VARIÉTES HAMILTONIENNES

Jean-Claude HAUSMANN

Ce texte est une introduction élémentaire aux actions hamiltonienne pouvant peut-être aider, par un point de vue parfois complémentaire, l'approche des ouvrages classiques. Le cadre choisi des *variétés hamiltoniennes* est plus général que celui des variétés symplectiques ou de Poisson. Il privilégie le rôle des champs hamiltoniens, dont nous apprécions l'aspect géométrique, et allège quelques arguments. Nous espérons qu'il puisse être aussi utile dans d'autres cadres, par exemple celui de la géométrie de contact ou de la géométrie sous-riemannienne.

Je remercie chaleureusement Henri-Michel Maire pour de nombreuses conversations utiles.

1 Définitions

(1.1) Une *structure hamiltonienne* sur une variété différentiable M est une application $\mathbf{R}$-linéaire

$$\mathcal{C}^\infty(M) \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathrm{Vec}\,(M) \quad , \quad f \mapsto X_f$$

des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur M dans les champs de vecteurs sur M telle que $df(X_f) = 0$. Le champ X_f s'appelle le champ hamiltonien de f. On dira que $(M, \mathcal{H})$ (ou, simplement M) est une *variété hamiltonienne.*

(1.2) Une variété hamiltonienne M, est munie d'un *crochet* :

$$\mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \quad , \quad (f,g) \mapsto \{f,g\}$$

défini par

$$\{f,g\}(u) := d_u f(X_g) = X_g\, f\,(u)$$

Ce crochet est $\mathbf{R}$-bilinéaire et alterné ($\{h,h,\} = 0$); il satisfait $\{f,gh\} = \{f,g\}h + \{f,h\}g$.

On dit que la structure hamiltonienne est une structure de Poisson (ou que M est une variété de Poisson) si le crochet satisfait l'identité de Jacobi

$$\{\{f,g\},h\}+\{\{g,h\},f\}+\{\{h,f\},g\}=0$$

que l'on peut, bien entendu, écrire sans le crochet

$$X_h X_g\, f + X_f X_h\, g + X_g X_f\, h = 0$$

ou, le plus utile, de manière mixte

$$X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]. \tag{1}$$

(1.3) Soit M une variété hamiltonienne. Pour tout point $u \in M$, un sous-espace vectoriel Δ_u de l'espace tangent $T_u M$ est défini par

$$\Delta_u := \{X_h(u) \mid h \in \mathcal{C}^\infty(M)\}.$$

La correspondance $u \mapsto \Delta_u$ constitue une distribution sur M de rang non-constant en général. Le sous-espace Δ_u est équipé d'une forme bilinéaire ω_u définie de la manière suivante: si $v, w \in \Delta_u$, on choisit $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telles que $X_f(u) = v$ et $X_g(u) = w$ et on pose

$$\omega_u(v,w) := \{f,g\}(u) = d_u f(w) = -d_u g(v).$$

Les égalités de droite montrent que $\{f,g\}(u)$ ne dépend que de v et w et donc ω_u est bien définie. Elle est évidemment $\mathbf{R}$-bilinéaire et alternée. En plus, ω_u est non-dégénérée. En effet, si $w \neq 0$, on trouvera une fonction f telle que $d_u f(w) \neq 0$ et donc $\omega_u(X_f, w) \neq 0$. La forme ω_u est donc une forme symplectique sur l'espace vectoriel Δ_u qui, par conséquent, est de dimension paire. On dira que Δ est la *distribution symplectique* de la structure hamiltonienne. Les trajectoires des champs hamiltoniens sont tangentes à la distribution Δ (comme les courbes étudiées, par exemple, en géométrie sous-riemanienne).

L'identité de Jacobi, sous la forme $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$ implique que le crochet de deux champs hamiltoniens est encore un champ hamiltonien. La distribution Δ est donc involutive et, par le théorème de Frobenius, elle est intégrable, du moins lorsque la dimension de Δ_u est localement constante (ce qui est le cas sur un ouvert dense de M). Si ce n'est pas le cas, on utilise que l'identité de Jacobi implique que la distribution Δ est invariante par les flots des champs hamiltoniens ce qui entraîne l'intégrabilité par le théorème de Sussmann (voir [Va, Ch. 2]). Donc, une variété de Poisson est feuilletée par des *feuilles symplectiques*, de dimension non-constante (comme les orbites d'une action d'un groupe de Lie).

