Panoramas & Synthèses
? ?, 2004, p. 33–54

MESURES FINIMENT ADDITIVES ET PARADOXES

par

Pierre de la Harpe

Résumé. — Ce texte expose des résultats classiques sur les décompositions paradoxales (Hausdorff, Banach, Tarski) et les mesures finiment additives invariantes (Banach, von Neumann), en insistant sur l'importance de ces notions en théorie des groupes. La dernière partie énumère quinze problèmes ouverts concernant la moyennabilité des groupes.

Abstract. — RESUME ANGLAIS A COMPLETER

Je dois aussi un grand merci à la jeune école mathématique polonaise surgie après la guerre, et qui s'est élancée si impétueusement à la conquête des vérités mathématiques. La plus heureuse de toutes mes chances a sans doute été de lui avoir fourni quelques-uns des outils dont elle s'est servie si ingénieusement et avec tant de succès (...). [**54**].

1. Introduction

Est *paradoxal* ce qui est contraire à l'opinion commune : la définition s'accorde à l'étymologie ($\pi\alpha\rho\alpha$ = *para* = à côté, $\delta o\xi\alpha$ = *doxa* = opinion). Il en résulte que la reconnaissance d'un paradoxe est un acte *subjectif* qu'il faut *dater*. « Les paradoxes d'aujourd'hui sont les préjugés de demain », écrivait Marcel Proust(1) [**62**]. Certains lecteurs de ce texte pourront donc à bon droit en contester le titre. Les paradoxes mathématiques dont il est question ici relèvent de nos difficultés à raisonner avec l'infini, et ont la vie dure. Ainsi les paradoxes de la flèche qui n'atteint jamais sont but ou

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — A COMPLETER ? ? ?
Mots clefs. — A COMPLETER ? ? ?

Ce travail a bénéficié d'un soutien du « Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique » .

(1) Voici en écho un passage de l'*Émile* [**67**] : « Lecteurs vulgaires, pardonnez-moi mes paradoxes : il en faut faire quand on réfléchit ; et, quoi que vous puissiez dire, j'aime mieux être homme à paradoxes qu'homme à préjugés. »

d'Achille qui ne rattrape jamais la tortue : leur demi-vie s'étend sans doute de Zénon d'Élée, vers 490 avant J.-C., aux débuts du calcul différentiel et intégral, couronnés vers 1670 par les travaux de Newton et Leibniz. (Il y a bien d'autres paradoxes : les paradoxes logiques dont les plus célèbres sont dus à Russell, ceux de dessins aux perspectives troublantes, d'autres en théorie élémentaire des probabilités,... Il serait intéressant d'analyser le rôle de l'infini dans chacun d'entre eux, et de lire ou relire des ouvrages classiques tels que [**14**] ou l'exposé de vulgarisation d'E. Borel [**15**].)

Les paradoxes de Hausdorff, Banach et Tarski sont nés des efforts d'assimilation des notions de mesure et intégrale, et s'enracinent dans les premiers travaux de Lebesgue (sa note de 1901 [**52**], et son livre de 1904 [**53**]). Pour $n \geqslant 1$, il existe un ensemble remarquable $\mathcal{L}eb(\mathbb{R}^n)$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ dits *mesurables au sens de Lebesgue*, contenant les produits d'intervalles, et une application

$$\lambda_n : \mathcal{L}eb(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty]$$

dite *mesure de Lebesgue*[2], telle que (entre autres propriétés)

(M1) $\lambda_n\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(X_i)$, *pour des* $X_i \in \mathcal{L}eb(\mathbb{R}^n)$ *disjoints deux à deux,*
(M2) $\lambda_n(g(X)) = \lambda_n(X)$, *pour tout* $X \in \mathcal{L}eb(\mathbb{R}^n)$ *et toute isométrie* g *de* $\mathbb{R}^n$,
(M3) $\lambda_n([0,1]^n) = 1$.

Le signe $\sqcup$ désigne une réunion de parties *disjointes*, et ne doit pas être confondu avec le signe usuel de réunion $\cup$. [Il serait historiquement plus correct de définir λ_n comme une application à valeurs *finies* sur les parties *bornées* de $\mathcal{L}eb(\mathbb{R}^n)$; mais nous ignorons l'histoire à plusieurs titres, notamment en traitant simultanément toutes les dimensions.]

Il est bien difficile d'exhiber un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ qui ne soit *pas* mesurable au sens de Lebesgue. Une première question naturelle consiste donc à demander s'il existe un prolongement de λ_n à l'ensemble de *toutes* les parties de $\mathbb{R}^n$ qui possède encore les propriétés (M1), (M2) et (M3) ; or un argument simple dû à Vitali (voir plus bas) montre que c'est impossible pour tout $n \geqslant 1$.

La propriété (M1) est un ingrédient essentiel de la notion de *mesure*. Il en existe une variante faible

(M1-f) $\lambda_n\left(\bigsqcup_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_n(X_i)$, *pour des ensembles* $X_1, \dots, X_k$ *disjoints deux à deux*

qui caractérise les *mesures finiment additives*. Une seconde question naturelle consiste à demander s'il existe un prolongement de λ_n à l'ensemble de *toutes* les parties de $\mathbb{R}^n$ qui possède les propriétés (M1-f), (M2) et (M3) ; les résultats discutés ci-dessous fournissent une réponse positive si $n \leqslant 2$ (Banach) et une réponse négative si $n \geqslant 3$ (Hausdorff, Banach, Tarski).

[2] La terminologie « mesure de Lebesgue » est bien sûr standard, même si « l'équité commande d'attribuer la mesure à Borel et l'intégrale à Lebesgue ». (Cité de [**22**], page 72 ; voir la discussion qui précède.)

Les nombreux travaux consacrés à ces questions depuis une centaine d'années ont montré l'importance de la notion de « décomposition paradoxale », définie plus bas. Voir le livre obligé de S. Wagon [**77**] ; voir aussi, par exemple, [**71**], le chapitre 2 de [**55**], ainsi que l'excellent panorama de [**51**]). Nous avons ignoré tout souci de fidélité historique ; en particulier, nous privilégions des notions de combinatoire des groupes qui ne sont devenues usuelles que plus tard.

2. Décompositions paradoxales comme obstructions à l'existence de mesures

Considérons un ensemble E donné avec l'action d'un groupe G.

Définition. — Deux parties A, B de E sont dites *finiment G-équidécomposables* s'il existe un entier $k \geqslant 1$, des partitions $A = \sqcup_{i=1}^{k} A_i$, $B = \sqcup_{i=1}^{k} B_i$ et des éléments $g_1, \dots, g_k \in G$ tels que $g_1(A_1) = B_1, \dots, g_k(A_k) = B_k$. Lorsqu'il en est ainsi, on écrit

$$A \equiv_G B \qquad \text{ou plus précisément} \qquad A \xrightarrow{k} \equiv_G B.$$

Dans certains cas, on impose de plus aux parties A_i, B_i d'être dans un ensemble préassigné $\mathcal{T}(E)$ de parties de E. Sauf mention expresse (comme dans le premier exemple qui suit), $\mathcal{T}(E)$ est l'ensemble de toutes les parties de E.

Exemple : aire et équidécomposition des polygones plans. — Soit G le groupe des isométries d'un plan euclidien E, et P, Q deux polygones simples de E. Alors P et Q sont finiment G-équidécomposables en parties polygonales si et seulement s'ils ont la même aire, ou en termes plus imagés s'il existe un puzzle à pièces polygonales dont P et Q soient deux solutions possibles. C'est un résultat dû indépendamment à F. Bolyai(3) (1832) et P. Gerwien (1833). Pour un exposé moderne, voir [**13**]. (Il convient sans doute ici de modifier légèrement la définition de l'équidécomposabilité, et de compter pour négligeables les réunions finies de segments du plan. Mais il y a aussi un énoncé en termes de décompositions strictes : voir par exemple [**28**], ou le théorème 3.8 de [**77**].) Une fois le théorème général énoncé et démontré, il reste la multitude des cas particuliers pour l'amusement et l'usage pédagogique ; voir par exemple [**25**], dès la page 27, et [**66**], dès la page 87.

