Chapitre IV

Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Contrairement au Chapitre III, où nous avons traité surtout le problème de Cauchy (équation différentielle avec valeurs initiales données), nous allons étudier des solutions d'équations différentielles assujeties à des conditions aux bords. Des exemples typiques sont ceux du paragraphe II.3, où on cherche des solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 satisfaisant $y(a) = A$ et $y(b) = B$. Dans ce chapitre, nous restreignons notre étude à des équations différentielles linéaires.

IV.1 Problèmes aux limites – introduction

Pour illustrer la différence entre un problème de Cauchy et un problème aux limites, nous commençons par un exemple très simple.

Exemple 1.1 Considérons l'équation différentielle

$$y'' + y = 0,$$

dont la solution générale est donnée par $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$. Avec des valeurs initiales données, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, le problème possède une solution unique quelles que soient les valeurs de x_0, y_0, y_0'.

Si la solution cherchée est déterminée par des conditions aux bords d'un intervalle, on peut avoir les trois possibilités suivantes:

a) $y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$ une infinité des solutions, $y(x) = c_1 \sin x$;

b) $y(0) = 0,\ y(\pi) = 1$ pas de solution;

c) $y(0) = 0,\ y(1) = 2$ une solution unique, $y(x) = (2/\sin 1)\sin x$.

Dans une grande partie de ce chapitre, nous considérerons *l'équation différentielle linéaire*

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x), \tag{1.1}$$

où $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ et $h(x)$ sont continues sur l'intervalle $[a, b]$ et où $a_2(x) \neq 0$ sur $[a, b]$. Nous étudions les solutions $y : [a, b] \to I\!R$ assujeties aux *conditions aux limites* (conditions aux bords, conditions de frontière)

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) &= \gamma_1 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) &= \gamma_2. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Avec les abréviations

$$\begin{aligned} (Ly)(x) &:= a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) \\ B_1y &:= \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) \\ B_2y &:= \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b), \end{aligned}$$

où $L : \mathcal{C}^2([a,b]) \to \mathcal{C}^0([a,b])$ et $B_i : \mathcal{C}^1([a,b]) \to \mathbb{R}$, le problème s'écrit sous la forme

$$Ly = h, \qquad B_1y = \gamma_1, \qquad B_2y = \gamma_2. \tag{1.3}$$

On parle d'un problème *homogène*, si $h(x) \equiv 0$ et $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Théorème 1.2 (existence et unicité) *Soient $u(x), v(x)$ deux solutions indépendantes de $Ly = 0$. Alors, le problème (1.3) possède une solution unique si et seulement si*

$$\det \begin{pmatrix} B_1u & B_1v \\ B_2u & B_2v \end{pmatrix} \neq 0. \tag{1.4}$$

Par conséquent, le problème (1.3) possède une solution unique si et seulement si le problème homogène $Ly = 0, B_1y = 0, B_2y = 0$ possède une solution unique (alternative de Fredholm).

Démonstration. Soit $w(x)$ une solution particulière de $Ly = h$. La solution générale de $Ly = h$ est alors donnée par $y(x) = c_1u(x) + c_2v(x) + w(x)$. Cette solution vérifie les conditions aux limites (1.2) si et seulement si

$$\begin{pmatrix} B_1u & B_1v \\ B_2u & B_2v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 - B_1w \\ \gamma_2 - B_2w \end{pmatrix}.$$

Sous la condition (1.4), ce système linéaire pour c_1, c_2 possède une solution unique. □

Exemple 1.3 Considérons le problème

$$y'' + y = 0, \qquad y(a) = A, \qquad y(b) = B.$$

On peut prendre $u(x) = \cos x$ et $v(x) = \sin x$. Par le Théorème 1.2, ce problème possède une solution unique si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ \cos b & \sin b \end{pmatrix} = \cos a \sin b - \cos b \sin a = \sin(a-b) \neq 0,$$

c.-à-d., si $b - a \neq k\pi$ avec un entier k.

IV.2 La fonction de Green

Le but de ce paragraphe est de dériver une formule analogue à celle de la "variation des constantes" pour le problème aux limites.

L'équation (1.1) peut être écrite sous la forme équivalente

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(x)/a_2(x) & -a_1(x)/a_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(x)/a_2(x) \end{pmatrix}.$$

Notons la résolvante de ce système linéaire par

$$R(x,a) = \begin{pmatrix} R_1(x,a) & R_2(x,a) \\ R_1'(x,a) & R_2'(x,a) \end{pmatrix}.$$

Alors, la solution particulière de $Ly = h$ qui satisfait aux conditions initiales $y(a) = 0$, $y'(a) = 0$ est donnée par

$$y(x) = \int_a^x R_2(x,t)\frac{h(t)}{a_2(t)}\,dt = \int_a^b G_0(x,t)h(t)\,dt,$$

où

$$G_0(x,t) = \begin{cases} R_2(x,t)/a_2(t) & \text{si } \; a \le t \le x \le b \\ 0 & \text{si } \; a \le x \le t \le b\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

Remarquons que la fonction $R_2(x,a)$ est la solution de $Ly = 0$ qui vérifie $R_2(a,a) = 0$ et $R_2'(a,a) = 1$.

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses d'existence et d'unicité du Théorème 1.2, il existe une unique fonction continue $G(x,t)$ sur $[a,b] \times [a,b]$ telle que la solution de $Ly = h$, $B_1y = 0$, $B_2y = 0$ est donnée par*

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)h(t)\,dt. \tag{2.2}$$

Cette fonction s'appelle fonction de Green.

Démonstration. Unicité. Soient $G_1(x,t)$ et $G_2(x,t)$ deux fonctions vérifiant (2.2). Comme la solution de $Ly = h$, $B_1y = 0$, $B_2y = 0$ est unique, on a

$$\int_a^b \Big(G_1(x,t) - G_2(x,t)\Big)h(t)\,dt = 0$$

pour toute fonction continue $h(t)$. Ceci implique $G_1(x,t) = G_2(x,t)$ sur $[a,b] \times [a,b]$.

Existence. Cherchons la fonction $G(x,t)$ sous la forme

$$G(x,t) = d_1(t)u(x) + d_2(t)v(x) + G_0(x,t), \tag{2.3}$$

où $u(x), v(x)$ sont deux solutions indépendantes de $Ly = 0$ et $d_1(t), d_2(t)$ sont des fonctions continues sur $[a,b]$. Avec cette fonction $G(x,t)$ la fonction $y(x)$ de (2.2) vérifie $Ly = h$.

Nous allons encore déterminer $d_1(t)$ et $d_2(t)$ de manière à ce que $B_1G(\cdot,t) = 0$ et $B_2G(\cdot,t) = 0$ pour tout $t \in (a,b)$. Ceci est équivalent à

$$\begin{pmatrix} B_1u & B_1v \\ B_2u & B_2v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} B_1G_0(\cdot,t) \\ B_2G_0(\cdot,t) \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse, ce système possède une solution unique pour $d_1(t), d_2(t)$. Evidemment, la propriété demandée pour $G(x,t)$ entraine $B_1y = 0$ et $B_2y = 0$ pour la fonction de (2.2). □

Exemple 2.2 Calculons la fonction de Green pour le problème

$$y'' = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 0.$$

On a $R_2(x,t) = x - t$ et la fonction de Green est donc de la forme

$$G(x,t) = d_1(t)\cdot 1 + d_2(t)\cdot x + \begin{cases} x - t & \text{si } \; 0 \le t \le x \le 1 \\ 0 & \text{si } \; 0 \le x \le t \le 1\,. \end{cases} \tag{2.4}$$

Les conditions $G(0,t) = 0$ et $G(1,t) = 0$ impliquent $d_1(t) = 0$ et $d_2(t) + 1 - t = 0$. On en déduit

$$G(x,t) = \begin{cases} t(x-1) & \text{si } \; 0 \le t \le x \le 1 \\ (t-1)x & \text{si } \; 0 \le x \le t \le 1\,. \end{cases} \tag{2.5}$$

Par conséquent, la solution de $y'' = h(x), y(0) = 0, y(1) = 0$ satisfait

$$y(x) = (x-1)\int_0^x t\,h(t)\,dt + x\int_x^1 (t-1)h(t)\,dt.$$

Remarques. La solution du problème (1.3) satisfait

$$y(x) = y_0(x) + \int_a^b G(x,t)h(t)\,dt,$$

où $y_0(x)$ est la solution de $Ly = 0$ satisfaisant les conditions aux bords $B_1 y = \gamma_1$ et $B_2 y = \gamma_2$.