Comme ω_u est non-dégénérée, la donnée de $\{\Delta_u, \omega_u\}_{u \in M}$ détermine les champs hamiltoniens par la formule

$$\omega_u(X_f(u), v) = d_u f(v) \quad \forall\ v \in \Delta_u$$

et donc $X_f(u)$ ne dépend que de $d_u f_{|\Delta_u}$. En d'autre termes, $X_f(u) = \pi(d_u f)$ où $\pi : T^*M \to TM$ est donné par $\pi_u = \omega_u^{-1} \circ i_u^*$, l'application $i_u^* : T_u^*M \to \Delta_u^*$ désignant le dual de l'inclusion. Lorsque le crochet est donné via le tenseur $\pi \in Hom(T^*M, TM) \simeq TM \otimes TM$, l'identité de Jacobi peut se formuler en terme de crochet de Schouten-Nijenhuis (voir [Va,Chapter 1]).

(1.4) Soient $x_1 \ldots, x_n$ des coordonnées locales sur un ouvert U de M et soit $u \in U$. On a $\{f, g\}(u) = d_u f(X_g(u)) = -d_u g(X_f(u)$ et donc $\{f, g\}(u)$ ne dépend que de $d_u f$ et $d_u g$. Les fonctions sur U

$$\tilde{f}(-) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(u) x_i(-) \quad , \quad \tilde{g}(-) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(u) x_i(-)$$

ont même différentielle en u que f et g d'où

$$\{f, g\}(u) = \{\tilde{f}, \tilde{g}\}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(u) \frac{\partial g}{\partial x_j}(u) \omega_{ij}(u)$$

où $\omega_{ij} := \{x_i, x_j\} : U \to \mathbf{R}$. On aura donc la formule en coordonnées locales

$$X_f(-) = \sum_{i,j=1}^{n} \omega_{ij}(u) \frac{\partial f}{\partial x_i}(u) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

qui montre que la correspondance $f \mapsto X_f$ est continue pour les topologies $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ et Vec (M).

(1.5) Une application différentiable $\varphi : M \to N$ entre variétés hamiltonienne est un *morphisme hamiltonien* si, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$, les champs hamiltoniens de f et de $f \circ \varphi$ sont φ reliés :

$$T_u\varphi(X_{f \circ \varphi}(u)) = X_f(\varphi(u)).$$

En terme de crochet cela revient à

$$\{f \circ \varphi, g \circ \varphi\} = \{f, g\} \circ \varphi \quad , \quad \forall\ f, g \in \mathcal{C}^\infty(N)$$

Par exemple, lorsque M est une variété de Poisson, le flot φ_t d'un champ hamiltonien est un morphisme hamiltonien [MR, § 10.5].

2 Exemples

(2.1) Toute variété M admet la structure hamiltonienne triviale $X_f = 0$ pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

D'autre part, si $f \mapsto X_f$ donne une structure hamiltonienne sur M et si $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$, alors $f \mapsto \phi \cdot X_f$ est encore une structure hamiltonienne. Les distributions symplectiques seront les mêmes, sauf en les zéros de ϕ ou la seconde sera nulle.

(2.2) Soit M une variété différentiable de dimension $2n$. Soit $\omega \in \Omega^2(M)$ une forme différentielle telle que ω^n soit une forme volume. Alors, pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on définit X_f par l'équation

$$\omega(X_f(u), -) = d_u f(-).$$

Cette structure hamiltonienne satisfait $\Delta = TM$ et M est une variété de Poisson si et seulement si $d\omega = 0$ ([Au], preuve de (2.2.3)). Dans ce cas, on dit que (M, ω) est une *variété symplectique*.