La situation est bien différente en dimension 3, puisqu'on connaît des obstructions à l'équidécomposabilité en polyèdres de deux polyèdres de même volume (théorèmes de Dehn et Sydler, voir [**13**] et [**68**]).

Revenons à la dimension 2, mais cette fois avec la notion d'équidécomposabilité relativement à des parties arbitraires. Laczkovich a obtenu des résultats spectaculaires ; ainsi a-t-il résolu en un sens le problème de la *quadrature du cercle*

(3)Son fils J. Bolyai est célèbre dans l'histoire de la géométrie hyperbolique.

en montrant qu'un disque et un carré de même aire sont équidécomposables [**49**][(4)]. Insistons sur le fait que les parties ne sont pas nécessairement mesurables ! quant à leur nombre, Laczkovich indique une majoration de l'ordre de 10^{50}.

***Exemple* (Vitali, 1905)**. — Pour l'action sur le cercle $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ du groupe des rotations rationnelles

$$G = \{z \mapsto \exp(2i\pi q)z : q \in \mathbb{Q},\ 0 \leqslant q < 1\},$$

il existe une partition $\mathbb{S}^1 = \sqcup_{i=1}^{\infty} X_i$ telle que $X_j \equiv_G X_k$ pour toute paire d'entiers $j, k \geqslant 1$.

Démonstration. — Comme G est dénombrable, on peut choisir une énumération $(g_i)_{i \geqslant 1}$ de ses éléments. Si $R \subset \mathbb{S}^1$ est un système de représentants des G-orbites [noter l'usage de l'axiome du choix !], alors $\mathbb{S}^1 = \sqcup_{i=1}^{\infty} g_i(R)$ est réunion disjointe dénombrable de parties évidemment G-équidécomposables, puisque $g_i(R) = g\big(g_j(R)\big)$ pour $g = g_i g_j^{-1} \in G$. □

Remarques

(i) On trouve un argument de ce type dans un fascicule de Vitali [**76**], ainsi qu'aux pages 400–401 de [**41**].

(ii) A propos de l'axiome du choix dans ce type d'argument, voir par exemple le livre de T. Jech [**44**], en particulier les chapitres 1 et 10.

Conséquence pour la mesure de Lebesgue. — *Il n'existe pas de « mesure de Lebesgue » λ_1 normalisée sur $[0, 1]$ et définie sur toutes les parties de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. — Si c'était le cas, et si on procède à l'identification usuelle

$$\mathbb{S}^1 \ni \exp(2i\pi t) \longleftrightarrow t \in [0, 1[,$$

les propriétés (M1) à (M3) impliqueraient d'abord (avec R et $(g_i)_{i \geqslant 1}$ comme dans l'exemple précédent)

$$1 = \lambda_1([0, 1[) \geqslant \lambda_1\Big(\bigsqcup_{i=1}^{k} g_i(R)\Big) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_1(g_i(R)) = k\lambda_1(R)$$

pour tout $k \geqslant 1$, donc $\lambda_1(R) = 0$, donc aussi $\lambda_1(g_i(R))$ pour tout $i \geqslant 1$, donc enfin $\lambda_1([0, 1[) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1\big(g_1(R)\big) = 0$, ce qui est absurde. □

En d'autres termes, il existe des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas mesurables. Il y a des relations subtiles entre l'existence de sous-ensembles non mesurables de la droite réelle et l'axiome du choix ; voir par exemple le chapitre 13 de [**77**]. C'est une question naturelle de demander dans quelle mesure ces conclusions subsistent pour une « mesure » sur $\mathbb{R}^n$ sujette à la condition (M1-f), plus faible que (M1). Avant de présenter

[(4)]Et en montrant bien plus ; par exemple que deux convexes bornés non négligeables de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ de même mesure de Lebesgue sont équidécomposables relativement au *groupe des translations* [**50**].

un argument de Hausdorff qui permet de répondre négativement pour tout $n \geqslant 3$, il convient de formuler les définitions suivantes.

Définitions. — Une *mesure finiment additive* sur un ensemble E est une application μ de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E dans $[0, \infty]$ telle que

(M1-f) $\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(X_i)$ pour des $X_i \subset E$ disjoints deux à deux.

Lorsque E est donné avec une action d'un groupe G, une telle mesure est G-*invariante* lorsque

(M2) $\mu(gX) = \mu(X)$ pour tous $g \in G$ et $X \subset E$.

Une *moyenne sur* E est une mesure finiment additive normalisée par

(M3) $\mu(E) = 1$.

Définition. — Une partie X d'un G-ensemble E est dit *paradoxale* s'il existe deux sous-ensembles disjoints A, B de X finiment G-équidécomposables à X :

$$A \sqcup B \subset X \qquad \text{tels que } A \equiv_G X \text{ et } B \equiv_G X.$$

Un G-ensemble E est dit *paradoxal* s'il contient deux sous-ensembles disjoints finiment G-équidécomposables à E tout entier.

Notons que, lorsque G est le groupe de toutes les permutations de E, dire que le G-ensemble E est paradoxal est précisément dire que E est infini.

Observations. — *Si μ est une mesure finiment additive et G-invariante sur un G-ensemble E, alors $\mu(X) = 0$ ou $\mu(X) = \infty$ pour toute partie paradoxale X de E.*

Si E est un G-ensemble paradoxal, il n'existe pas de moyenne G-équivariante sur E.

Démonstration. — Il est clair que $\mu(C) = \mu(D)$ pour $C, D \subset E$ tels que $C \equiv_G D$. Si A, B sont comme dans la définition précédente,

$$2\mu(X) = \mu(A) + \mu(B) = \mu(A \sqcup B) \leqslant \mu(X),$$

d'où la première affirmation. La seconde est immédiate. $\square$

Lemme. — *Le groupe $SO(3)$ des rotations de la sphère $\mathbb{S}^2$ contient des sous-groupes isomorphes au produit libre d'un groupe d'ordre deux et d'un groupe d'ordre trois, et aussi des sous-groupes libres non abéliens.*

Démonstration. — Considérons dans $\mathbb{R}^3$ une rotation a d'un demi-tour et une rotation b d'un tiers de tour dont les axes font un angle de α ; notons Γ le sous-groupe de $SO(3)$ qu'elles engendrent.

Montrons que, lorsque $\alpha = \pi/4$, le groupe Γ est produit libre du groupe d'ordre 2 engendré par a et du groupe d'ordre 3 engendré par b. Relativement à des axes de coordonnées convenables,

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier $k > 0$ et pour toute suite $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ de signes ± 1, on vérifie par récurrence sur k qu'il existe des entiers pairs $p_1, \dots, p_5$ et des entiers impairs $i_1, \dots, i_4$ tels que

$$(*) \qquad 2^k b^{\varepsilon_1} a b^{\varepsilon_2} a \cdots b^{\varepsilon_k} a = \begin{pmatrix} p_1 & i_1\sqrt{3} & i_3 \\ p_2\sqrt{3} & i_2 & i_4\sqrt{3} \\ p_3 & p_4\sqrt{3} & p_5 \end{pmatrix};$$

par suite $b^{\varepsilon_1} a b^{\varepsilon_2} a \cdots b^{\varepsilon_k} a \neq 1 \in SO(3)$.

Si w est un mot réduit non vide en a et b, il s'agit de vérifier que $w \neq 1 \in SO(3)$. Pour $w = a$, c'est évident. Dans les autres cas, ou bien l'un des mots w, w^{-1} est de la forme $(*)$, ou bien l'un des mots wa, aw est de la forme $(*)$; dans chaque cas, il résulte de ce qui précède que w représente une rotation distincte de l'identité. Par suite Γ est bien produit libre des groupes $\{1, a\} \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\{1, b, b^{-1}\} \approx \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

La preuve ci-dessus est reprise de [**59**]. Hausdorff utilise un argument qui vaut lorsque $\cos\alpha$ est un nombre transcendant. (Voir « Die Unlösbarkeit des Inhaltproblems », appendice au § X.1 dans [**41**], ainsi que [**72**].)