On peut interpréter la fonction $x \mapsto G(x,t)$ comme solution de $Ly = \delta_t$ où δ_t est la "fonction δ de Dirac".

IV.3 Problèmes adjoints et auto-adjoints

Rappelons que, pour un opérateur linéaire A dans $\mathbb{R}^n$ (donné par une matrice A), l'opérateur adjoint A^* est défini par la relation $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^* v\rangle$. Il est donné par la transposée A^T de la matrice A.

Dans le contexte des équations différentielles, considérons le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \tag{3.1}$$

sur $\mathcal{C}([a,b])$ (où $[a,b]$ est un intervalle compact) et un problème aux limites donné par L, B_1, B_2. Le but de ce paragraphe est de déterminer L^*, B_1^*, B_2^* tels que

$$\langle Ly, z\rangle = \langle y, L^* z\rangle \tag{3.2}$$

pour toutes fonctions $y, z \in \mathcal{C}^2([a,b])$ satisfaisant $B_1 y = B_2 y = 0$ et $B_1^* z = B_2^* z = 0$.

Lemme 3.1 *Soient $a_2 \in \mathcal{C}^2([a,b])$, $a_1 \in \mathcal{C}^1([a,b])$ et $a_0 \in \mathcal{C}^0([a,b])$ avec $a_2(x) \neq 0$ sur $[a,b]$. Avec l'opérateur*

$$L^* z := (a_2(x)z)'' - (a_1(x)z)' + a_0(x)z \tag{3.3}$$

on a l'identité

$$\langle Ly, z\rangle - \langle y, L^* z\rangle = a_2(x)\Big(y'(x)z(x) - y(x)z'(x)\Big)\Big|_a^b + \Big(a_1(x) - a_2'(x)\Big)y(x)z(x)\Big|_a^b \tag{3.4}$$

pour toutes fonctions $y, z \in \mathcal{C}^2([a,b])$. L'opérateur L^* de (3.3) est appelé opérateur adjoint *de L.*

Démonstration. Dans l'expression

$$\langle Ly, z\rangle = \int_a^b \Big(a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x)\Big)z(x)\,dx \tag{3.5}$$

il faut éliminer les dérivées de $y(x)$. Ceci se fait par intégration par parties comme suit:

$$\begin{aligned}
\int_a^b a_2(x)y''(x)z(x)\,dx &= y'(x)a_2(x)z(x)\Big|_a^b - \int_a^b y'(x)(a_2 z)'(x)\,dx \\
&= y'(x)a_2(x)z(x)\Big|_a^b - y(x)(a_2 z)'(x)\Big|_a^b + \int_a^b y(x)(a_2 z)''(x)\,dx \\
\int_a^b a_1(x)y'(x)z(x)\,dx &= y(x)a_1(x)z(x)\Big|_a^b - \int_a^b y(x)(a_1 z)'(x)\,dx.
\end{aligned}$$

En insérant ces deux intégrales dans (3.5), on obtient l'identité désirée. □

Théorème 3.2 *Considérons le problème $Ly = 0$, $B_1 y = 0$, $B_2 y = 0$, où L satisfait les hypothèses du Lemme 3.1 et où les vecteurs $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ définissant B_1 et B_2 sont linéairement indépendants. Alors, il existe*

$$\begin{aligned} B_1^* z &= \gamma_1 z(a) + \gamma_2 z'(a) + \gamma_3 z(b) + \gamma_4 z'(b) \\ B_2^* z &= \delta_1 z(a) + \delta_2 z'(a) + \delta_3 z(b) + \delta_4 z'(b), \end{aligned} \tag{3.6}$$

tels que $\langle Ly, z\rangle = \langle y, L^* z\rangle$ pour toutes les fonctions $y, z \in \mathcal{C}^2([a,b])$ satisfaisant $B_1 y = B_2 y = 0$ et $B_1^* z = B_2^* z = 0$. Les coefficients γ_i et δ_i ne sont pas uniques, mais l'espace des fonctions z qui satisfont $B_1^* z = B_2^* z = 0$ est unique.

Démonstration. Le membre droit de l'équation (3.4) peut être écrit sous la forme $\vec{y}^T C \vec{z}$ où $\vec{y} = (y(a), y'(a), y(b), y'(b))^T$, $\vec{z} = (z(a), z'(a), z(b), z'(b))^T$ et

$$C = \begin{pmatrix} -D(a) & 0 \\ 0 & D(b) \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad D(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) - a_2'(x) & -a_2(x) \\ a_2(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons une matrice inversible B de dimension 4, dont les deux premières colonnes sont les vecteurs $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^T$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)^T$. On a alors que $(B_1 y, B_2 y, \cdot\,, \cdot\,) = \vec{y}^T B$ et on obtient

$$\vec{y}^T C \vec{z} = (B_1 y, B_2 y, \cdot\,, \cdot\,) B^{-1} C \vec{z}.$$

Si l'on dénote par $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ et $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$ les deux dernières lignes de la matrice $B^{-1}C$, on voit que $\vec{y}^T C \vec{z} = 0$ (et donc $\langle Ly, z\rangle = \langle y, L^* z\rangle$) pour des fonctions y, z satisfaisant $B_1 y = B_2 y = 0$ et $B_1^* z = B_2^* z = 0$.

Les coefficients γ_i et δ_i dépendent du choix de la matrice B. Si $\widehat{B}$ est une autre matrice inversible dont les deux premières colonnes sont comme pour B, on a

$$\widehat{B} = B \begin{pmatrix} I & U \\ 0 & V \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \widehat{B}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -UV^{-1} \\ 0 & V^{-1} \end{pmatrix} B^{-1},$$

où I est la matrice identité de dimension 2. Les coefficients $\widehat{\gamma}_i$ et $\widehat{\delta}_i$, qui correspondent au choix $\widehat{B}$, sont alors reliés avec γ_i et δ_i par

$$\begin{pmatrix} \widehat{\gamma}_1 & \widehat{\gamma}_2 & \widehat{\gamma}_3 & \widehat{\gamma}_4 \\ \widehat{\delta}_1 & \widehat{\delta}_2 & \widehat{\delta}_3 & \widehat{\delta}_4 \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{pmatrix}.$$

Ils définissent alors des conditions aux bords qui sont équivalentes à (3.6). □

Définition 3.3 Si le problème L, B_1, B_2 satisfait les hypothèses du Théorème 3.2, on appelle L^*, B_1^*, B_2^*, données par (3.3) et (3.6), le *problème aux limites adjoint*.

Le problème est dit *auto-adjoint*, si $L^* = L$ et si les conditions $B_1^* z = B_2^* z = 0$ sont équivalentes à $B_1 z = B_2 z = 0$.

En développant l'expression (3.3) pour $L^* z$ on obtient

$$L^* z = a_2(x) z'' + (2a_2'(x) - a_1(x)) z' + (a_2''(x) - a_1'(x) + a_0(x)) z.$$

L'opérateur L est donc auto-adjoint, si et seulement si $a_2'(x) = a_1(x)$, c.-à-d., s'il est de la forme $Ly = (a_2(x) y')' + a_0(x) y$.

Exemple 3.4 Le problème

$$\begin{array}{ll} (a_2(x)y')' + a_0(x)y = 0 & a_2 \in \mathcal{C}^1([a,b]) \ \text{ et } \ a_2(x) \neq 0 \ \text{ sur } \ [a,b], \ a_0 \in \mathcal{C}^0([a,b]), \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 & |\alpha| + |\beta| > 0, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0 & |\gamma| + |\delta| > 0 \end{array}$$

est un problème auto-adjoint. Pour voir ceci, il suffit de démontrer que

$$\langle Ly, z\rangle - \langle y, Lz\rangle \;=\; a_2(x)\Big(y'(x)z(x) - y(x)z'(x)\Big)\Big|_a^b$$

(voir le Lemme 3.1) s'annule pour toutes les fonctions y et z satisfaisant les conditions aux bords. On voit facilement que $y'(x)z(x) - y(x)z'(x)$ s'annule pour $x = a$ et pour $x = b$. Par exemple, si $\alpha \neq 0$, on a

$$y'(a)z(a) - y(a)z'(a) = y'(a)\Big(-\frac{\beta}{\alpha}\,z'(a)\Big) - \Big(-\frac{\beta}{\alpha}\,y'(a)\Big)z'(a) = 0.$$

Proposition 3.5 *Sous les hypothèses du Théorème 3.2, le problème $Ly = 0$, $B_1y = 0$, $B_2y = 0$ possède une solution unique, si et seulement si le problème adjoint $L^*z = 0$, $B_1^*z = 0$, $B_2^*z = 0$ possède une solution unique.*

Les fonctions de Green pour les deux problèmes satisfont alors

$$G^*(x,t) = G(t,x). \tag{3.7}$$

En particulier, la fonction de Green d'un problème auto-adjoint est symétrique.