(2.3) L'exemple le plus standard de (2.2) est $M = \mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ avec la forme symplectique

$$\omega = dx \wedge dy = \frac{i}{2}(dz \wedge d\overline{z})$$

où, en coordonnées complexes, on utilise les différentielles
$dz = dx + idy$, $d\overline{z} = dx - idy$ ainsi que opérateurs classiques

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}).$$

On a alors, pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{C})$

$$X_f \;=\; \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \;=\; -2i\Big(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Big).$$

Les trajectoires $z(t) = x(t) + iy(t)$ de ce champ satisfont aux équations de Hamilton classiques qui s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial f}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial f}{\partial x} \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \dot{z} = -2i\,\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$$

(2.4) *Structures produits :* Soient $M_1, \ldots, M_r$ des variétés hamiltoniennes. Alors $M := M_1 \times \cdots \times M_r$ est munie d'une unique structure hamiltonienne telle que les projections $M \to M_j$ soient des morphismes hamiltoniens. Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $u = (u_1, \ldots, u_r)$ on définit $X_f(u) \in T_u M =$

$\prod_{j=1}^r T_{u_j} M_j$ par la condition que sa composante dans $T_{u_j} M_j$ soit $X_{f \circ \alpha_j^u}(u_j)$, où $\alpha_j^u : M_j \to M$ est l'application

$$\alpha_j^u(s) := (u_1, \ldots, u_{j-1}, s, u_{j+1}, \ldots u_r).$$

Dans le cas $M_j = \mathbf{C}$ avec la structure hamiltonienne de (2.3) on obtient la structure hamiltonienne standard sur $\mathbf{C}^r = \mathbf{R}^{2r}$:

$$X_f = \sum_{j=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -2i \sum_{j=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial f}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\right).$$

Par le théorème de Darboux, toute variété symplectique de dimension $2r$ admet un atlas de cartes dans lequel le champ hamiltonien d'une fonction sera donné par les formules ci-dessus.

(2.5) Soit M une surface riemannienne orientée. Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on définit $X_f(u) = \phi(u) \cdot \rho_u(\mathrm{grad}_u f)$ où ρ_u est la rotation de $T_u M$ d'angle $-\pi/2$ et $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Pour cette structure hamiltonienne, on a $\Delta_u = T_u M$ si $\phi(u) \neq 0$ et 0 autrement. On peut démontrer qu'une telle structure hamiltonienne est de Poisson.

(2.6) Soit M une variété riemannienne orientée de dimension 3 et soit A un champ de vecteurs sur M. Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on définit $X_f(u) = A(u) \times \mathrm{grad}_u f$, où $\times$ désigne le produit vectoriel. Si $A(u) \neq 0$, on a Δ_u est le complément orthogonal à $A(u)$ ($\Delta_u = 0$ si $A(u) = 0$). On peut démontrer que

a) toute structure hamiltonienne sur une variété riemannienne orientée de dimenison 3 est de la forme ci-dessus pour $A \in \mathrm{Vec}\, M$.

b) une telle structure hamiltonienne est de Poisson si et seulement si sa distribution est intégrable (c'est, en fait le cas pour les structures hamiltonienne telles que la distribution symplectique est de rang ≤ 2). Dans notre cas, la condition est $\langle A, \mathrm{rot}\, A\rangle = 0$.

(2.7) Soit $\alpha \in \Omega^1(M)$ une forme de contact. Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on définit $X_f \in \mathrm{Vec}\,(M)$ par les conditions

$$\alpha(X_f) = 0 \quad \text{et} \quad d_u f(v) = d\alpha(X_f(u), v) \quad \forall\ v \in \ker \alpha_u$$

(le fait que α soit une forme de contact est équivalent à $d\alpha$ non-dégénérée sur $\ker \alpha$). Ceci définit sur M une structure hamiltonienne avec $\Delta = \ker \alpha$. La distribution Δ n'est alors jamais intégrable et, donc, M n'est pas une variété de Poisson. Les trajectoires des champs hamiltoniens sont des courbes Legendriennes.

(2.8) Soit $\mathcal{G}^*$ le dual d'une une algèbre de Lie $\mathcal{G}$. On dénote par $\langle\, ,\, \rangle$ le pairing d'évaluation $\mathcal{G} \times \mathcal{G}^* \to \mathbf{R}$. On a une application

$$\mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{Vec}\,(\mathcal{G}^*) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{G}^*, \mathcal{G}^*) \qquad P \mapsto \mathrm{ad}_P^*$$

où ad_P^* est défini par

$$\langle Q, \mathrm{ad}_P^*(\eta)\rangle = \langle [Q, P], \eta\rangle$$

qui est l'action infinitésimale associée à l'action co-adjointe de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}^*$. D'autre part, à la différentielle $d_\eta f \in \mathcal{G}^*$ de $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{G}^*)$ en $\eta \in \mathcal{G}^*$ correspond un élément $\delta_\eta f \in \mathcal{G}$ par bidualité. Cela permet de définir X_f par