La seconde assertion du lemme résulte de ce que le groupe des commutateurs de ce produit libre est un groupe libre non abélien à deux générateurs. □

Variante. — Hausdorff connaissait le groupe

$$\begin{aligned} PSU(1,1) &= SU(1,1)/\{\pm I\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C}) : |z|^2 - |w|^2 = 1 \right\} \Big/ \{\pm I\} \end{aligned}$$

des isométries préservant l'orientation du demi-plan de Poincaré (voir [**40**], page 184, et [**19**]). On peut montrer qu'il existe des sous-groupes discrets[(5)]

$$\widetilde{\Gamma}_2 < SU(1,1) \cap GL(2,\mathbb{K}),$$

où $\mathbb{K}$ est un corps de nombres, tels que

(i) l'image Γ_2 de $\widetilde{\Gamma}_2$ dans $PSU(1,1)$ est le groupe fondamental d'une surface close orientable Σ_2 de genre deux,

(ii) il existe un automorphisme σ de $\mathbb{K}$ tel que $\sigma(\widetilde{\Gamma}_2) < SU(2) \cap GL(2,\mathbb{K})$.

Soit Γ un sous-groupe libre non abélien de $\widetilde{\Gamma}_2$, correspondant par exemple à un revêtement convenable de Σ_2. Alors $\sigma(\Gamma)$ est un sous-groupe libre non abélien de $SU(2)$. Soit $p : SU(2) \to SO(3)$ le revêtement universel de $SO(3)$, dont le noyau $\{\pm 1\}$ est le centre de $SU(2)$; comme le centre du groupe libre $\sigma(\Gamma)$ est réduit à un

(5) J'imagine qu'on peut aussi en trouver dans les œuvres de Klein.

élément, la restriction de p à $\sigma(\Gamma)$ est injective et l'image $p(\sigma(\Gamma))$ est un sous-groupe libre de $SO(3)$. $\square$

Variante. — Il existe des preuves instructives de l'existence de sous-groupes libres non abéliens dans $SO(3)$ basées sur l'arithmétique des quaternions (à la Dixon). Voir par exemple [**20**]. $\square$

Proposition. — *Un groupe libre non abélien agissant sur lui-même par multiplications à gauche est paradoxal.*

Preuve pour un groupe libre de rang 2. — Soient a, b deux générateurs d'un groupe libre $F_2 = \langle a, b\rangle$ de rang 2. Notons A_+ [respectivement A_-, B_+, B_-] le sous-ensemble de F_2 des éléments représentés par des mots réduits non vides commençant par a [resp. a^{-1}, b, b^{-1}], de sorte que le groupe s'écrit comme une réunion disjointe

$$F_2 = \{1\} \sqcup A_+ \sqcup A_- \sqcup B_+ \sqcup B_-.$$

En contemplant les formes possibles des mots réduits concernés, on observe que

$$A_+ = \{a\} \sqcup aA_+ \sqcup aB_+ \sqcup aB_- \equiv_{F_2} \{1\} \sqcup A_+ \sqcup B_+ \sqcup B_-$$

et donc que $A \xrightarrow{\text{def}} = A_+ \sqcup A_- \equiv_{F_2} F_2$. De même $B \xrightarrow{\text{def}} = B_+ \sqcup B_- \equiv_{F_2} F_2$, de sorte que F_2 est paradoxal. $\square$

Remarques

(i) Quitte à compliquer très légèrement l'argument, on exhibe une partition $F_2 = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup A_4$ telle que $A_1 \sqcup A_2 \xrightarrow{2} \equiv_{F_2} F_2 \xrightarrow{2} \equiv_{F_2} A_3 \sqcup A_4$. Voir par exemple le théorème 4.2 de [**77**].

(ii) On montre facilement que, étant donné un groupe Γ et un sous-groupe Γ_0, si Γ_0 agit paradoxalement sur lui-même par multiplications à gauche, il en est de même de Γ.

(iii) Le groupe $\Gamma = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ agit paradoxalement sur lui-même par multiplications à gauche. Cela résulte de la remarque précédente, mais on peut aussi le montrer directement. Soient a le générateur de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et b un générateur de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; on montre plus précisément qu'il existe une partition $\Gamma = A \sqcup B \sqcup C$ telle que $B = bA$, $C = bB$, $A = bC$, et $B \sqcup C = aA$. Par suite $A \equiv_\Gamma B \sqcup C \equiv_\Gamma A \sqcup C \equiv_\Gamma B \sqcup C \sqcup A = \Gamma$ et de même $B \equiv_\Gamma \Gamma$, d'où l'assertion. (C'est un argument de Hausdorff ; voir aussi [**72**].)

***Théorème* (paradoxe de Hausdorff)**. — *Pour l'action usuelle du groupe $SO(3)$ sur la sphère $\mathbb{S}^2$, il existe une sous-ensemble dénombrable D de la sphère tel que $\mathbb{S}^2 \smallsetminus D$ est paradoxal.*

Démonstration. — Soit D l'ensemble dénombrable des points de $\mathbb{S}^2$ fixés par un élément distinct de 1 d'un sous-groupe libre à deux générateurs F_2 de $SO(3)$, et soit R un domaine fondamental pour l'action libre de F_2 sur $\mathbb{S}^2 \smallsetminus D$. Si $A, B \subset F_2$ sont comme dans la preuve de la proposition précédente, les parties AR et BR sont disjointes et finiment $SO(3)$-équidécomposables à $\mathbb{S}^2 \smallsetminus D$. $\square$

Remarque. — Il s'agit sans doute du théorème aujourd'hui le plus connu de [**41**]. Mais le livre tout entier semble avoir eu une importance historique et pédagogique considérable. A l'occasion des 75 ans de sa parution, A. Shields a rédigé une note de lecture qui en est une bonne description [**70**].

Première conséquence du théorème de Hausdorff. — *Il n'existe pas de moyenne $SO(3)$-invariante sur la sphère de dimension deux.*

Démonstration. — Montrons d'abord que, si μ est une moyenne $SO(3)$-invariante sur $\mathbb{S}^2$, alors $\mu(D) = 0$ pour toute partie dénombrable non vide D de la sphère. Comme $\mathbb{S}^2$ n'est pas dénombrable, il existe deux points antipodaux N, S disjoints de D. Soit Θ l'ensemble des angles des rotations σ d'axes passant par N et S pour lesquelles il existe au moins une paire (x, y) de points de D telle que $\sigma(x) = y$; c'est un ensemble dénombrable. Soit ρ une rotation autour de l'axe passant par N et S dont l'angle n'est pas un multiple rationnel d'un angle de Θ ou de 2π. Les transformés $\rho^j(D)$ sont disjoints deux à deux ($j \in \mathbb{Z}$). Pour tout entier $k > 0$, on a donc

$$k\mu(D) = \mu\Big(\bigsqcup_{j=1}^{k} \rho^j(D)\Big) \leqslant \mu(\mathbb{S}^2) = 1$$

et par suite $\mu(D) = 0$.

Considérons alors une partie dénombrable D de $\mathbb{S}^2$ et deux parties disjointes A, B de son complémentaire telles que $A \equiv_{SO(3)} (\mathbb{S}^2 \smallsetminus D) \equiv_{SO(3)} B$. S'il existait une moyenne $SO(3)$-invariante μ sur $\mathbb{S}^2$, on aurait

$$\mu(A) = \mu(\mathbb{S}^2 \smallsetminus D) = 1$$

et de même $\mu(B) = 1$, donc $2 = \mu(A \sqcup B) \leqslant \mu(\mathbb{S}^2) = 1$, ce qui est absurde. $\square$

Les mêmes arguments montrent qu'il n'existe pas de moyenne invariante par $SO(n+1)$ sur la sphère unité de l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ pour tout $n \geqslant 2$.

