanfang ist, B (bei $x = b$) auf der x-Achse liegt.

Ritzsches Verfahren. Wären längs A—B die Funktionswerte u bekannt, so wäre die Randwertaufgabe durch Einzelbehandlung der beiden Rechtecke zu lösen. Da sie nicht bekannt sind, so approximieren wir sie mit zunächst unbekannten Koeffizienten durch geeignete Funktionen h_0, h_1 usw. in der Form

$$v(x) = h_0 + \sum_1^n c_\rho h_\rho(x) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (12)$$

Jetzt bestimmen wir die Potentialfunktionen q_0, q_1, q_2 usw., welche die folgenden Randbedingungen erfüllen

$$\left.\begin{array}{l} q_0 \text{ habe am Außenrand die vorgeschriebenen Randwerte, am Innenrand } A\text{—}B \text{ die Werte o} \\ q_\rho \text{ habe am Außenrand die Werte o, am Innenrand } A\text{—}B \text{ die Werte } h_\rho(x). \end{array}\right\} \quad (13)$$

Diese Funktionen $q_\rho(x, y)$ sind für jedes Rechteck durch Lösung der Randwertaufgabe in bekannter Weise zu finden. Längs A—B sind sie zwar stetig, haben aber einen Sprung in der Normalableitung. Nun nehmen wir als Näherungslösung

$$v(x, y) = q_0(x, y) + \sum_1^n c_\rho q_\rho(x, y) \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (14)$$

und bestimmen die Koeffizienten c so, daß das Dirichletsche Integral für das Gesamtgebiet einen möglichst kleinen Wert bekommt. Der Wert dieses Integrals wird für die Näherungslösung zu groß, da jede stetige und stückweise differenzierbare Funktion, welche die Randwerte am Außenrand annimmt, einen zu großen Wert des Minimalintegrals liefert, wenn sie nicht die Lösung darstellt.

Analogie zum Ritzschen Verfahren. Wären längs A—B die Werte der Normalableitung $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ bekannt, so wäre wieder die Randwertaufgabe durch Einzelbehandlung der beiden Rechtecke lösbar. Da sie nicht bekannt sind, so approximieren wir sie mit zunächst unbekannten Beiwerten durch geeignete Funktionen k_1, k_2 usw. in der Form

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \Sigma c_\rho k_\rho(x) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (15)$$

und bestimmen die Potentialfunktionen p_0, p_1, p_2 usw., welche die folgenden Randbedingungen erfüllen

$$\left.\begin{array}{l} p_0 \text{ habe am Außenrande die vorgeschriebenen Randwerte,} \\ \qquad \text{am Innenrande } A\text{—}B \text{ die Werte der Normalableitung } \dfrac{\partial p_0}{\partial y} = 0 \\ p_\rho \text{ habe am Außenrande die Werte o,} \\ \qquad \text{am Innenrande die Werte der Normalableitung } \dfrac{\partial p_\rho}{\partial y} = k_\rho(x) \end{array}\right\} \quad (16)$$

Diese Funktionen sind für jedes Rechteck nach bekannten Methoden zu finden, sie sind längs A—B unstetig, haben aber daselbst stetige Normalableitung. Nun nehmen wir als Näherungslösung

$$w(x,y) = p_0(x,y) + \sum_1^n c_\rho p_\rho(x,y) \quad (17)$$

und bestimmen die Koeffizienten c so, daß das Integral über das Quadrat des Fehlergradienten

$$F = \iint \operatorname{grad}^2 (w-u)\, dx\, dy$$

möglichst klein wird, wo u wieder die wahre Lösung sei. Das liefert die Bedingung:

$$\iint \operatorname{grad}(w-u) \operatorname{grad} p_h(x,y)\, dx\, dy = 0 \quad (18)$$