$$X_f(\eta) := \mathrm{ad}^*{}_{\delta_\eta f}(\eta)$$

ce qui donne une structure hamiltonienne sur $\mathcal{G}^*$. Le crochet est donné par

$$\{f, g\}(\eta) = d_\eta f(X_g(\eta)) = \langle \delta_\eta f, \mathrm{ad}^*{}_{\delta_\eta g}(\eta)\rangle = \langle [\delta_\eta f, \delta_\eta g], \eta\rangle$$

et on peut vérifier que c'est un crochet de Poisson. Les feuilles symplectiques sont les orbites co-adjointes.

(2.9) Soit $\mathcal{H}_m$ l'espace vectoriel réel des $(m \times m)$-matrices hermitiennes. Cet espace s'identifie au dual de l'algèbre de Lie u_m du groupe unitaire U_m par le pairing

$$u_m \times \mathcal{H}_m \longrightarrow \mathbf{R} \quad \langle P, A\rangle := i\mathrm{tr}(PA).$$

On peut donc équiper $\mathcal{H}_m$ de la structure de Poisson de (2.8) et le champ hamiltonien de $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{H}_m)$ est donné par $X_f(A) = [\delta_A f, A] \in \mathcal{H}_m$ où $\delta_A f \in u_m$ est défini par $d_B f(-) = \langle \delta_A f, -\rangle$. Le crochet prend la forme

$$\{f, g\}(A) = i\,\mathrm{tr}([\delta_A f, \delta_A g]A).$$

L'action co-adjointe de U_m sur u_m se transforme en la conjugaison et l'action infinitésimale associée devient

$$u_m \longrightarrow \mathrm{Vec}\,(\mathcal{H}_m) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_m) \qquad P \mapsto [P, A].$$

Le sous-espace Δ_A de $T_A\mathcal{H}_m$ de la distribution symplectique est $\Delta_A = \{[P, A] \mid P \in u_m\}$. Les feuilles symplectiques sont les orbites de $\mathcal{H}_m$ sous l'action de U_m par conjugaison c'est-à-dire les matrices hermitiennes isospectrales (voir [Au, § 1.4]).

(2.10) La structure de Poisson de (2.8) pour $g = so_3$ peut être transportée sur $\mathbf{R}^3$. L' identification de $\mathbf{R}^3$ avec so_3^* est obtenue en utilisant l'isomorphisme $\psi : \mathbf{R}^3 \xrightarrow{\approx} so_3$

$$\psi(x, y, z) \ := \ \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix},$$

ainsi que l'isomorphisme $\mathbf{R} \approx (\mathbf{R}^3)^*$ donné par le produit scalaire standard. On a $\psi(a \times b) = [\psi(a), \psi(b)]$, où $\times$ est le produit vectoriel. L'action co-adjointe de SO_3 sur so_3^* devient l'action naturelle de SO_3 sur $\mathbf{R}^3$ et les orbites co-adjointes sont les 2-sphères centrées en 0. Le champ hamiltonien X_f de $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^3)$ sera $X_f(p) = \mathrm{grad}_p f \times p$ et le crochet de Poisson s'écrira $\{f, g\}(p) = \langle \mathrm{grad}_p f \times \mathrm{grad}_p g, p\rangle$. On constate qu'il s'agit de la structure hamiltonienne associée au champ de vecteur $A(p) = p$ sur $\mathbf{R}^3$ par la correspondance de (2.6). Elle est utilisée en mécanique (voir [MR; rigid body bracket]).

3 Actions hamiltoniennes–Applications moment

Soit G un groupe de Lie connexe. A une action $G \times M \xrightarrow{\alpha} M$ de G sur une variété différentiable M correspond une "action infinitésimale"

$$\mathcal{L}(\alpha) : \mathcal{G} \to \mathrm{Vec}\,(M) \qquad P \mapsto \underline{P}.$$

qui détermine α et satisfait $\underline{[P, Q]} = -[\underline{P}, \underline{Q}]$. Si M est une variété hamiltonienne, on dit que l'action α (ou, plus généralement, l'action infinitésimale $\mathcal{L}(\alpha)$) est *hamiltonienne* s'il existe une application $\mathbf{R}$-linéaire $\nu : \mathcal{G} \to \mathcal{C}^\infty(M)$ $(P \mapsto \nu_P)$ telle que

1) $X_{\nu_P} = \underline{P}$

2) $\nu_{[P,Q]} = \{\nu_P, \nu_Q\}$

L'existence de ν et la condition 1) sont équivalentes à

1') il existe une application $\mu : M \to \mathcal{G}^*$ telle que pour tout $P \in \mathcal{G}$ l'application $u \mapsto \langle P, \mu(u)\rangle$ a pour champ hamiltonien $\underline{P}$.