Démonstration. Supposons que $Ly = 0, B_1y = 0, B_2y = 0$ possède une solution unique et notons par z une solution de $L^*z = 0, B_1^*z = 0, B_2^*z = 0$. Avec $y(x)$, solution de $Ly = z$, $B_1y = 0, B_2y = 0$, on obtient

$$\|z\|^2 = \langle z, z\rangle = \langle Ly, z\rangle = \langle y, L^*z\rangle = \langle y, 0\rangle = 0.$$

Donc $z = 0$ et l'unicité de la solution du problème adjoint est démontrée.

Pour démontrer la relation (3.7), considérons deux fonctions continues $f(x)$ et $g(x)$ et définissons

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)\,dt, \qquad z(x) = \int_a^b G^*(x,t)g(t)\,dt.$$

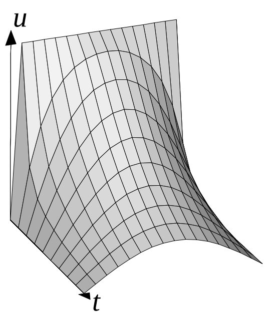
Par définition de la fonction de Green, les fonctions y et z satisfont $Ly = f, B_1y = 0, B_2y = 0$ et $L^*z = g, B_1^*z = 0, B_2^*z = 0$. La relation $\langle Ly, z\rangle = \langle y, L^*z\rangle$ (c.-à-d., $\langle f, z\rangle = \langle y, g\rangle$) implique alors

$$\int_a^b\int_a^b \Big(G^*(x,t) - G(t,x)\Big)f(x)g(t)\,dt\,dx = 0.$$

Comme cette relation est vérifiée pour toutes fonctions continues f et g, on en déduit la relation (3.7). □

IV.4 Le problème de Sturm–Liouville

Une motivation du problème de Sturm–Liouville (voir plus bas pour sa définition) est l'étude de *l'équation de la chaleur*



$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{pour } x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(t,0) = 0,\ u(t,1) = 0 & \text{(conditions aux bords)} \\ u(0,x) = f(x) & \text{(condition initiale).} \end{array}$$

L'idée consiste à chercher des solutions de la forme $u(t,x) = z(t)\cdot y(x)$ ("séparation des variables"). L'équation aux dérivées partielles devient alors $z'(t)y(x) = z(t)y''(x)$ ce qui est équivalent à

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = \lambda$$

(λ est forcement constant, car $z'(t)/z(t)$ ne dépend que de t et $y''(x)/y(x)$ seulement de x). On est alors conduit au problème

$$y'' = \lambda y, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 0 \tag{4.1}$$

et à la question: *pour quel λ ce problème possède-t-il une solution non-nulle?* Dans ce cas particulier, il est facile de trouver la réponse. La solution générale de $y'' = \lambda y$ est $c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ (si $\lambda \neq 0$). Donc, le problème (4.1) possède une solution non-nulle si et seulement si

$$0 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}} & e^{-\sqrt{\lambda}}\end{pmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda}} - e^{\sqrt{\lambda}} = e^{-\sqrt{\lambda}}(1 - e^{2\sqrt{\lambda}}).$$

Par conséquent, il faut que $2\sqrt{\lambda} = 2k\pi i$ avec un entier $k \neq 0$, et donc $\lambda = -k^2\pi^2$. La solution non-nulle de (4.1) est donnée par $y(x) = \sin(k\pi x)$. Comme $e^{\lambda t}$ est une solution de $z' = \lambda z$, on obtient $e^{-k^2\pi^2 t}\sin(k\pi x)$ comme solution de l'équation de la chaleur qui vérifie les conditions aux bords. Par linéarité, on voit que

$$u(t,x) = \sum_{k\ge 1} c_k e^{-k^2\pi^2 t}\sin(k\pi x) \tag{4.2}$$

est aussi une solution. Pour satisfaire la condition initiale $f(x) = u(0,x) = \sum_{k\ge1} c_k \sin(k\pi x)$, on choisit c_k comme coefficient de Fourier de la fonction $f(x)$.

Pour un problème plus général que l'équation de la chaleur, par exemple,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r(x)}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\big(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\big) + q(x)u\Big) \tag{4.3}$$

avec les conditions aux bords $u(t,0) = 0$ (Dirichlet) et $\frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0$ (Neumann) et la condition initiale $u(0,x) = f(x)$, la "séparation des variables" donne

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{1}{r(x)y(x)}\Big((p(x)y'(x))' + q(x)y(x)\Big) = -\lambda.$$

Il faut alors étudier l'existence de solutions non-nulles du problème

$$(p(x)y')' + q(x)y + \lambda r(x)y(x) = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(1) = 0.$$

Formulation du problème de Sturm–Liouville. Considérons

$$Ly + \lambda r y = 0, \qquad B_1 y = 0, \qquad B_2 y = 0 \tag{4.4}$$

où

$$\begin{aligned}
Ly &= (p(x)y')' + q(x)y && p \in \mathcal{C}^1([a,b]) \text{ et } p(x) > 0 \text{ sur } [a,b],\ q \in \mathcal{C}^0([a,b])\\
B_1 y &= \alpha y(a) + \beta p(a)y'(a) && |\alpha| + |\beta| > 0\\
B_2 y &= \gamma y(b) + \delta p(b)y'(b) && |\gamma| + |\delta| > 0
\end{aligned}$$

et où $r(x)$ est continue et strictement positive sur $[a,b]$. Le problème consiste à chercher des nombres complexes λ et des fonctions non-nulles $y(x)$, tels que (4.4) est vérifié. On appelle λ une *valeur propre* et $y(x)$ une *fonction propre* du problème de Sturm–Liouville. Le but est d'étudier les valeurs propres et les fonctions propres et de montrer l'existence d'une infinité de valeurs propres comme c'est le cas pour le problème (4.1).

Théorème 4.1 *Les valeurs propres du problème de Sturm–Liouville sont*

- *réelles (parce que le problème est auto-adjoint),*
- *simples (c.-à-d., les fonction propres forment un espace de dimension* 1*).*

Démonstration. Soient $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ une valeur propre et $y = y_1 + iy_2$ une fonction propre correspondante. Les parties réelles et imaginaires de (4.4) donnent

$$\begin{aligned} Ly_1 + r(\lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2) &= 0 \qquad B_1 y_1 = 0 \qquad B_2 y_1 = 0 \\ Ly_2 + r(\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2) &= 0 \qquad B_1 y_2 = 0 \qquad B_2 y_2 = 0. \end{aligned}$$

Comme le problème L, B_1, B_2 est auto-adjoint, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Ly_1, y_2\rangle - \langle y_1, Ly_2\rangle \\ &= \int_a^b r(x)\big(-\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)\big) y_2(x)\,dx + \int_a^b r(x)\big(\lambda_2 y_1(x) + \lambda_1 y_2(x)\big) y_1(x)\,dx \\ &= \lambda_2 \int_a^b r(x)\big(y_1^2(x) + y_2^2(x)\big)\,dx. \end{aligned}$$

Ceci démontre $\lambda_2 = 0$, car $r(x) > 0$ sur $[a,b]$ et $y_1 + iy_2 \neq 0$.