Dieses Integral wird durch partielle Integration umgeformt. Da sowohl u als w Potentialfunktionen sind, fallen die Flächenintegrale fort, es bleibt bloß das um beide Rechtecke zu erstreckende Randintegral

$$\int (w-u) \frac{\partial p_h}{\partial \nu}\, ds = 0 \quad (19)$$

übrig. Von diesem fallen wieder die über den «Außenrand» zu nehmenden Teile fort, weil hier $u = w$ ist, so daß das Integral nur noch über die Strecke A—B zu nehmen ist, und zwar je einmal für jedes Rechteck. Bezeichnen wir die Werte der Funktionen $p_h(x,y)$ mit $p_h^{(1)}(x,y)$ und $p_h^{(2)}(x,y)$, je nachdem wir uns der Strecke A—B von dem Rechteck 1 oder dem Rechteck 2 her nähern, so wird das Integral, da für das Rechteck I (siehe die Abb.)

$$\frac{\partial p_h}{\partial \nu} = \frac{\partial p_h}{\partial y} = k_h \quad (20^{\mathrm{I}})$$

für das Rechteck 2

$$\frac{\partial p_h}{\partial \nu} = -\frac{\partial p_h}{\partial y} = -k_h \quad (20^{\mathrm{II}})$$

ist,

$$\int_A^B (w^{(1)} - u) k_h\, dx - \int_A^B (w^{(2)} - u) k_h\, dx = \int_A^B (w^{(1)} - w^{(2)}) k_h\, dx = 0 \quad (21)$$

Die unbekannten Werte von u heben sich also wegen der Stetigkeit der Normalableitung heraus, und es bleiben zur Bestimmung der Koeffizienten c_h die Gleichungen

$$\int_A^B \left| p_o^{(1)} - p_o^{(2)} + \sum_1^n c_\rho \left(p_\rho^{(1)} - p_\rho^{(2)}\right) \right| k_h\, dx = 0 \quad (22)$$

übrig. Daß das DIRICHLETsche Integral wirklich zu klein wird, folgt aus den gleichen partiellen Integrationen, die zu diesen Gleichungen geführt haben. Es ist nämlich

$$\iint \operatorname{grad}^2 u\, dx\, dy = \iint \operatorname{grad}^2 w\, dx\, dy - 2 \iint \operatorname{grad} w \operatorname{grad}(w-u)\, dx\, dy + \iint \operatorname{grad}^2 (w-u)\, dx\, dy$$

Das mittlere Integral der rechten Seite wird

$$\iint \operatorname{grad}(w-u) \operatorname{grad} p_0\, dx\, dy + \Sigma c_\rho \iint \operatorname{grad}(w-u) \operatorname{grad} p_\rho\, dx\, dy$$

Die Summe verschwindet nach Gleichung (18). Das erste Integral wird gleich dem Randintegral

$$\int (w - u) \frac{\partial p_0}{\partial \nu} ds$$

und dieses verschwindet, da am Außenrande $w = u$ und längs A—B $\frac{\partial p_0}{\partial \nu} = 0$ ist.

Also ist tatsächlich

$$\iint \operatorname{grad}^2 w \, dx \, dy = \iint \operatorname{grad}^2 u \, dx \, dy - \iint \operatorname{grad}^2 (w - u) \, dx \, dy \leq \iint \operatorname{grad}^2 u \, dx \, dy \qquad (23)$$

Anwendungen. Berechnung der Torsionsfestigkeit prismatischer Stäbe.

Zur Erläuterung des Gesagten nehmen wir zunächst ein ganz einfaches Beispiel, die Berechnung der Torsionsfestigkeit eines Stabes von quadratischem Querschnitt. Gegeben sei ein prismatischer Stab, der durch ein Torsionsmoment M auf Verdrehung beansprucht sei. In den quadratischen Querschnitt legen wir ein Koordinatensystem derart, daß der Koordinatenanfang mit dem Mittelpunkte des Quadrates zusammenfällt und die Axen den Seiten parallel sind. Die Länge der Seiten sei $2a$. Die von den Querschnittsebenen übertragenen Schubspannungen lassen sich dann durch eine Spannungsfunktion in der Form