La relation entre μ et ν est $\nu_P(u) = \langle P, \mu(u)\rangle$. La condition 2) est équivalente à

2') μ est G-équivariante, c'est-à-dire $\mu(gu) = \mathrm{Ad}^* g\, \mu(u)$. Comme G est supposé connexe, cela est équivalent à ce que les champs $\underline{P}$ et ad^*_P soient μ-reliés,

ou à

2") μ est un morphisme hamiltonien.

Une telle application μ (qui détermine l'action α) s'appelle une "application moment" pour α.

Observons que $d\nu_P(-) = \langle P, d\mu(-)\rangle$ et donc la condition 1') est équivalente à la condition

1") $\langle P, d\mu(-)\rangle = \omega(\underline{P}, -)$ pour $- \in \Delta_u$
ce qui est une formulation fréquement utilisée lorsque M est une variété symplectique.

(3.1) La condition 1") détermine $d\mu|\Delta$. Les orbites de G étant tangentes à Δ, ceci montre que, sur chaque orbite $\mathcal{O}$, μ est déterminée à une constante additive $\eta_{\mathcal{O}} \in \mathcal{G}^*$ près (dans le cas d'une variété de Poisson, $\eta_{\mathcal{O}}$ sera constante sur chaque feuille symplectique). La condition 2') restreint le choix de $\eta_{\mathcal{O}}$ par la condition $\eta_{\mathcal{O}}([\mathcal{G}, \mathcal{G}]) = 0$. En conséquence, si $\mathcal{G} = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$, l'application moment d'une action hamiltonienne est unique.

(3.2) Soit $\tau : \overline{G} \to G$ un morphisme de groupes de Lie et soit $\mathcal{L}(\tau)$: $\overline{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ le morphisme induit sur les algèbres de Lie. Soit $\nu : \mathcal{G} \to \mathcal{C}^\infty(M)$ définissant une action hamiltonienne de G sur M (on suppose G connexe). L'application $\overline{\nu} = \nu \circ \mathcal{L}(\tau)$ détermine une action hamiltonienne de $\overline{G}$ sur M. Pour les applications moment, on aura $\overline{\mu} = \mathcal{L}(\tau)^* \circ \mu$, où $\mathcal{L}(\tau)^*$ désigne le dual de $\mathcal{L}(\tau)$.

(3.3) Pour une action hamiltonienne de G sur M, les sous-groupes à un paramètre sont des flots hamiltoniens. Ce sont donc des morphismes hamiltoniens lorsque M est une variété de Poisson (voir (1.5)). Comme G est supposé connexe, l'application $u \mapsto gu$ est alors un morphisme hamiltonien pour tout $g \in G$.

4 Exemples d'applications moment

(4.1) L'action co-adjointe de G sur $\mathcal{G}^*$ est hamiltonienne. L'application ν est donnée par $\nu_P(-) = \langle P, -\rangle$. En effet, on aura $d\nu_P = \nu_P$, d'où $\delta\nu_p = P$. Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{G}^*)$, on aura

$$\langle \delta_\eta f, X_{\nu_P}(\eta)\rangle = \{f, \nu_P\}(\eta) = \langle [\delta_\eta f, P], \eta\rangle = \langle \delta_\eta f, \mathrm{ad}^*_P(\eta)\rangle$$

d'où $\langle \delta_\eta f, X_{\nu_P}(\eta)\rangle = \langle \delta_\eta f, \underline{P}(\eta)\rangle$. On a donc bien la condition 1) : $X_{\nu_P} = \underline{P}$. L'égalité

$$\langle P, -\rangle = \nu_P(-) = \langle P, \mu(-)\rangle$$

prouve que μ est l'identité de $\mathcal{G}^*$ qui satisfait évidemment aux conditions 2') ou 2").