Supposons que, pour un λ fixé, le problème (4.4) possède deux solutions indépendantes $u(x)$ et $v(x)$. Alors, toutes les solutions de $Ly + \lambda ry = 0$ sont de la forme $y(x) = c_1u(x) + c_2v(x)$ et satisfont $B_1y = B_2y = 0$. Ceci est une contradiction, car on peut choisir $y(a), y'(a)$ tels que $\alpha y(a) + \beta p(a)y'(a) \neq 0$. □

Une conséquence de ce théorème est que les fonctions propres peuvent être choisies réelles. En effet, si $y = y_1 + iy_2$ est une fonction propre pour un $\lambda \in \mathbb{R}$, y_1 et y_2 sont aussi des fonctions propres pour λ. Elles sont donc linéairement dépendantes.

Théorème 4.2 (orthogonalité des fonctions propres) *Soit $y(x)$ une fonction propre pour la valeur propre λ et soit $z(x)$ une fonction propre pour μ ($\mu \neq \lambda$). Alors,*

$$\int_a^b r(x)y(x)z(x)\,dx = 0.$$

Démonstration. Comme y et z satisfont les conditions aux bords, on a

$$0 = \langle Ly, z\rangle - \langle y, Lz\rangle = -\lambda\langle ry, z\rangle + \mu\langle y, rz\rangle = (\mu - \lambda)\int_a^b r(x)y(x)z(x)\,dx.$$

L'affirmation est alors une conséquence de $\mu \neq \lambda$. □

Exemple 4.3 Pour le problème

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 0$$

(voir (4.1)) les valeurs propres sont $\lambda_k = k^2\pi^2$ et les fonctions propres sont $y_k(x) = \sin(k\pi x)$. Le Théorème 4.2 est une généralisation de la relation bien connue

$$\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(\ell\pi x)\,dx = 0 \qquad \text{si} \;\; k \neq \ell.$$

IV.5 Théorème de comparaison de Sturm

Nous allons démontrer qu'un problème auto-adjoint possède une infinité de valeurs propres λ_k qui tendent vers $+\infty$.

Théorème 5.1 (Sturm 1836) *Considérons les deux équations différentielles*

$$\begin{aligned}(p(x)y')' \;+\; q(x)y \;&=\; 0\\ (\widehat{p}(x)\widehat{y}\,')' \;+\; \widehat{q}(x)\widehat{y} \;&=\; 0\end{aligned}\tag{5.1}$$

($p(x), \widehat{p}(x)$ continûment différentiables et $q(x), \widehat{q}(x)$ continues) et supposons que

$$0 < \widehat{p}(x) \le p(x), \qquad \widehat{q}(x) \ge q(x) \qquad \textit{sur}\ \ [a,b].\tag{5.2}$$

Si les solutions $y(x), \widehat{y}(x)$ sont linéairement indépendantes et si $y(x_1) = y(x_2) = 0$ avec $x_1 < x_2$, alors il existe $x_3 \in (x_1, x_2)$ tel que $\widehat{y}(x_3) = 0$.

Démonstration. Les expressions $y(x)$ et $p(x)y'(x)$ ne s'annulent pas en même temps (sinon $y(x) \equiv 0$, ce qui n'est pas possible). On peut donc utiliser des coordonnées polaires

$$p(x)y'(x) = \rho(x)\cos\varphi(x), \qquad y(x) = \rho(x)\sin\varphi(x)$$

où $\rho(x) > 0$ sur $[a,b]$. On calcule les dérivées

$$\begin{aligned}(p(x)y'(x))' \;&=\; \rho'(x)\cos\varphi(x) - \rho(x)\varphi'(x)\sin\varphi(x)\\ y'(x) \;&=\; \rho'(x)\sin\varphi(x) + \rho(x)\varphi'(x)\cos\varphi(x)\end{aligned}$$

et, en utilisant (5.1), on obtient les équations différentielles suivantes:

$$\varphi' \;=\; \frac{1}{p(x)}\cos^2\varphi + q(x)\sin^2\varphi, \qquad \rho' \;=\; \Big(\frac{1}{p(x)} - q(x)\Big)\sin\varphi\,\cos\varphi\cdot\rho.\tag{5.3}$$

De la même manière on définit $\widehat{\rho}(x), \widehat{\varphi}(x)$ et on obtient des équations différentielles analogues.

Supposons maintenant que x_1, x_2 soient deux zéros consécutifs de $y(x)$. Alors $\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$ sont des multiples entiers de π. De l'équation différentielle (5.3), on voit que $\varphi'(x_1) > 0$ et $\varphi'(x_2) > 0$. Donc, on peut supposer que

$$\varphi(x_1) = 0, \qquad \varphi(x_2) = \pi, \qquad \widehat{\varphi}(x_1) \in [0,\pi)$$

(on suppose $\widehat{y}(x_1) \ge 0$, sinon on multiplie $\widehat{y}(x)$ par -1). L'hypothèse (5.2) nous donne l'inégalité différentielle

$$\widehat{\varphi}\,' \;=\; \frac{1}{\widehat{p}(x)}\cos^2\widehat{\varphi} + \widehat{q}(x)\,\sin^2\widehat{\varphi} \;\ge\; \frac{1}{p(x)}\cos^2\widehat{\varphi} + q(x)\,\sin^2\widehat{\varphi}.\tag{5.4}$$

Comme $\widehat{\varphi}(x_1) \ge \varphi(x_1)$, on en déduit (utiliser le Théorème III.5.2; pour être précis, il faut soustraire un $\epsilon > 0$ et considérer la limite $\epsilon \to 0$) que

$$\widehat{\varphi}(x) \ge \varphi(x) \qquad \text{pour tout}\ \ x \in [x_1, x_2].$$

Dans le cas où il existe $x_0 \in (x_1, x_2)$ avec $\widehat{\varphi}(x_0) > \varphi(x_0)$, on a $\widehat{\varphi}(x) > \varphi(x)$ pour tout $x \ge x_0$ (car $\widehat{\varphi}(x) \ge \widetilde{\varphi}(x) > \varphi(x)$ où $\widetilde{\varphi}(x)$ est la solution de (5.3) avec $\widetilde{\varphi}(x_0) = \widehat{\varphi}(x_0)$). Comme $\varphi(x_2) = \pi$, il existe alors $x_3 \in (x_1, x_2)$ avec $\widehat{\varphi}(x_3) = \pi$, c.-à-d., $\widehat{y}(x_3) = 0$.

Dans le cas contraire, on a $\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x)$ sur $[x_1, x_2]$. Ceci implique $\widehat{\varphi}\,'(x) = \varphi'(x)$ et

$$\Big(\frac{1}{\widehat{p}(x)} - \frac{1}{p(x)}\Big)\cos^2\varphi(x) + \big(\widehat{q}(x) - q(x)\big)\sin^2\varphi(x) = 0.$$

Par l'hypothèse (5.2) les deux termes s'annulent séparement:

$$\frac{1}{\widehat{p}(x)}\cos\varphi(x) = \frac{1}{p(x)}\cos\varphi(x), \qquad \widehat{q}(x)\sin\varphi(x) = q(x)\sin\varphi(x).$$

On voit donc que $\rho(x)$ et $\widehat{\rho}(x)$ sont solutions de la même équation différentielle du type $\rho' = a(x)\rho$. On en déduit que $\widehat{\rho}(x) = C\rho(x)$ et $\widehat{y}(x) = Cy(x)$, ce qui est une contradiction. □

Exemple 5.2 Comme illustration pour la démonstration du théorème suivant, nous considérons le problème

$$((1 - 0.8\sin^2 x)y')' - (x - \lambda)y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(\pi) = 0. \tag{5.5}$$

Fig. 5.1 (dessin de gauche) montre les solutions de l'équation différentielle (5.5) avec pour valeurs initiales $y(0) = 0, y'(0) = 1$ et pour les valeurs $\lambda = 2.1, 2.1 + \delta, 2.1 + 2\delta$, pour $\lambda = 4, 4 + 3\delta, 4 + 6\delta$, ainsi que pour $\lambda = 6, 6 + 6\delta, 6 + 12\delta$ $(\delta = 0.05)$. On peut observer que les racines de la solution se déplacent vers la gauche (en direction de l'origine), si λ croît.

Le dessin de droite montre les cinq premières fonctions propres du problème (5.5), normalisées à $y'(0) = 1$. Les valeurs propres de ce problème sont 2.1224, 3.6078, 6.0016, 9.3773, 13.7298, 19.053, 25.347, 32.609, 40.841, 50.041, ...