$$\tau_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \tau_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad (24)$$

ableiten. Das Gleichgewicht der Randelemente erfordert am Rande $\psi = const$ oder, da diese Konstante unwesentlich ist,

$$\psi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad (25)$$

Zur Bestimmung von ψ haben wir das folgende Variationsproblem: Es ist die Funktion ψ mit den Randwerten $\psi = 0$ so zu bestimmen, daß bei gegebenem Torsionsmoment

$$M = \int\int (x \tau_y - y \tau_x) \, dx \, dy = \int\int \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx \, dy \quad \ldots \ldots \ldots \qquad (26)$$

die Formänderungsarbeit pro Längeneinheit des Stabes

$$A = \frac{1}{2G} \int\int (\tau_x^2 + \tau_y^2) \, dx \, dy = \frac{1}{2G} \int\int \operatorname{grad}^2 \psi \, dx \, dy \quad \ldots \ldots \ldots \qquad (27)$$

möglichst klein wird. Ist dies Variationsproblem gelöst, so erhalten wir die Verdrehung ω der Längeneinheit aus der Beziehung

$$2A = M \cdot \omega \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad (28)$$

Zur Bestimmung von ω genügt also die Kenntnis des Minimalintegrals bei gegebenem Moment M.

Ansatz nach Ritz. Machen wir unter Berücksichtigung der Symmetriebedingungen und der Randbedingung den Ansatz

$$\psi = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2)\{\alpha a^2 + \beta (x^2 + y^2)\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad (29)$$

so wird das Torsionsmoment

$$M = \frac{16}{45} a^8 \left\{ 10\alpha + 4\beta \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad (30)$$

und die Formänderungsarbeit

$$A = \frac{128 a^{12}}{7 \cdot 5^2 \cdot 3^3} \frac{1}{G} \left\{ 105\alpha^2 + 72\alpha\beta + 44\beta^2 \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad (31)$$

Bestimmen wir α und β so, daß bei gegebenem Moment die Formänderungsarbeit möglichst klein wird, so erhalten wir

$$\alpha = \frac{74\,\lambda}{831}\,,\ \beta = \frac{15\,\lambda}{831} \quad \ldots \quad (32)$$

wo λ ein Lagrangescher Faktor ist, der sich aus dem gegebenen Moment zu

$$\lambda = \frac{45 \cdot 831}{16 \cdot 800}\frac{M}{a^8} \quad \ldots \quad (33)$$

berechnet. Eliminieren wir λ, so ergibt sich

$$2\,A = \frac{6 \times 6648}{700 \times 128}\,\frac{M^2}{Ga^4} \quad \ldots \quad (34)$$

Dieser Nährungswert für A ist sicher zu groß. Bezeichnen wir den wahren Wert durch einen Stern, so ist also

$$2\,A^* = M \cdot \omega < 0.4452\,\frac{M^2}{Ga^4} \quad \ldots \quad (35)$$

oder

$$\omega < 0.4452\,\frac{M}{Ga^4} \quad \ldots \quad (36)$$

Das Verfahren des Verfassers. Das Minimalproblem ist gleichwertig mit der Aufgabe, die Differentialgleichung

$$\Delta\,\psi = const$$

für die Randbedingung $\psi = 0$
zu integrieren.

Setzen wir also

$$\psi = C\left\{a^2\,r^2 - u\right\} \quad \ldots \quad (37)$$

(C ist dabei der Lagrangesche Faktor für die Nebenbedingung des Variationsproblems), so ist die Potentialfunktion u so zu bestimmen, daß sie auf dem Rande die Werte $a^2 \cdot r^2$ annimmt. Wir machen unter Berücksichtigung der Symmetrie den Näherungsansatz

$$\psi = C\left\{a^2\,r^2 + \alpha\,(x^4 - 6\,x^2\,y^2 + y^4)\right\} \quad \ldots \quad (38)$$