(4.2) L'action de U_m sur $\mathcal{H}_m$ par conjugaison est hamiltonienne par (2.9) et (4.1). On aura $\nu_P(A) = i\,\mathrm{tr}PA)$ et $\mu(A) = A$.

Si l'on restreint cette action au tore maximal de U_m formé des matrices diagonales, l'application moment $\mu : \mathcal{H}_m \to \mathbf{R}^m$ associe à une matrice $A \in \mathcal{H}_m$ les coefficients de sa diagonale (on utilise (3.2)). Soit $\mathcal{O}_A$ l'orbite de A, qui est une variété symplectique (feuille symplectique de la variété de Poisson $\mathcal{H}_m$). L'ensemble $\mu(\mathcal{O})$ est l'enveloppe convexe des points $\{(\lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(m)})\}$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de A et σ parcourt toutes les permutations de $\{1, \ldots, m\}$. Ceci est le théorème de Schur sur les matrices hermitiennes isospectrales (voir [Au, § 4.3]) et illustre le théorème de convexité d'Atiyah et Guillemin-Sternberg [Au, § 4.2].

(4.3) L'action naturelle de U_m sur $\mathbf{C}^m$ (on voit les éléments de $\mathbf{C}^m$ comme des vecteurs colonnes et la forme symplectique est $\frac{i}{2}\sum_{k=1}^m dz_k \wedge d\overline{z}_k$) est hamiltonienne. L' application ν est donnée par

$$\nu_P(z) = i\,\mathrm{tr}({}^t\overline{z}Pz),$$

c'est-à-dire que $\nu_P(z) = i\,B_P(\overline{z}, z)$ où B_p est la forme anti-hermitienne sur $\mathbf{C}^m$ de matrice P. Quant à μ, on aura simplement

$$\mu(A) = -\frac{1}{2}AA^*$$

En effet, la condition 2') est évidente. La condition 1) se vérifie par calcul direct, en utilisant par exemples les formules en coordonnées complexes de (2.3) (voir aussi [Ki, pp24–26]).

Plus généralement, l'action naturelle de U_m sur les matrices $\mathcal{M}_{m\times q}(\mathbf{C})$ sera hamiltonienne avec pour application moment $\mu(A) = -\frac{1}{2}AA^*$.

(4.4) Soit $\mathbf{H} = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}j \approx \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i \oplus \mathbf{R}j \oplus \mathbf{R}k$ l'espace des quaternions. L'action du groupe $S^3 \approx SU_2$ des quaternions unitaires sur $\mathbf{H}$ par multiplication est hamiltonienne. Identifions su_2^* à $\mathbf{R}^3$ comme en (2.10) et $\mathbf{R}^3$ aux quaternions purs $\mathbf{R}i \oplus \mathbf{R}j \oplus \mathbf{R}k$. L'application moment est

$$\mu(q) = \frac{1}{2}\,\overline{q}iq.$$

L'application $q \mapsto \overline{q}iq$ est l'application de Hopf qui envoie la 3-sphère dans $\mathbf{H}$ de rayon r sur la 2-sphere de $\mathbf{R}^3$ de rayon r^2. La structure de Poisson sur $\mathbf{R}^3$ est ainsi induite par passage au quotient de la structure symplectique standard sur $\mathbf{H} = \mathbf{C}^2$. Pour des application de ce fait, voir [HK].

5 Théorème de Noether et réduction symplectique

Dans tout ce paragraphe, $\mu : M \to \mathcal{G}^*$ dénote une application moment pour une action hamiltonienne effective d'un groupe de Lie connexe G sur une variété hamiltonienne M.

(5.1) Soit $v \in \Delta_u$. On a $d\mu(v) = 0$ si et seulement si

$$0 = \langle P, d\mu(v) \rangle = \omega(\underline{P}, v)$$

pour tout $P \in \mathcal{G}$. En d'autres termes, $\ker d_u\mu \cap \Delta_u$ est le complément ω_u-orthogonal à $T_u\mathcal{O}_u$, l'espace tangent à l'orbite $\mathcal{O}_u$ de u. On en déduit que $\dim(\ker d_u\mu \cap \Delta_u) = \dim(d_u\mu(\Delta_u))$. Dans le cas où M est une variété symplectique, cela implique

$$\operatorname{rang} d_u\mu = \dim \mathcal{O}_u$$

ce qui a les conséquences classiques suivantes :

a) u est un point régulier de μ si et seulement si le stabilisateur de u est un sous-groupe discret de G.