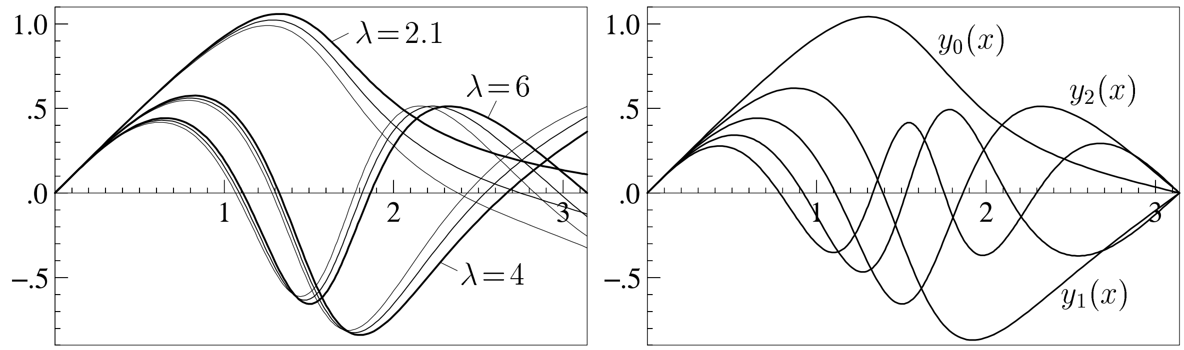


FIG. 5.1 – *Solutions du problème de Sturm–Liouville (Exemple 5.2)*

Théorème 5.3 *Considérons le problème*

$$(p(x)y')' + q(x)y + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 0, \tag{5.6}$$

où $p(x)$ est continûment différentiable et strictement positive sur $[0, 1]$, et où $q(x)$ est continue. Alors, les valeurs propres et les fonctions propres satisfont:

- *les valeurs propres forment une suite infinie $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$,*
- *la $j$ème fonction propre $y_j(x)$ possède exactement j zéros dans l'intervalle ouvert $(0, 1)$,*
- *entre deux zéros consécutifs de $y_j(x)$ il y a un zéro unique de $y_{j+1}(x)$,*
- *si $0 < K_1 \le p(x) \le K_2$ et $L_2 \le q(x) \le L_1$ sur $[0, 1]$, alors*

$$-L_1 + K_1 j^2\pi^2 \le \lambda_j \le -L_2 + K_2 j^2\pi^2, \tag{5.7}$$

en particulier, $\lambda_j \to \infty$ pour $j \to \infty$.

Démonstration. Notons par $y(x,\lambda)$ la solution de

$$(p(x)y')' + (q(x)+\lambda)y = 0, \qquad y(0)=0, \qquad y'(0)=1 \tag{5.8}$$

(on peut supposer la normalisation $y_j'(0)=1$ pour les fonctions propres). La fonction $y(x,\lambda)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (voir le paragraphe III.8). Notons par $\xi_j(\lambda)$ la $j$ème racine positive de $y(x,\lambda)=0$. Cette racine est simple (à cause de l'unicité de la solution) et donc $\xi_j(\lambda)$ est continûment différentiable (par le théorème des fonctions implicites).

a) Montrons d'abord que $\xi_j(\lambda)$ est strictement décroissant

$$\xi_j(\lambda+\Delta\lambda) < \xi_j(\lambda) \qquad \text{pour} \quad \Delta\lambda > 0.$$

L'idée est d'appliquer le Théorème 5.1 avec $\widehat{p}(x)=p(x)$ et avec $q(x)$ et $\widehat{q}(x)$ remplacés par $q(x)+\lambda$ et $q(x)+\lambda+\Delta\lambda$ respectivement. Entre 0 et $\xi_1(\lambda)$ il y a donc un zéro de $y(x,\lambda+\Delta\lambda)$, c.-à-d., $\xi_1(\lambda+\Delta\lambda)<\xi_1(\lambda)$. Entre $\xi_1(\lambda)$ et $\xi_2(\lambda)$ il y a un autre zéro de $y(x,\lambda+\Delta\lambda)$, donc $\xi_2(\lambda+\Delta\lambda)<\xi_2(\lambda)$, etc.

b) Comparons l'équation différentielle (5.8) avec $K_1\widehat{y}''+(L_1+\lambda)\widehat{y}=0$, dont $\widehat{y}(x)=\sin(x\sqrt{(L_1+\lambda)/K_1})$ est une solution. Si

$$L_1+\lambda < K_1 j^2\pi^2,$$

le nombre de zéros de $\widehat{y}(x)$ dans $(0,1]$ est $\le j-1$. Par le Théorème 5.1 de Sturm, le nombre de zéros de $y(x,\lambda)$ dans $(0,1]$ est aussi $\le j-1$ (argumenter par l'absurde).

c) Comparons encore avec $K_2\widehat{y}''+(L_2+\lambda)\widehat{y}=0$, et $\widehat{y}(x)=\sin(x\sqrt{(L_2+\lambda)/K_2})$. Si

$$L_2+\lambda > K_2 j^2\pi^2,$$

le nombre de zéros de $\widehat{y}(x)$ dans $(0,1)$ est $\ge j$. En échangeant les rôles de y et $\widehat{y}$ dans le Théorème 5.1, on voit que le nombre de zéros de $y(x,\lambda)$ dans $(0,1)$ est aussi $\ge j$.

Les affirmations du théorème sont une conséquence directe de ces trois propriétés. L'existence d'une suite infinie de valeurs propres et l'estimation (5.7) suivent de (b) et (c). La monotonie de $\xi_j(\lambda)$ implique les propriétés affirmées concernant des fonctions propres. □

Remarque. Sous les hypothèses du Théorème 5.3 les fonctions propres engendrent tout l'espace $L_2([a,b])$. Une série comme dans (4.2) nous permet donc de satisfaire la condition initiale pour (4.3).

IV.6 Equations différentielles avec des singularités

Les vibrations transversales de la membrane d'un tambour sont décrites par l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\Delta u \qquad \text{pour} \quad (x,y)\in\Omega \quad \text{et} \quad t>0, \tag{6.1}$$

où $\Omega=\{(x,y)\,;\,x^2+y^2<1\}$. La valeur $u(t,x,y)$ représente le déplacement transversal d'un point (x,y) de la membrane en fonction du temps. On suppose $u(t,x,y)=0$ pour $(x,y)\in\partial\Omega$ (la membrane est fixée au bord) et des valeurs initiales pour $u(0,x,y)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y)$. Comme dans le paragraphe IV.4 pour l'équation de la chaleur, la “séparation des variables” $u(t,x,y)=T(t)\cdot v(x,y)$ conduit à

$$\frac{T''}{c^2T} = \frac{\Delta v}{v} = -\lambda^2.$$

L'équation différentielle pour $T(t)$ donne les oscillations en temps et $v(x,y)$ doit satisfaire

$$\begin{aligned} \Delta v + \lambda^2 v &= 0 \qquad \text{sur } \Omega \\ v &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Pour résoudre ce problème sur le disque Ω, il est naturel d'introduire des coordonnées polaires $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ et de considérer la fonction $w(r,\varphi) = v(x,y) = v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Un calcul direct montre que le problème (6.2) devient

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 w = 0 \tag{6.3}$$

$$w(1,\varphi) = 0, \qquad w(r,0) = w(r,2\pi), \qquad \frac{\partial w}{\partial \varphi}(r,0) = \frac{\partial w}{\partial \varphi}(r,2\pi), \tag{6.4}$$

où la limite $\lim_{r\to 0} w(r,\varphi)$ est constante et indépendante de φ. Une deuxième "séparation des variables" $w(r,\varphi) = a(r)\cdot z(\varphi)$ donne

$$\frac{r^2 a'' + ra' + \lambda^2 r^2 a}{a} = -\frac{z''}{z} = C.$$

La condition de périodicité $z(0) = z(2\pi)$, $z'(0) = z'(2\pi)$ implique que $C = n^2$ avec un entier n. Les solutions pour $z(\varphi)$ sont alors $z(\varphi) = c_1 \cos n\varphi + c_2 \sin n\varphi$. Pour la fonction $a(r)$ on obtient l'équation différentielle

$$r^2 a'' + ra' + (\lambda^2 r^2 - n^2)a = 0 \tag{6.5}$$

avec les conditions aux bords

$$a(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad a(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 0 \\ \text{une valeur finie} & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Pour $\lambda \neq 0$ la transformation $x = \lambda r$ et $y(x) = a(r)$ élimine le paramètre λ de l'équation différentielle et (6.5) devient *l'équation de Bessel*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \tag{6.6}$$

Nous allons démontrer plus tard dans ce paragraphe que cette équation différentielle possède une solution $J_n(x)$ qui est bornée pour $x \to 0$ (on a $J_n(0) = 0$ pour $n > 0$) et qui possède une infinité de zéros positifs $0 < j_{n1} < j_{n2} < j_{n3} < \ldots$ (voir la Fig. 6.1 et l'Exercice 17). La fonction $a(r) = J_n(j_{nk} r)$ satisfait alors (6.5) avec $\lambda = j_{nk}$ et aussi $a(1) = 0$. Par conséquent,

$$J_n(j_{nk} r)\cos n\varphi \qquad \text{et} \qquad J_n(j_{nk} r)\sin n\varphi$$

sont des solutions de (6.2) (Fig. 6.2). Par superposition, on obtient la solution générale.