La présence de l'ensemble D n'est pas indispensable dans le théorème précédent, comme l'ont spectaculairement montré S. Banach et A. Tarski [**10**].

***Théorème* (paradoxe de Banach-Tarski)**

(i) *Il existe une partition de la sphère en deux parties finiment $SO(3)$-équidécomposables à la sphère tout entière :*

$$\mathbb{S}^2 = A \sqcup B \qquad et \qquad A \equiv_{SO(3)} \mathbb{S}^2 \equiv_{SO(3)} B.$$

(ii) *Deux sous-ensembles A, B d'intérieurs non vides dans $\mathbb{S}^2$ sont $SO(3)$-équidécomposables.*

Is(n) ou Is($\mathbb{R}^n$) ?

(iii) *Pour* $n \geqslant 3$, *deux sous-ensembles* U, V *bornés d'intérieurs non vides dans* $\mathbb{R}^n$ *sont* $\mathrm{Is}(\mathbb{R}^n)$*-équidécomposables, où* $\mathrm{Is}(n) \approx \mathbb{R}^n \rtimes SO(n)$ *désigne le groupe des isométries de* $\mathbb{R}^n$ *préservant l'orientation.*

Sur la preuve. — Pour (i) et vu le résultat de Hausdorff, il suffit de montrer que $\mathbb{S}^2 \equiv_{SO(3)} \big(\mathbb{S}^2 \smallsetminus D\big)$ pour toute partie dénombrable D de la sphère. L'argument est semblable à celui utilisé ci-dessus pour montrer la « première conséquence du théorème de Hausdorff » (voir le théorème 3.8 de [**77**]). Pour (ii) et (iii), l'ingrédient supplémentaire essentiel est le théorème ci-dessous (théorème 3.11 de [**77**]). □

Théorème de Banach-Cantor-Bernstein. — *Soient* E *un* G*-ensemble et* A, A', B, B' *des sous-ensembles de* E *tels que*

$$A \equiv_G A', \qquad A' \subset B,$$
$$B \equiv_G B', \qquad B' \subset A.$$

Alors

$$A \equiv_G B.$$

Démonstration. — Soient $A = \sqcup_{i=1}^m A_i$, $A' = \sqcup_{i=1}^m A'_i$, et $g_i \in G$ tels que $g_i(A_i) = A'_i$ $(i = 1, \dots, m)$, comme dans la définition de la G-équidécomposabilité ; notons $\alpha : A \to A'$ la bijection définie par $\alpha(a) = g_i(a)$ pour $a \in A_i$. Soient de même $B = \sqcup_{j=1}^n B_j$, $B' = \sqcup_{j=1}^n B'_j$, et $h_j \in G$ tels que $h_j(B_j) = B'_j$ $(j = 1, \dots, n)$; notons $\beta : B \to B'$ la bijection définie par $\beta(b) = h_j(b)$ pour $b \in B_j$. On définit un graphe biparti $\mathcal{G}$ ayant $A \sqcup B$ pour ensemble de sommets, avec une arête liant a et $\alpha(a)$ pour tout $a \in A$, ainsi qu'une arête liant b et $\beta(b)$ pour tout $b \in B$. Les composantes connexes du graphe $\mathcal{G}$ sont de quatre types :

(i) des arêtes isolées,
(ii) des circuits de longueurs paires,
(iii) des demi-droites,
(iv) des droites.

On peut donc colorier les arêtes de $\mathcal{G}$ en rouge et vert de telle sorte que

(i) les arêtes isolées sont rouges,
(iii) les arêtes initiales des demi-droites sont rouges,
(ii–iv) deux arêtes ayant un sommet commun sont de couleurs différentes.

Les arêtes rouges établissent alors une bijection $\gamma : A \to B$. De plus, il existe une partition $A = \sqcup_{k=1}^p C_k$ telle que chaque C_k soit contenu dans l'un des A_i ou l'un des B'_j, et telle que la restriction de γ à C_k coïncide avec l'élément g_i ou h_j^{-1} correspondant. □

Plus tard, divers chercheurs se sont intéressés au nombre minimum de parties nécessaires aux équidécompositions. Citons par exemple deux résultats de [**64**] pour lesquels nous renvoyons au chapitre 4 de [**77**].

***Proposition* (Robinson).** — *Il existe une partition* $\mathbb{S}^2 = A \sqcup B$ *telle que*

$$A \xrightarrow{2} \equiv_{SO(3)} \mathbb{S}^2 \xrightarrow{2} \equiv_{SO(3)} B.$$

De plus, $k+l \geqslant 4$ *pour toute partition* $\mathbb{S}^2 = X \sqcup Y$ *telle que* $X \xrightarrow{k} \equiv_{SO(3)} \mathbb{S}^2 \xrightarrow{l} \equiv_{SO(3)} Y$.

Si $G \approx \mathbb{R}^3 \rtimes O(3)$ *désigne le groupe des isométries de* $\mathbb{R}^3$*, il existe une partition* $\mathbb{B}^3 = A \sqcup B$ *de la boule unité de* $\mathbb{R}^3$ *telle que*

$$A \xrightarrow{2} \equiv_G \mathbb{B}^3 \xrightarrow{3} \equiv_G B.$$

De plus, $k + l \geqslant 5$ *pour toute partition* $\mathbb{B}^3 = X \sqcup Y$ *telle que* $X \xrightarrow{k} \equiv_G \mathbb{B}^3 \xrightarrow{l} \equiv_G Y$.

***Remarque*.** — L'assertion portant sur $k+l \geqslant 4$ résulte immédiatement des définitions.

Dans cette même direction, il y a des résultats récents de Richter [**63**]. Soit par exemple K un ensemble compact convexe d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^3$ et nK la réunion disjointe de $n \geqslant 2$ translatés de K ; alors $K \xrightarrow{32+n} \equiv_G nK$. Si $K = C$ est un cube, alors $C \xrightarrow{8n-3} \equiv_G nC$, et $k \geqslant 2n$ si $C \xrightarrow{k} \equiv_G nC$. En particulier, même si on ne connaît pas le plus petit entier k qui réalise la

$$\textit{duplication du cube } C \xrightarrow{k} \equiv_G 2C,$$

on sait que $4 \leqslant k \leqslant 13$.

La situation est radicalement différente pour les isométries de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$. Le résultat suivant, de Banach (1923), est l'une des premières manifestations du *théorème de Hahn-Banach* ([**8**], [**35**], [**9**]).

***Théorème* (Banach).** — *Pour* $n = 1$ *et* $n = 2$*, il existe une mesure finiment additive* μ *définie sur toutes les parties de* $\mathbb{R}^n$*, invariante par isométries, et normalisée par* $\mu([0,1]) = 1$ *ou* $\mu([0,1]^2) = 1$ *selon le cas.*

***Remarque*.** — Quelques années après la publication de ce résultat, von Neumann remarquera que sa « vraie raison » en est la résolubilité et donc la moyennabilité (voir plus bas) du groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$ pour $n \leqslant 2$ [**56**].

Certaines des questions formulées à la « grande époque » des paradoxes de Hausdorff-Banach-Tarski ont reçu des réponses dans les années 1980 et 1990. Ainsi :

Solution du problème de Ruziewicz. — Pour $n \geqslant 2$, la mesure de Lebesgue est l'unique moyenne $SO(n+1)$-invariante définie sur les ensembles mesurables au sens de Lebesgue de la sphère $\mathbb{S}^n$. (Résultats de Rosenblatt, Margulis, Sullivan et Drinfeld ; voir l'exposition de [**69**].)

Solution du problème de Marczewski. — Pour $n \geqslant 2$, il existe une décomposition paradoxale de la sphère $\mathbb{S}^n$ relative au groupe $SO(n+1)$ dont les parties ont la propriété de Baire[(6)] [**24**].