b) si G est abélien, l'action co-adjointe est triviale et, par la condition 2'), μ est constante sur les orbites de G. On en déduit que $2\dim G \leq \dim M$. Le cas maximal $2\dim G = \dim M$ avec action efficiente joue un rôle considérable. On dit qu'on a affaire à un *système complètement intégrable* (existence d'une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{C}^\infty(M)$ abélienne de dimension $\frac{1}{2}\dim M$; voir [Ar, ch. 10], [Au2, ch. 1]). Si $G = T^n$ est un tore et M est compacte de dimension $2n$, on dit que M est *variété torique*. La théorie de Delzant permet de reconstruire M à partir du "polytope moment" $\mu(M)$ ([De], [Au, ch. VI], [Gu, ch. 1]).

(5.2) Les égalités

$$df(\underline{P}) = df(X_{\nu_P}) = -d\nu_P(X_f) = -\langle P, d\mu(X_f) \rangle$$

impliquent que f est constante sur chaque orbite de G si et seulement si $d\mu(X_f) = 0$. Ceci est une version du théorème de Noether [MR, 11.4.1].

(5.3) Supposons que l'action de G sur M soit libre et propre. Le quotient $\overline{M} := G\backslash M$ est alors variété différentiable et la projection $\pi : M \to \overline{M}$ est une submersion (en fait, un fibré G-principal); de même, μ sera une submersion par (5.1).

Si M est une variété de Poisson, l'action de G est par morphisme hamiltoniens (voir (3.3)). La variété $\overline{M}$ est alors munie d'une unique structure hamiltonienne $f \to \overline{X}_f$ telle que π soit un morphisme hamiltonien et cette structure hamiltonienne est de Poisson. La distribution symplectique $\overline{\Delta}$ de $\overline{M}$ satisfait

$$\overline{\Delta}_{\pi(u)} = (\ker d_u\mu \cap \Delta_u)\Big/(T_u\mathcal{O}_u \cap \ker d_u\mu \cap \Delta_u).$$

En effet, par (5.2), $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ satisfait $X_f \in \ker d\mu$ si et seulement si $f = \overline{f}\circ\pi$ pour $\overline{f} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$.

Si maintenant M est symplectique, on aura

$$\overline{\Delta}_{\pi(u)} = \ker d_u\mu/T_u\mathcal{O}_u \cap \ker d_u\mu = (d_u\mu)^{-1}(T_{\mu(u)}\mathcal{O}^*_{\mu(u)})/T_u\mathcal{O}_u$$

où $\mathcal{O}^*_{\mu(u)}$ est l'orbite co-adjointe en $\mu(u)$. Les feuilles symplectiques de $\overline{M}$ seront donc les images réciproques des points par l'application $\overline{\mu} : \overline{M} \to G\backslash\mathcal{G}^*$. En d'autres termes, la feuille symplectique $F_{\pi(u)}$ en $\pi(u)$ est le quotient par l'action de G de $\mu^{-1}(\mathcal{O}^*_{\mu(u)})$. On obtient ainsi une famille de variétés symplectiques parpmétrisée par les orbites co-adjointes de G, immergées dans (et feuilletant) M; ces variétés sont dites obtenues de M par *réduction symplectique* pour l'action de G.

(5.4) Voici deux exemples de réductions symplectiques. Considérons l'action diagonale de S^1 sur $\mathbf{C}^m$. Son application moment $\tilde{\mu}$ est

$$\tilde{\mu}(z_1, \ldots, z_m) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \|z_i\|^2$$

dont l'image est $\mathbf{R}_{\leq 0}$ et l'ensemble des valeurs régulières $\mathbf{R}_{<0}$. Pour $r > 0$, la variété réduite $P_r := S^1\backslash\tilde{\mu}^{-1}(-r)$ est difféomorphe à l'espace projectif $\mathbf{C}P^{m-1}$. L'action naturelle de U_m sur $\mathbf{C}^m$ commute avec celle de S^1 et préserve $\tilde{\mu}(-r)$. Elle induit donc une action sur P_r; cette action est hamiltonienne avec application moment μ induite de l'application μ de (4.3). Comme l'action de U_m sur P_r est transitive, l'application μ est un plongement U_m-équivariant de P_r sur une orbite co-adjointe [Gu, Theorem 1.2]; il s'agit de l'orbite co-adjointe formée des matrices de $\mathcal{H}_m$ dont une valeur propre est $-r$ et toutes les autres zero. Si l'on restreint l'action de U_m sur P_r au tore maximal des matrices diagonales, l'application moment est