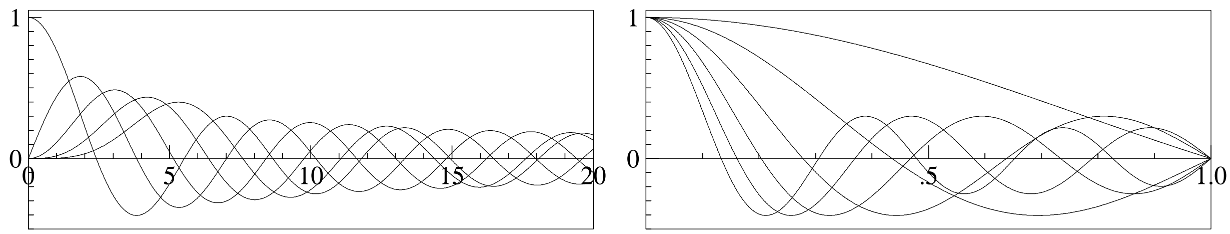


FIG. 6.1 – *Fonctions de Bessel $J_n(x)$ (gauche), $J_0(j_{0k} r)$ (droite)*

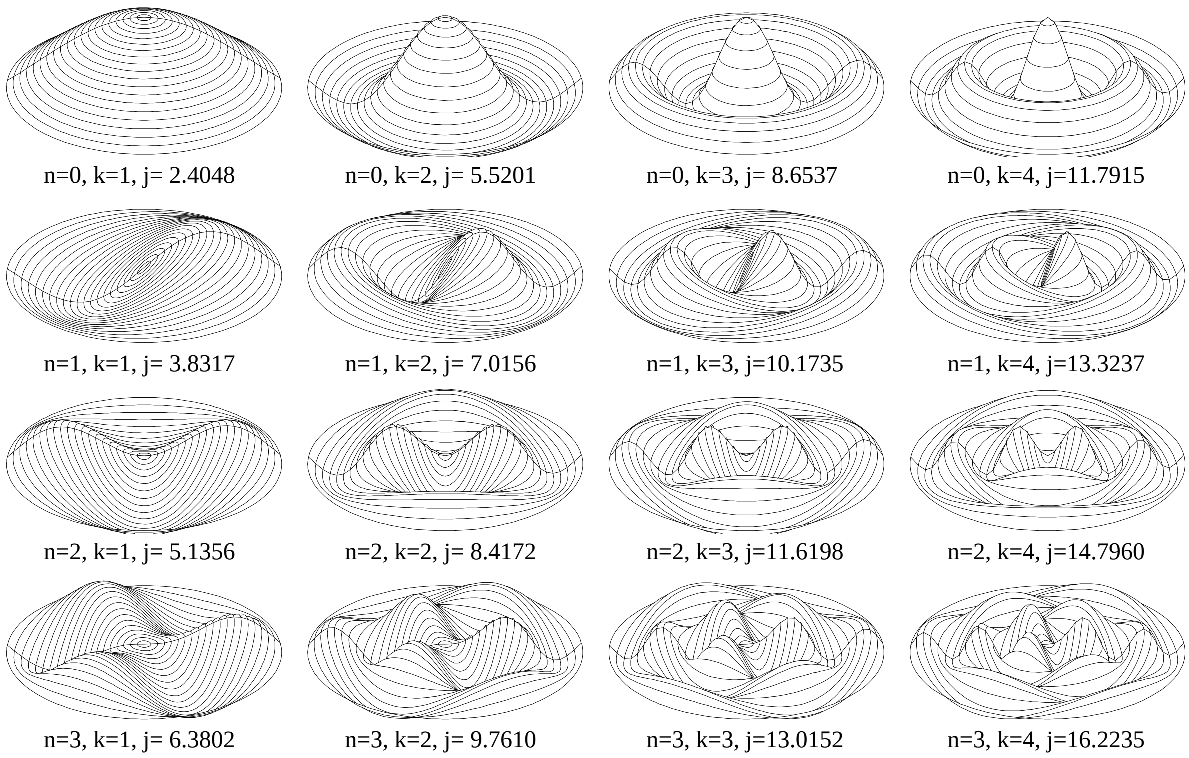


FIG. 6.2 – *Fonctions propres* $J_n(j_{nk}r)\cos n\varphi$ *du Laplacien sur le disque*

Une particularité de l'équation de Bessel (6.6) est que le coefficient $a_2(x) = x^2$ de y'' s'annule en un point où on s'intéresse à la solution.

Définition 6.1 Si l'équation différentielle est sous la forme

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{6.7}$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont analytiques dans un voisinage de x_0, alors le point x_0 s'appelle *point singulier régulier* de l'équation différentielle.

Exemple 6.2 Le point $x = 0$ est un point singulier régulier de l'équation de Bessel (6.6). Pour *l'équation hypergéometrique*

$$x(1 - x)y'' + (c - (a + b + 1)x)y' - aby = 0 \tag{6.8}$$

les points $x = 0$ et $x = 1$ sont singuliers réguliers (multiplier l'équation par $x/(1 - x)$ pour voir que (6.8) est sous la forme (6.7) proche de l'origine).

Pour résoudre (6.7), écrivons les fonctions $p(x)$, $q(x)$ sous la forme d'une série

$$p(x) = \sum_{j\geq 0} p_j (x - x_0)^j, \qquad q(x) = \sum_{j\geq 0} q_j (x - x_0)^j. \tag{6.9}$$

Si $p(x) = p_0$ et $q(x) = q_0$ sont constantes (équation de Cauchy, voir [HW95, Sect. II.8]), on trouve des solutions de la forme $y(x) = (x - x_0)^\alpha$ où $\alpha(\alpha - 1) + p_0\alpha + q_0 = 0$. Ceci suggère de chercher des solutions de (6.7) sous la forme

$$y(x) = (x - x_0)^\alpha \sum_{j\geq 0} c_j (x - x_0)^j = \sum_{j\geq 0} c_j (x - x_0)^{j+\alpha} \qquad \text{avec} \quad c_0 \neq 0. \tag{6.10}$$

On calcule les dérivées

$$y'(x) = \sum_{j \geq 0} c_j (j+\alpha)(x-x_0)^{j+\alpha-1}, \qquad y''(x) = \sum_{j \geq 0} c_j (j+\alpha)(j+\alpha-1)(x-x_0)^{j+\alpha-2}$$

et on les insert dans l'équation différentielle (6.7). En comparant les coefficients de $(x-x_0)^{k+\alpha}$, on voit que $y(x)$ de (6.10) est une solution de (6.7) si et seulement si pour tout $k \geq 0$

$$c_k(k+\alpha)(k+\alpha-1) + \sum_{j=0}^{k} c_j (j+\alpha) p_{k-j} + \sum_{j=0}^{k} c_j q_{k-j} = 0.$$

Cette relation peut être écrite sous la forme

$$c_k f(k+\alpha) + \sum_{j=0}^{k-1} c_j \Big((j+\alpha) p_{k-j} + q_{k-j} \Big) = 0 \tag{6.11}$$

avec

$$f(\alpha) = \alpha(\alpha-1) + \alpha p_0 + q_0. \tag{6.12}$$

Pour $k = 0$ on obtient $c_0 f(\alpha) = 0$ et donc $f(\alpha) = 0$ (car $c_0 \neq 0$). Comme $f(\alpha)$ est un polynôme de degré 2, on a en général deux choix possibles pour la valeur de α.