(6) Un sous-ensemble X de $\mathbb{S}^n$ est *de Baire* s'il existe un ouvert U tel que la différence symétrique $X \Delta U$ est maigre (= réunion dénombrable de sous-ensembles d'intérieurs vides). Un sous-ensemble

Mais un autre problème de Marczewski (question 9.9 de [**77**]) reste tout à fait ouvert :

Existe-t-il une moyenne $SO(3)$-invariante, définie sur les ensembles mesurables au sens de Borel de la sphère $\mathbb{S}^2$, qui soit nulle sur les ensembles maigres ?

3. L'alternative de Tarski et la définition de moyennabilité de von Neumann

Soient G un groupe et E un G-ensemble. Les paradoxes de Hausdorff-Banach-Tarski exhibent l'obstruction la plus évidente à l'existence d'une moyenne G-invariante sur E. Il existe des obstructions *apparemment* plus faibles.

Lemme. — *Soit E un G-ensemble possédant la propriété suivante : il existe un entier $k \geqslant 1$, des sous-ensembles $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_k$ de E et des éléments $g_1, \ldots, g_k \in G$ tels que*

$$B_i = g_i(A_i) \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i \geqslant 1_E + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$$

où 1_E [respectivement α_i, β_i] désigne la fonction caractéristique de E [resp. A_i, B_i].

Alors il n'existe pas de moyenne G-invariante sur E.

Démonstration. — S'il existait une moyenne G-invariante μ sur E, on aurait $\sum_{i=1}^{k} \mu(B_i) \geqslant \mu(E) + \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)$, donc $0 \geqslant 1$, ce qui est absurde. □

(Notons qu'il n'est pas nécessaire que les ensembles A_i d'une part et B_i d'autre part soient disjoints.)

Soit E un ensemble. Notons $\ell^\infty(E)$ l'espace de Banach des fonctions bornées à valeurs réelles sur E, muni de la norme définie par $\|f\| = \sup_{x\in E} |f(x)|$. Une forme linéaire $\underline{\mu}$ sur $\ell^\infty(E)$ est dite *positive* si $\underline{\mu}(f) \geqslant 0$ pour toute fonction f à valeurs positives, et *normalisée* si $\underline{\mu}(1_E) = 1$. Toute forme linéaire positive normalisée $\underline{\mu}$ sur $\ell^\infty(E)$ définit évidemment une moyenne μ sur E, pour laquelle $\mu(A)$ est la valeur de $\underline{\mu}$ sur la fonction caractéristique de A. Réciproquement, il est facile de vérifier que toute moyenne μ sur E définit naturellement une forme linéaire positive normalisée $\underline{\mu}$ sur $\ell^\infty(E)$. Ci-dessous, nous identifions ces deux objets, et supprimons la différence de notation μ, $\underline{\mu}$.

***Proposition* (forme faible de l'alternative de Tarski)**. — *L'alternative suivante vaut pour tout G-ensemble E :*

– *ou bien il existe une moyenne G-invariante sur E,*

borélien est *ipso facto* de Baire ; un sous-ensemble de Baire n'est *pas* nécessairement mesurable au sens de Lebesgue.

– *ou bien l'hypothèse du lemme précédent est satisfaite.*

Démonstration. — Il s'agit d'une application directe du théorème de Hahn-Banach.

Dans l'espace $\ell^\infty(E)$, considérons d'une part le sous-espace vectoriel (non nécessairement fermé) $d^\infty(E)$ engendré par les fonctions de la forme $\beta - \alpha$, où α, β sont les fonctions caractéristiques de deux sous-ensembles A, B de E tels qu'il existe $g \in G$ avec $B = g(A)$. Considérons d'autre part le cône convexe ouvert C de $\ell^\infty(E)$ formé des fonctions f sur E à valeurs réelles telles que $\inf_{x \in E} f(x) > 0$. Une moyenne G-invariante μ sur E est une forme linéaire sur $\ell^\infty(E)$ dont la restriction à $d^\infty(E)$ est nulle et la restriction à C strictement positive. Il résulte donc du théorème de Hahn-Banach que l'existence d'une moyenne G-invariante sur E est *équivalente* à la condition

$$d^\infty(E) \cap C = \varnothing.$$

Pour montrer la proposition, il suffit donc de montrer que, si cette intersection est non vide – ce que nous supposons désormais – alors l'hypothèse du lemme précédent est satisfaite.

Comme C est ouvert, il existe des sous-ensembles $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_k$ de E de fonctions caractéristiques $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots \beta_k$, des éléments $g_1, \ldots, g_k \in G$ tels que $g_i(A_i) = B_i$ et des nombres rationnels $n_1, \ldots, n_k$ tels que la fonction

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \, (\beta_i - \alpha_i)$$

soit dans C. En échangeant quand il le faut A_i et B_i, et en remplaçant simultanément g_i par g_i^{-1}, on peut supposer chaque n_i positif. Quitte à multiplier la fonction par un entier convenable, on peut aussi supposer les nombres n_i entiers et la fonction minorée par 1_E. En répétant les triplets A_i, B_i, g_i si nécessaire, on peut enfin supposer tous les n_i égaux à 1. On a donc $1_E \leqslant \sum_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i)$, ce qu'il fallait démontrer. □

On peut montrer que les hypothèses du lemme précédent sont en fait équivalentes à l'existence d'un paradoxe, d'où le résultat suivant, de Tarski. (L'annonce de [**73**] est reprise dans [**74**] ; voir aussi l'exposition de [**39**].)

***Théorème* (alternative de Tarski)**. — *L'alternative suivante vaut pour tout G-ensemble E et toute partie non vide X de E :*

– *ou bien il existe une mesure finiment additive G-invariante μ sur E telle que $\mu(X) = 1$,*

– *ou bien il existe une partition $X = A \sqcup B$ telle que $A \equiv_G X \equiv_G B$.*

L'apport fondamental de von Neumann [**56**] au sujet de ce texte est d'avoir réalisé que les paradoxes à la Hausdorff-Banach-Tarski sont dus aux propriétés des groupes en jeu, par exemple $SO(3)$ et ses sous-groupes libres, bien plus qu'aux propriétés géométriques des espaces sur lesquels ils agissent, comme $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{B}^3$ et $\mathbb{R}^n$. Par exemple,

$\mathbb{R}^2$ est paradoxal relativement au groupe $\mathbb{R}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{R})$ des affinités préservant le volume et l'orientation, et $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est paradoxal relativement au groupe $PSL_2(\mathbb{R})$ des transformations linéaires fractionnaires (car ces groupes sont non moyennables et agissent avec isotropies moyennables), alors qu'au contraire $\mathbb{R}^n$ n'est pas paradoxal relativement au groupe des homothéties et translations (car tout groupe résoluble est moyennable).

***Définition* (von Neumann).** — Un groupe G est *moyennable* s'il existe une moyenne $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ invariante par multiplications à gauche.

Une partie de la théorie des groupes moyennables consiste à montrer que cette définition est équivalente à plusieurs autres.

Théorème. — *Pour un groupe G, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *G est moyennable (von Neumann),*

(ii) *G agissant sur lui-même par multiplications à gauche n'admet pas de décomposition paradoxale (Tarski),*

(iii) *il existe une suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$ de parties finies non vides de G telles que, pour tout $g \in G$, le quotient $|(gF_n)\Delta F_n|/|F_n|$ tend vers 0 quand $n \to \infty$, où Δ désigne la différence symétrique (Følner),*

(iv) *la représentation unité est faiblement contenue dans la représentation régulière de G (Hulanicki),*

(v) *toute action de G par homéomorphismes sur un espace compact préserve une mesure de probabilité (Bogolyubov).*

Sur les attributions. — Von Neumann et Tarski ont déjà été cités. L'article original de Følner est [**27**]. La notion de contenance faible pour les représentations unitaires de groupes, due à Godement, a été élaborée par Fell ; l'équivalence de (iv) avec d'autres définitions de la moyennabilité apparaît dans [**43**]. Pour Bogolyubov, nous nous référons à [**11**] (article en ukrainien), cité dans [**5**]. Lorsque G est dénombrable, on obtient une condition équivalente en remplaçant dans (v) « espace compact » par « espace métrique compact » ; voir la proposition 1.5 de [**78**].