$$\mu([z_1, \ldots, z_m]) = -\frac{1}{2}(\|z_1\|^2, \ldots, \|z_m\|^2)$$

dont l'image, le polytope moment, est le simplexe $\{(t_1, \ldots, t_m) \in \mathbf{R}^m \mid \sum_{i=1}^m t_i = -r \text{ et } t_i \leq 0\}$. On a affaire a une action efficiente d'un tore de dimension $m-1$ sur une variété de dimension $2(m-1)$. C'est donc un cas de variété torique et les variétés symplectiques réduites sont des points.

Pour le second exemple, on prend l'action de U_q sur les matrices $\mathcal{M}_{m\times q}(\mathbf{C})$ donnée par $AQ := QA^*$. Elle est hamiltonienne avec application moment $\tilde{\mu}(Q) = -\frac{1}{2}Q^*Q$. Pour $r \geq 0$, on regarde la variété symplectique Γ_r réduite en l'orbite co-adjointe formée de la matrice diagonale $-r \cdot I$. La variété $\tilde{\Gamma}_r := \tilde{\mu}^{-1}(-r \cdot I)$ estl'ensemble des matrices dont les vecteurs colonnes sont mutuellement orthogonaux et de norme $\sqrt{r}$. La variété $\tilde{\Gamma}_r$ est donc difféomorphe à la variété de Stiefel des q-repères dans $\mathbf{C}^m$ et son quotient Γ_r est difféomorphe à la grassmannienne complexe des $q - plans$ dans $\mathbf{C}^m$.

Comme précédemment, l'action naturelle de U_m sur $\mathbf{C}^m$ induit une action sur Γ_r qui est hamiltonienne avec application moment μ induite de l'application μ de (4.3). Cette action induite est transitive et μ est un plongement U_m-équivariant de P_r sur l'orbite co-adjointe formée des matrices de $\mathcal{H}_m$ de rang q dont les valeurs propres sont égales à $-r$ ou zero.

Pour l'action restreinte au tore maximal des matrices diagonales, l'application moment est

$$\mu(Q) = -\frac{1}{2}(\|\ell_1(Q)\|^2, \ldots, \|\ell_m(Q)\|^2)$$

où $\ell_i(Q)$ est le i-ème vecteur ligne de Q. Le polytope moment est l'hypersimplexe $\{(t_1, \ldots, t_m) \in \mathbf{R}^m \mid \sum_{i=1}^m t_i = -qr \text{ et } -r \leq t_i \leq 0\}$. Dans le cas $q = 2$, les variétés symplectiques réduites de cette action sont des espace de configurations de polygones [HK].

Ces deux exemples illustrent encore une fois le théorème de convexité d'Atiyah et Guillemin-Sternberg.

References

[Ar] Arnold V.I. Mathematical methods in classical mechanics. *Springer-Verlag* (2nd ed. 1989).

[Au] Audin M. The topology of torus actions on symplectic manifolds. *Birkhäuser* (1991).

[Au2] Audin M. Spining Tops. *Cambridge Univ. Press* (1996).

[De] Delzant T. Hamiltoniens périodiques et image convexe de l'application moment. *Bull. Soc. Math. France* **116** (1988), 315–339

[Gu] Guillemin, V. Moment maps and combinatorial invariants of Hamiltonian T^n-spaces. *Birkhäuser* (1994).

[HK] Hausmann, J-C. & Knutson A. Polygon spaces and Grasmannians. *to appear in L'Enseignement Mathématique. Fichier PS obtenable sur internet : http://www.unige.ch/math/biblio/preprint/*

[Ki] Kirwan, F. Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry. *Princeton University Press* (1984).

[MR] Marsden J. & Ratiu T. Introduction to mechanics and symetry. *Springer-Verlag* (1994).

[Va] Vaisman I. Lectures on the geometry of Poisson manifolds. *Birkhäuser Verlag* (1994).