Lemme 6.3 *Soit c_0 arbitrairement donné et supposons que*

$$f(\alpha) = 0 \qquad \textit{et} \qquad f(\alpha+k) \neq 0 \quad \textit{pour} \ \ k = 1, 2, \ldots \ .$$

Alors, la série $\sum_{k \geq 0} c_k (x-x_0)^k$ avec les coefficients c_k donnés par (6.11), possède un rayon de convergence $\geq \min(\rho_p, \rho_q)$, où ρ_p et ρ_q sont les rayons de convergence des séries (6.9).

Démonstration. Le fait que $f(\alpha+k)$ est un polynôme de degré 2 en k et l'hypothèse $f(\alpha+k) \neq 0$ pour $k = 1, 2, \ldots$ impliquent que

$$|f(\alpha+k)| \geq \mu k^2 \qquad \text{pour} \ \ k = 1, 2, \ldots$$

avec un $\mu > 0$. Fixons maintenant un $\rho < \min(\rho_p, \rho_q)$. On a alors

$$|p_j| \rho^j \leq M_p \qquad \text{et} \qquad |q_j| \rho^j \leq M_q \qquad \text{pour} \ \ j = 1, 2, \ldots$$

et la relation (6.11) implique que pour $k \geq 1$

$$|c_k| \leq \frac{1}{\mu k^2} \sum_{j=0}^{k-1} |c_j| \Big(|j+\alpha| M_p + M_q \Big) \rho^{j-k} \leq \frac{M}{k} \sum_{j=0}^{k-1} |c_j| \rho^{j-k}$$

avec une constante $M \geq 1$. Par récurrence sur k, on en déduit que

$$|c_k| \leq |c_0| M k^{M-1} \rho^{-k} \qquad \text{pour} \ \ k = 1, 2, \ldots$$

(utiliser l'inégalité $1 + M \sum_{j=1}^{k-1} j^{M-1} \leq k^M$). Ceci entraîne que le rayon de convergence de la série $\sum_{k \geq 0} c_k (x-x_0)^k$ est $\geq \rho$. $\square$

Si α_1 et α_2 (avec $\Re\alpha_1 \geq \Re\alpha_2$) sont les deux racinces de l'équation $f(\alpha) = 0$, la fonction

$$y_1(x) = (x - x_0)^{\alpha_1} \sum_{j\geq 0} c_j(\alpha_1)(x - x_0)^j$$

est une solution de (6.7), car $f(\alpha_1 + k) \neq 0$ pour tout $k \geq 1$. Nous avons noté les coefficients c_j de (6.11) par $c_j(\alpha)$ pour indiquer la dépendance du paramètre α. Comment trouve-t-on une deuxième solution de (6.7) qui est linéairement indépendante de $y_1(x)$?

Cas 1. Si $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}$, on est sûr que $f(\alpha_2 + k) \neq 0$ pour $k \geq 1$. Donc,

$$y_2(x) = (x - x_0)^{\alpha_2} \sum_{j\geq 0} c_j(\alpha_2)(x - x_0)^j$$

est une deuxième solution de (6.7). Elle est indépendante de $y_1(x)$, car les termes dominants possèdent des puissances différentes.

Cas 2. Si $\alpha_1 - \alpha_2 = m \in \mathbb{Z}$, on a que $f(\alpha_2 + m) = 0$ et la relation (6.11) ne permet pas de calculer c_m. Inspirés par les équations de Cauchy, où x^α et $x^\alpha \ln x$ sont des solutions si α est une racine double du polynôme caractéristique, nous cherchons une deuxième solution sous la forme

$$y_2(x) = C y_1(x) \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{\alpha_2} \sum_{j\geq 0} d_j (x - x_0)^j. \tag{6.13}$$

Si l'on insert $y_2(x)$ dans l'équation différentielle (6.7), le terme avec le logarithme se simplifie et on peut déterminer d_j et C par comparaison des mêmes puissances de $(x - x_0)^{\alpha_2 + j}$.

Exemple 6.4 (Equation de Bessel) Appliquons cette procédure à l'équation de Bessel

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0, \tag{6.14}$$

où $n \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$. En insérant (6.10) avec $x_0 = 0$ dans (6.14) on obtient

$$\sum_{j\geq 0} c_j (j+\alpha)(j+\alpha-1) x^{j+\alpha} + \sum_{j\geq 0} c_j (j+\alpha) x^{j+\alpha} + (x^2 - n^2) \sum_{j\geq 0} c_j x^{j+\alpha} = 0.$$

Une comparaison des coefficients donne

$$c_0\Big(\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2\Big) = 0 \tag{6.15}$$

$$c_1\Big((1+\alpha)\alpha + (1+\alpha) - n^2\Big) = 0 \tag{6.16}$$

$$c_j\Big((j+\alpha)(j+\alpha-1) + (j+\alpha) - n^2\Big) + c_{j-2} = 0. \tag{6.17}$$

Comme $c_0 \neq 0$, l'équation (6.15) implique $\alpha^2 - n^2 = 0$, c.-à-d., $\alpha_1 = n$ et $\alpha_2 = -n$. En utilisant $\alpha^2 = n^2$, l'équation (6.16) devient $c_1(2\alpha + 1) = 0$ et on obtient $c_1 = 0$ à condition que $\alpha \neq -1/2$ (supposons pour le moment que ceci est le cas). L'équation (6.17) donne $c_j \cdot j(j + 2\alpha) + c_{j-2} = 0$. Le fait que $c_1 = 0$ implique que $c_j = 0$ pour tout j impair. Pour $j = 2k$ on a $c_{2k} \cdot 4k(k + \alpha) + c_{2k-2} = 0$ et on voit par récurrence que

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k\, k!\, \prod_{i=1}^k (i+\alpha)}\, c_0$$

si $\alpha \neq -1, -2, \ldots$. Avec le choix $c_0 = \big(2^\alpha \Gamma(\alpha+1)\big)^{-1}$, où $\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha\, dx$ est la fonction gamma d'Euler (voir [HW95, Sect. III.8]), la fonction $y(x)$ de (6.10) devient

$$J_\alpha(x) = \Big(\frac{x}{2}\Big)^\alpha \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\, \Gamma(\alpha+k+1)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k}. \tag{6.18}$$

Cette fonction s'appelle *fonction de Bessel* d'indice α. Avec l'interprétation $\frac{1}{\Gamma(0)} = \frac{1}{\Gamma(-1)} = \frac{1}{\Gamma(-2)} = \ldots = 0$, elle est définie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Le critère du quotient

$$\Big|\frac{c_{2k}}{c_{2(k+1)}}\Big| = 4(k+1)(k+1+\alpha) \to \infty$$

montre que la série dans (6.18) converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Par construction, $J_n(x)$ et $J_{-n}(x)$ sont des solutions de (6.14). Pour $n \notin \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ on a que $J_n(x) \to 0$ et $J_{-n}(x) \to \infty$ si $x \to 0$. Les deux fonctions sont donc linéairement indépendantes et la solution générale de (6.14) est donnée par $C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x)$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Cette formule est obtenue par un calcul direct:

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \Big(\frac{x}{2}\Big)^{-n} \sum_{k\geq n} \frac{(-1)^k}{k!\,(-n+k)!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k} = \Big(\frac{x}{2}\Big)^{-n} \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^{j+n}}{(j+n)!\,j!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2j+2n} \\ &= (-1)^n \Big(\frac{x}{2}\Big)^{n} \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^{j+n}}{j!\,(n+j)!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2j} = (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

Une deuxième solution indépendante peut être trouvée avec l'ansatz

$$Y_n(x) = C J_n(x) \ln x + x^{-n} \sum_{j\geq 0} d_j x^j$$

(voir l'équation (6.13)).

IV.7 Exercices

1. Est-ce que le problème

$$y'' = h(x)$$

avec pour conditions aux limites périodiques $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$ possède une solution unique?

2. On considère le problème

$$\begin{aligned} (a_2(x)y')' + a_0(x)y &= 0 \qquad (7.1)\\ \alpha y(a) + \beta y'(a) &= 0 \qquad (7.2)\\ \gamma y(b) + \delta y'(b) &= 0 \qquad (7.3) \end{aligned}$$

où $a_0(x)$ est continue, $a_2(x)$ est continûment différentiable et $a_2(x) \neq 0$ pour $x \in [a,b]$.