On peut d'une part allonger considérablement le théorème par des conditions, toujours équivalentes, en termes de

– marches aléatoires (Kesten [**48**]),
– cohomologie (B. Johnson [**45**]),
– combinatoire des noyaux de présentations de groupes (Grigorchuk [**31**]).

(Etc., la liste est loin d'être close.) On peut d'autre part étendre la théorie au cas des groupes topologiques (le cas localement compact est alors le cas le plus étudié), et même aux semi-groupes topologiques [**23**]. Voir les exposés standard, par exemple [**30**], [**26**], le chapitre 4 de [**79**] ou [**60**] ; voir aussi [**17**].

Toute action d'un groupe non moyennable à groupes d'isotropie moyennables (par exemple abéliens) est paradoxale.

Il est évident que les groupes finis sont moyennables ; il n'est pas difficile de montrer que les groupes abéliens le sont aussi, par exemple en utilisant le théorème de Hahn-Banach (voir la preuve du théorème 1.2.1 de [**30**]). Par ailleurs, les extensions et les limites inductives de groupes moyennables sont encore moyennables. Il en résulte entre autres que tout groupe possédant un sous-groupe résoluble d'indice fini est moyennable, et de même que tout groupe localement fini est moyennable. Mentionnons encore que les groupes de type fini à croissance sous-exponentielle sont moyennables [**1**].

Nous avons déjà montré (juste avant l'énoncé du paradoxe de Hausdorff) que les groupes libres non abéliens sont non moyennables ; plus généralement tout groupe contenant un groupe libre non abélien est non moyennable. La question concernant la réciproque est implicite chez von Neumann, et explicite dans un article de Day (fin du § 4 de [**21**]). Elle a motivé de nombreux travaux, dont on peut retenir entre autres les résultats suivants.

(i) Pour tout corps $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro, tout sous-groupe non moyennable de $GL(n, \mathbb{K})$ possède des sous-groupes libres non abéliens [**75**].

(ii) Il existe un groupe de type fini non moyennable sans sous-groupe libre non abélien [**57**].

(iii) Les groupes de Burnside non cycliques d'exposants impairs $n > 665$ ne sont pas moyennables [**2**].

(iv) Tout groupe hyperbolique non élémentaire sans torsion possède un quotient de torsion non moyennable [**33**, Corollary 5.6.D].

(v) Il existe un groupe de présentation finie non moyennable sans sous-groupe libre non abélien [**58**].

Pour terminer ce chapitre, mentionnons des estimations qu'on peut comparer à celles de Robinson, citées en fin du chapitre précédent. Pour un groupe G, on définit le *nombre de Tarski* $\mathcal{T}(G)$ comme étant le minimum des entiers $k+l$ tels qu'il existe une partition $G = A \sqcup B$ pour laquelle $A \xrightarrow{k} \equiv_G G \xrightarrow{l} \equiv_G B$; en particulier, $\mathcal{T}(G) < \infty$ si et seulement si G est non moyennable.

Proposition. — *Soit G un groupe non moyennable.*

Pour que $\mathcal{T}(G) = 4$, il faut et il suffit que G possède un sous-groupe libre non abélien.

Si G est de torsion, alors $\mathcal{T}(G) \geqslant 6$.

Si $B(m, n)$ désigne le groupe du Burnside à $m \geqslant 2$ générateurs d'exposant impair $n \geqslant 665$, alors $6 \leqslant \mathcal{T}(B(m, n)) \leqslant 14$.

Sur la preuve. — La première affirmation est un résultat non publié de B. Johnson, un étudiant de Tarski, datant des années 40 (corollaire 4.9 de [**77**]), la seconde une observation élémentaire, et la troisième un résultat de [**17**]. □

4. Développements et problèmes

La notion de moyennabilité a envahi de nombreux domaines des mathématiques. Il y a par exemple une définition naturelle de moyennabilité pour les *algèbres de Banach* ; l'algèbre de convolution $\ell^1(G)$ d'un groupe G est alors moyennable si et seulement si G est moyennable [**45**]. Il y a des notions très étroitement apparentées pour des structures plus riches, telles que la nucléarité et l'exactitude pour les *C^*-algèbres*, et l'injectivité pour les *algèbres de von Neumann* [**18**]. On peut aussi définir la moyennabilité pour des espaces métriques, des actions de groupes mesurables non singulières (moyennabilité « à la Zimmer »), des relations d'équivalence, des feuilletages,... Un bon cadre pour ces développements est celui de *groupoïde*, parfois mesuré et parfois localement compact [**4**].

Mentionnons trois résultats récents qui illustrent l'actualité de la notion de moyennabilité.

(i) *La conjecture de Baum-Connes est vérifiée pour tout groupe dénombrable moyennable ;* en particulier, la conjecture de Novikov est satisfaite pour toute variété compacte dont le groupe fondamental est moyennable. Ces énoncés sont des cas particuliers de résultats beaucoup plus généraux ; voir [**46**] et [**42**].

(ii) Il existe un groupe dénombrable qui ne possède pas d'action moyennable sur un espace compact, en particulier dont l'action sur son compactifié de Stone-Čech n'est pas moyennable (il s'agit ici d'une variante topologique de la moyennabilité à la Zimmer) ; de manière équivalente, il existe un groupe dénombrable dont la C*-algèbre réduite n'est pas exacte. (Voir l'exposition de [**3**] pour les notions en jeu et l'équivalence, et [**34**] pour la suggestion d'un exemple de groupe qui n'est pas « uniformément plongeable dans un espace de Hilbert », et qui n'a donc *a fortiori* pas d'action moyennable sur un espace compact.)

(iii) La moyennabilité d'un groupe discret G est intimement liée aux propriétés de *concentration de mesure* (à la Lévy-Milman) de certains systèmes dynamiques de groupe G [**61**].

Dans le cadre restreint de la moyennabilité des groupes dénombrables, il est facile de formuler des listes de problèmes ouverts, sans doute très hétérogènes quant à leurs difficultés. Certaines des questions ci-dessous(7) sont bien connues des experts, d'autres n'ont été considérées que lors de la préparation de ce texte ; elles ont toutes été formulées au moins une fois dans diverses discussions de l'auteur avec R. Grigorchuk, que

(7) La liste qui suit date de 2001.

je remercie de savoir si bien faire partager ses intérêts. J'espère qu'elles convaincront le lecteur que la moyennabilité des groupes est un sujet qui possède un bel avenir.

Existence de groupes moyennables avec certaines propriétés

(1) *Existe-t-il un groupe G infini de type fini, moyennable, et un entier n tels que $g^n = 1$ pour tout $g \in G$?*

Rappel : pour $m \geqslant 2$ et n assez grand, les groupes de Burnside $B(m, n)$ sont infinis non moyennables (m désigne le nombre de générateurs et n l'exposant du groupe).

(2) *Existe-t-il un groupe G infini de type fini, moyennable et simple ?*

Rappel : le groupe simple T (et *a fortiori* le groupe simple V) de Richard Thompson contient un sous-groupe libre non abélien, et n'est donc pas moyennable (notations de [**16**]).

(3) *Existe-t-il un groupe G infini de type fini, moyennable, héréditairement juste infini, qui ne soit pas virtuellement $\mathbb{Z}$?*

Par « héréditairement juste infini », on entend que tout quotient propre d'un sous-groupe d'indice fini de G est un groupe fini, *et que G est résiduellement fini.*

Existence de groupes non moyennables avec certaines propriétés

(4) *Existe-t-il un groupe de type fini non moyennable sans sous-groupe libre non abélien qui soit résiduellement fini ?*

Remarque : les groupes de Burnside infinis et les groupes de [**58**] ne sont pas résiduellement finis.