Der Koeffizient α bestimmt sich, wenn wir $x^4 - 6\,x^2\,y^2 + y^4 = p$ setzen, nach dem oben gegebenen Verfahren aus der Bedingung, daß das über den Rand zu erstreckende Integral

$$\int \left\{a^2\,r^2 + \alpha\,p\right\} \frac{\partial p}{\partial \nu}\,ds = 0 \quad \ldots \quad (39)$$

wird. Die Ausführung der Rechnung liefert

$$\alpha = {}^7/_{36} \quad \ldots \quad (40)$$

Daraus folgt

$$M = \frac{8 \times 76}{135}\,Ca^6 \quad \ldots \quad (41)$$

und

$$2\,A = \frac{8 \cdot 456}{3 \cdot 135}\,\frac{C^2\,a^8}{G} \quad \ldots \quad (42)$$

also nach Elimination von C

$$2A = \frac{135}{304}\,\frac{M^2}{Ga^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Dieser Näherungswert ist sicher zu klein, der wahre Wert $2A^*$ wird also

$$2A^* = M \cdot \omega > 0.4441\,\frac{M^2}{Ga^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

Nehmen wir also als Näherungswert

$$\omega = 0.4446\,\frac{M}{Ga^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

so ist der Fehler kleiner als $1{,}4\,‰$ oder $\frac{1}{7}\,\%$.

Das Winkeleisen. Nach der oben angegebenen Erweiterung habe ich ferner in erster Näherung die Torsionsfestigkeit eines gleichschenkligen Winkeleisens abgeschätzt und zwar für den bei normalen Profilen vorkommenden ungünstigsten Fall, wo das Verhältnis der Schenkelbreite zur Schenkellänge 1 : 5 ist. Ich lege das Koordinatensystem entlang den Innenkanten der Schenkel mit dem Anfangspunkt in der inneren Ecke. Von der Abrundung der Ecken wird abgesehen.

Zunächst berechne ich die Formänderungsarbeit bei gegebenem Moment so, als ob das Winkeleisen aus zwei getrennten, längs O—A (siehe Abb. 2) zusammenstoßenden Rechtecken bestünde. Das ergibt eine Spannungsfunktion, die längs O—A statt der wahren Werte den Wert Null annimmt, aber stetig und in beiden Rechtecken differenzierbar ist. Sie ist also eine für das Minimalproblem konkurrenzfähige Funktion im Sinne des Ritzschen Verfahrens und liefert somit einen zu großen Wert für die Formänderungsarbeit. Die Ausrechnung ergibt

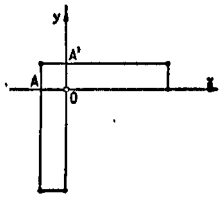

Abb. 2.

$$\omega < 0.388\,\frac{M}{Gd^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Setzen wir jetzt das Gebiet aus zwei Rechtecken und einem Quadrat zusammen, die längs O—A und O—A' zusammenstoßen, und bestimmen die Spannungsfunktionen in den Teilgebieten so, daß an den Trennungslinien die Normalableitung verschwindet, so erhalten wir — wie man am besten durch direkte Rechnung bestätigt, — einen zu kleinen Wert für A. Diese Spannungsfunktion ist in den beiden Rechtecken gleich der Spannungsfunktion für ein Rechteck von doppelter Länge, im Quadrat gleich der Spannungsfunktion des Quadrates von doppelter Seitenlänge, also aus den bekannten Formeln für das Rechteck zu gewinnen. Die Ausrechnung ergibt

$$\omega > 0.332\,\frac{M}{Gd^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

Setzen wir also als Näherungswert das Mittel aus dem zu großen und dem zu kleinen Wert an

$$\omega = 0.360\,\frac{M}{Gd^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

so ist der Fehler in diesem ungünstigen Falle kleiner als 8 %, was bei der Unsicherheit, mit der im allgemeinen der Schubmodul G nur gegeben ist, in vielen Fällen ausreichen dürfte. Es ist eine geringe Mühe, eine bessere Approximation zu erzielen.