(a) En utilisant le théorème de Liouville, montrer que pour deux solutions $u(x)$ et $v(x)$ de (7.1) on a

$$a_2(x)\Big(u(x)v'(x) - v(x)u'(x)\Big) = C = \text{const.} \qquad (7.4)$$

(b) Supposons que la solution de (7.1)-(7.3) soit unique et notons par $u(x)$ une solution de (7.1) satisfaisant (7.2), et par $v(x)$ une solution de (7.1) satisfaisant (7.3). Montrer que la fonction de Green est donnée par

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{C}u(x)v(t) & \text{si} \quad x \leq t \\ \frac{1}{C}u(t)v(x) & \text{si} \quad x \geq t \end{cases}$$

où C est la constante de (7.4).

3. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, calculer la fonction de Green de
$$xy'' + y' = 0\,, \qquad y(1) = 0, \;\; y(2) = 0,$$
$$y'' + y = 0\,, \qquad y(a) = 0, \;\; y(b) = 0.$$
4. Calculer la fonction de Green de
$$y'' = 0, \qquad y(0) + 2y(1) = 0, \quad 2y'(0) + y'(1) = 0.$$
Le résultat est $G(x,t) = |x-t|/2 + (x+t)/6 - 4/9$.
5. Soit le problème
$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x) = 0\,, \qquad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 0$$
sur $[0,1]$. Calculer le problème adjoint.
6. Soit le problème générale
$$Ly = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \qquad B_1y = 0, \quad B_2y = 0,$$
on suppose avoir existence et unicité de la solution. Démontrer que pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$ satisfaisant $\varphi(x) \equiv 0$ en dehors de $(a+\epsilon, b-\epsilon)$ avec un $\epsilon > 0$, on a que
$$\int_a^b G(x,t)(L^*\varphi)(x)\,dx = \varphi(t)\ .$$
Ceci est équivalent à $LG_t = \delta_t$ dans le sens des distributions où $G_t(x) = G(x,t)$.
7. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 4
$$y^{(4)} = h(x)\,, \quad x \in [0,1]\,, \tag{7.5}$$
et les conditions aux bords
$$B_1y = 0\,, \;\; B_2y = 0\,, \;\; B_3y = 0\,, \;\; B_4y = 0\,,$$
où B_iy est une combinaison linéaire de $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, $y(1)$, $y'(1)$, $y''(1)$, $y'''(1)$. Etudier l'existence et l'unicité des solutions. Sous l'hypothèse d'existence et d'unicité, démontrer qu'il existe une unique fonction continue $G(x,t)$ sur $[0,1]\times[0,1]$ (la fonction de Green) telle que la solution soit donnée par
$$y(x) = \int_0^1 G(x,t)h(t)dt\ .$$
8. L'équation différentielle de la ligne élastique d'une poutre est donnée par (7.5), où $h(x)$ représente la charge. Calculer la fonction de Green pour les situations suivantes:
   (a) la poutre est fixée aux deux extrémités:
   $$y(0) = y'(0) = 0\,, \qquad y(1) = y'(1) = 0\,.$$
   (b) la poutre est librement posée aux deux extrémités:
   $$y(0) = y''(0) = 0\,, \qquad y(1) = y''(1) = 0\,.$$
   (c) la poutre est fixée à gauche, mais complètement libre à droite:
   $$y(0) = y'(0) = 0\,, \qquad y''(1) = y'''(1) = 0\,.$$

   Résultat. $G(x,t)$ est symétrique et pour $t \le x$ on a
   (a) $G(x,t) = t^2(1-x^2)(3x-t-2xt)/6$,
   (b) $G(x,t) = t(1-x)(2x-x^2-t^2)/6$,
   (c) $G(x,t) = t^2(3x-t)/6$.
9. Calculer les valeurs propres et les fonctions propres du problème
$$(xy')' + \frac{\lambda}{x}y = 0\,, \qquad y(1) = 0\,, \quad y(2) = 0\,.$$
10. Calculer les valeurs propres et les fonctions propres du problème
$$y'' + \lambda y = 0\,, \qquad y(0) = y'(0)\,, \quad y(1) = 0$$
et montrer que les valeurs propres satisfont $\sqrt{\lambda_k} = \pi/2 + k\pi + \beta_k$ avec $\beta_k \to 0$.

11. Transformation sous forme auto-adjointe. Considérons l'opérateur
$$Ly \;=\; a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y,$$
où les $a_i(x)$ sont suffisamment différentiables sur l'intervalle considéré. Comment faut-il choisir $\varphi(x)$ pour que la transformation $y \;=\; \varphi(x)z$ nous conduise à un opérateur auto-adjoint?
12. Considérons
$$y'' + \frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}y - \lambda\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}y \;=\; 0\,, \qquad y'(0) \;=\; 0\,, \quad y'(\pi) \;=\; 0\,.$$
Montrer que $y(x) = i + \cos x$ est une fonction propre pour la valeur propre $\lambda = i$.
Comment expliquer cette valeur propre complexe?
13. Résoudre par séparation des variables le problème
$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u, && 0 < x < 1,\; t > 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) \;=\; \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) \;=\; 0, && t > 0 \\ &u(0,x) \;=\; f(x), && 0 < x < 1 \end{aligned} \tag{7.6}$$
(la température d'une barre dont les extrémités sont isolées mais qui échange de la chaleur en chaque point avec le milieu extérieur).
14. L'opérateur différentiel
$$Ly \;=\; (p(x)y')' + q(x)y\,, \qquad x \in (a,\infty)$$
($p \in \mathcal{C}^1(a,\infty)$ et $p(x) > 0$ sur (a,∞), $q \in \mathcal{C}^0(a,\infty)$), s'appelle *oscillatoire*, si chaque solution non-nulle de $Ly = 0$ possède une infinité de zéros dans (a,∞). En utilisant le théorème de comparaison de Sturm, montrer que L est oscillatoire si et seulement si il existe *une* solution non-nulle ayant une infinité de zéros dans (a,∞).
15. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'opérateur
$$y'' + \frac{\alpha}{x^2}y\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$
est oscillatoire.
16. Démontrer que l'opérateur différentiel
$$Ly \;=\; y'' + q(x)y$$
(a) est oscillatoire, si $\liminf_{x\to\infty} x^2 q(x) > 1/4$;
(b) n'est pas oscillatoire, si $\limsup_{x\to\infty} x^2 q(x) < 1/4$.
Indication. Comparer l'opérateur L avec celui de l'Exercice 15.
17. A l'aide de $y = \varphi(x)z$ transformer l'équation de Bessel
$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y \;=\; 0$$
sous la forme $z'' + q(x)z \;=\; 0$. Montrer que l'équation de Bessel est oscillatoire pour tout $n \in \mathbb{R}$, et calculer $J_n(x)$ pour $n = \pm 1/2$.
Résultat. $J_{1/2}(x) = \sqrt{2/\pi x}\,\sin x$, $J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/\pi x}\,\cos x$.
18. Démontrer la formule de récurrence
$$J_{n+1}(x) - \frac{2n}{x}J_n(x) + J_{n-1}(x) \;=\; 0\,.$$
En utilisant l'Exercice 17, calculer $J_{3/2}(x)$.
19. On considère l'équation hypergéométrique
$$x(1-x)y'' + (c - (a+b+1)x)y' - aby \;=\; 0\,.$$
Trouver une solution dans un voisinage de $x = 0$.
Le résultat est
$$F(x;a,b,c) \;=\; \sum_{k\ge 0} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{x^k}{k!}$$
où $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k+1)$.

20. On considère l'équation différentielle
$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y \;=\; 0 \;.$$
Pour étudier le comportement des solutions à l'infini utiliser la transformation $w = 1/x$, $z(w) = y(x)$. Démontrer que ∞ est un point singulier régulier de l'équation hypergéométrique. Est-ce aussi vrai pour l'équation de Bessel?

21. Justifier l'ansatz (6.13) pour une deuxième solution indépendente si $\alpha_1 - \alpha_2 = m \in \mathbb{Z}$ et $m \geq 0$. Montrer l'existence de constantes C et d_j tels que (6.13) est une solution de l'équation différentielle.