(5) Même question que la précédente pour un groupe qui soit de plus *de torsion.*

(6) Même question que la question 4 pour un groupe qui soit de plus *de présentation finie.*

Groupes particuliers

(7) *Les p-groupes de Golod sont-ils non moyennables ?* Voir [**29**], et l'exposition de [**38**].

(8) *Le groupe F de Richard Thompson est-il moyennable ?* (notation de [**16**]).

(9) *Comment affiner les estimations des nombres de Tarski pour les groupes de Burnside ? (voir la dernière proposition du chapitre 3). En général, quelles sont les valeurs possibles des nombres de Tarski ?*

(10) *Existe-t-il un groupe profini qui contienne simultanément un sous-groupe dense moyennable et un sous-groupe dense avec la propriété (T) de Kazhdan ?*

C'est une question qu'a souvent posée A. Lubotzky. On peut penser au groupe profini des homéomorphismes d'un arbre fixant un point base donné.

Autres questions

(11) *Existe-t-il un entier $k \geqslant 2$ et un nombre $\varepsilon > 0$ tels qu'un groupe à k générateurs de croissance exponentielle au moins $2k - 1 - \varepsilon$ soit non moyennable ?* (voir VI.52 dans [**37**]).

(12) *Existe-t-il un groupe supermoyennable à croissance exponentielle ?*

Un groupe G est *supermoyennable* si, pour toute action de G sur un ensemble E et pour tout sous-ensemble non vide X de E, il existe une moyenne G-invariante sur E normalisée sur X. La notion est explicite chez Rosenblatt [**65**]. On sait que tout groupe de type fini qui est à croissance sous-exponentielle est supermoyennable.

(13) *Le produit direct de deux groupes supermoyennables est-il supermoyennable ?*

(14) *Est-il vrai que* $AG^{(k)} = \overline{EG}^{(k)}$ *pour tout* $k \geqslant 2$ *?*

Ici $AG^{(k)}$ désigne la classe des groupes moyennables à k générateurs. Il y a une topologie naturelle sur l'espace des groupes marqués à k générateurs, et $\overline{EG}^{(k)}$ est l'adhérence pour cette topologie de la classe des groupes élémentairement moyennables. (Problème de Stepin ; voir [**32**].)

(15) *La C^*-algèbre réduite d'un groupe dénombrable sans sous-groupe normal moyennable non trivial est-elle nécessairement simple ?* Voir [**36**].

N.B. L'appendice C du livre de Wagon [**77**] est une liste de problèmes ouverts (même si quelques-uns ont été résolus depuis 1985 [**51**]).

5. Quelques dates de la mesure et du paradoxe

1872. Le *programme d'Erlangen* de Felix Klein (1849–1925).

1874–1897. Articles fondateurs de Georg Cantor (1845–1918) sur la théorie des ensembles.

1892–1893–1899. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (3 volumes) de Henri Poincaré (1854–1912).

1895. Projections publiques de films de Louis Lumière, dont *L'arrivée d'un train en gare de La Ciotat* et *L'arroseur arrosé*.

1898. *Leçons sur la théorie des fonctions* de Émile Borel (1871–1956).

1898. Premier article publié de Henri Lebesgue, *Sur l'approximation des fonctions.*

1899. L'axiomatisation de la géométrie euclidienne dans les *Grundlagen der Geometrie* de David Hilbert (1862–1943).

1900. Max Dehn montre qu'il existe en dimension 3 des polyèdres de même volume qui ne sont pas équidécomposables.

1900. *La science des rêves* de Sigmund Freud.

1901. Première note de Henri Lebesgue sur son intégrale [52].

1901. Le paradoxe de Bertrand Russell (1872–1970).

1905. La relativité restreinte d'Albert Einstein (1879–1955).

1905. Séparation de l'Église et de l'État en France.

1907. *Les Demoiselles d'Avignon* de Pablo Picasso.

1910–13. Les *Principia Mathematica* de B. Russell et A.N. Whitehead.

1912. *Pierrot lunaire* d'Arnold Schönberg.

1912. Naufrage du *Titanic.*

1913. *Le Sacre du Printemps* d'Igor Stravinsky.
1913–1927. Publication d'*À la recherche du temps perdu* de Marcel Proust.

1914. « Grundzüge der Mengenlehre » de Felix Hausdorff [41].

1915. Fondation du *Canard enchaîné.*
1916. *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins* de Hermann Weyl (1885–1955) (« début » de la théorie ergodique).
1916. Naissance de *Dada* à Zurich.
1918. Droit de vote en Angleterre pour les femmes de plus de 30 ans.
1920–21. Premières émissions de radiodiffusion aux États-Unis et en France.
1923. *Sur le problème de la mesure* de Stefan Banach [**8**].
1923. Travail de Norbert Wiener (1894–1964) sur le mouvement brownien.
1923. Un dollar vaut 18000 marks en janvier et 8 millions de marks en novembre.

1924. « Sur la décomposition des ensembles de points... » de Stefan Banach et Alfred Tarski [10].

1925. *Le manifeste du surréalisme* d'André Breton.
1926. *Le chanteur de jazz*, premier film parlant, présenté par Warner Bros.
1926. « Revue nègre » au music-hall des Champs-Élysées ; succès en France de Joséphine Baker et Sydney Bechet.
1927. Werner Heisenberg (1901–1976) découvre les relations d'incertitude.
1927. Traversée de l'Atlantique en avion par Charles Lindbergh et le *Spirit of Saint Louis.*
1928–32. Découverte théorique (P.A.M. Dirac) et expérimentale (C.D. Anderson) de la première antiparticule (le positron).

1929. « Zur allgemeinen Theorie des Masses » de John von Neumann [56]. 1929. Première note de Alfred Tarski sur son alternative [73].

1929. Note de Georges de Rham (1903–1990) sur *Intégrales multiples et Analysis situs.*
1929. Découverte de la pénicilline (fabrication industrielle en 1942).
1929. Le jeudi noir à Wall Street (24 octobre).
1930. Découverte de la planète Pluton.
1931. Le théorème d'incomplétude de Kurt Gödel (1906–1978).
1931. Le théorème ergodique de Georges David Birkhoff (1884–1944).
1932. *Théorie des opérations linéaires* de Stefan Banach.
1932. *Le voyage au bout de la nuit*, de Louis-Ferdinand Céline.
1933. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* de Andrei Kolmogorov (1903–1987).
1933. Existence d'une mesure invariante sur tout groupe localement compact séparable (articles de Haar et von Neumann).

Les fondateurs du sujet

Henri Lebesgue, né à Beauvais en 1875, mort à Paris le 26 juillet 1941.

Felix Hausdorff, né en 1868 à Wroclaw (à cette époque la ville prussienne de Breslau). S'est suicidé avec sa femme et sa belle-sœur à Bonn le 26 janvier 1942, après qu'ils soient devenus conscients de leur déportation imminente [**19**].

Stephan Banach, né à Cracovie en 1892, mort à Lvov le 31 août 1945. Durant la vie de Banach, la ville de Lvov (= Lwów = Lemberg) fut successivement sous autorité austro-hongroise, russe en 1914, austro-allemande en 1915, polonaise dès 1918, soviétique en 1939, allemande en 1941, reprise par les troupes soviétiques le 27 juillet 1944, puis enfin ukrainienne dès 1945 [**47**].

Alfred Tajtelbaum, né à Varsovie en 1901, adopta le nom de Tarski au début des années 1920. En voyage de conférences aux États-Unis en 1939, il ne put rentrer en Pologne ; il enseigna à Harvard, New York, l'Institut de Princeton et enfin Berkeley, jusqu'à sa mort en 1983 [**6**].

John (d'abord Johann) von Neumann, né à Budapest en 1903, termine à peu près en même temps son doctorat en mathématiques à Budapest et son diplôme d'ingénieur chimiste au Poly de Zurich. A l'Institut de Princeton de 1933 à sa mort en 1957 [**7**].

Références

[1] G.M. Adel'son-Vel'skii & Yu.A. Sreider – « The Banach mean on groups », *Uspekhi Mat. Nauk* **12** (1957), no. 6, p. 131–136.

[2] S.I. Adyan – « Random walks on free periodic groups », *Math. USSR Izvestiya* **21** (1983), no. 3, p. 425–434, (publication en russe de 1982).

[3] C. Anantharaman-Delaroche – « Amenability and exactness for dynamical systems and their C^*-algebras », *Trans. Amer. Math. Soc.* **354** (2002), p. 4153–4178.

[4] C. Anantharaman-Delaroche & J. Renault – *Amenable groupoids*, Monographies, vol. 36, l'Enseignement mathématique, 2000.

[5] D.V. Anosov – « On the contribution of N.N. Bogolyubov to the theory of dynamical systems », *Russian Math. Surveys* **49** (1994), no. 5, p. 5–20.

[6] Articles sur Tarski – *J. Symbolic Logic* **51** (1986), p. 865–941, en particulier « Tarski and geometry », par L.W. Szczerba, p. 907–912, sur les suites de [**10**] dans l'œuvre de Tarski. Voir aussi *Ibid.* **53** (1988), p. 2–91.

[7] Articles sur von Neumann – *Bull. Amer. Math. Soc.* **64** (1958), en particulier « Von Neumann on measure and ergodic theory », par P.R. Halmos, p. 86–94.

[8] S. Banach – « Sur le problème de la mesure », *Fund. Math.* **4** (1923), p. 7–33, *Œuvres*, vol. I, p. 66–89 & 318–322.

[9] ______, « Sur les fonctionnelles linéaires », *Studia Math.* **1** (1929), p. 211–214 & 223–239, *Œuvres*, vol. II, p. 375–380.

[10] S. Banach & A. Tarski – « Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes », *Fund. Math.* **6** (1924), p. 244–277, *Œuvres*, vol. I, p. 118–148 & 125–127.

[11] N.N. Bogolyubov – « On some ergodic properties of continuous transformation groups », *Nauch. Zap. Kiev Univ. Phys.-Math. Sb.* **4** (1939), no. 3, p. 43–54, voir aussi [**12**], p. 561–569.
[12] ______, *Selected works*, vol. 1, Naukova Dumka, Kiev, 1969.
[13] V.G. Boltianskii – *Hilbert's third problem*, J. Wiley, 1978.
[14] B. Bolzano – *Paradoxien des Unendlichen*, Mayer & Müller, 1889, première édition en 1851.
[15] E. Borel – *Les paradoxes de l'infini*, Gallimard, 1946.
[16] J.W. Cannon, W.J. Floyd & W.R. Parry – « Introductory notes on Richard Thompson's groups », *Enseign. Math.* **42** (1996), p. 215–256.
[17] T. Ceccherini-Silberstein, R. Grigorchuk & P. de la Harpe – « Amenability and paradoxes for pseudogroups and for discrete metric spaces », *Proc. Steklov Inst. Math.* **224** (1999), p. 57–95.
[18] A. Connes – *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1994.
[19] J. Czyz – *Paradoxes of measures and dimensions originating in Felix Hausdorff's ideas*, World Scientific, 1994.
[20] G. Davidoff, P. Sarnak & A. Valette – *Elementary number theory, group theory, and Ramanujan graphs*, London Math. Soc. Student Texts, vol. 55, Cambridge University Press, 2003.
[21] M.M. Day – « Amenable semigroups », *Illinois J. Math.* **1** (1957), p. 509–544.
[22] A. Denjoy, L. Felix & P. Montel – « Henri Lebesgue, le Savant, le Professeur, l'Homme », in *Henri Lebesgue, Œuvres scientifiques*, vol. 1, l'Enseignement mathématique, 1972, p. 67–84.
[23] J. Dixmier – « Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications », *Acta Sci. Math. (Szeged)* **12A** (1950), p. 213–227.
[24] R. Dougherty & M. Foreman – « Banach-Tarski decompositions using sets with the property of Baire », *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), p. 75–124.
[25] H.E. Dudeney – *Amusements in mathematics*, Dover, 1958, première édition en 1917.
[26] P. Eymard – « Initiation à la théorie des groupes moyennables », in *Analyse harmonique sur les groupes de Lie (Séminaire Nancy-Strasbourg, 1973–75)*, Lect. Notes in Math., vol. 497, Springer, 1975, p. 89–107.
[27] E. Følner – « On groups with full Banach mean value », *Math. Scand.* **3** (1955), p. 243–254.
[28] R.M. French – « The Banach-Tarski theorem », *Math. Intelligencer* **10** (1988), no. 4, p. 21–28.
[29] E.S. Golod – « On nil-algebras and finitely approximable p-groups », Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 48, American Mathematical Society, 1965, publication en russe : *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.* **28** (1964), p. 273–276, p. 103–106.
[30] F.P. Greenleaf – *Invariant means on topological groups and their applications*, Van Nostrand, 1969.
[31] R.I. Grigorchuk – « Symmetrical random walks on discrete groups », in *Multicomponent random systems* (R.L. Dobrushin, Ya.G. Sinai & D. Griffeath, éds.), Advances in Probability and Related Topics, vol. 6, Dekker, 1980, p. 285–325.
[32] ______, « An example of a finitely presented amenable group not belonging to the class *EG* », *Sbornik Math.* **189** (1998), no. 1, p. 75–95.
[33] M. Gromov – « Hyperbolic groups », in *Essays in Group Theory* (S.M. Gerstern, éd.), M.S.R.I. Publ., vol. 8, Springer, 1987, p. 75–263.

[34] ______, « Spaces and questions », in *GAFA 2000, Visions in mathematics towards 2000* (N. Alon, J. Bourgain, A. Connes, M. Gromov & V. Milman, éds.), Birkhäuser, 2000, p. 118–161.

[35] H. Hahn – « Ueber systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten », *Monatshefte für Math. und Phys.* **31** (1927), p. 214–229.

[36] P. M. Bekka et de la Harpe – « Groups with simple reduced C*-algebras », *Exposition. Math.* **18** (2000), p. 215–230.

[37] P. de la Harpe – *Topics in geometric group theory*, University of Chicago Press, 2000, nouveau tirage avec corrections et mise à jour, 2003.

[38] ______, « Uniform growth in groups of exponential growth », *Geom. Dedicata* **95** (2002), p. 1–17.

[39] P. de la Harpe & G. Skandalis – « Un résultat de Tarski sur les actions moyennables de groupes et les partitions paradoxales », *Enseign. Math.* **32** (1986), p. 121–138.

[40] F. Hausdorff – « Analytische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie », *Leipziger Mathematisch-Physikalische Berichte* **51** (1899), p. 161–214.

[41] ______, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, 1914.

[42] N. Higson & J. Roe – « Amenable group actions and the Novikov conjecture », *J. reine angew. Math.* **519** (2000), p. 143–153.

[43] A. Hulanicki – « Means and Følner conditions on locally compact groups », *Studia Math.* **27** (1966), p. 87–104.

[44] T.J. Jech – *The axiom of choice*, North-Holland, 1973.

[45] B.E. Johnson – *Cohomology in Banach algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 127, American Mathematical Society, 1972.

[46] P. Julg – « Travaux de N. Higson et G. Kasparov sur la conjecture de Baum-Connes », in *Séminaire Bourbaki vol. 1997/98*, Astérisque, vol. 252, Société Mathématique de France, 1998, Exp. n° 841, p. 151–183.

[47] R. Kaluza – *The life of Stefan Banach*, Birkhäuser, 1996.

[48] H. Kesten – « Symmetric random walks on groups », *Trans. Amer. Math. Soc.* **92** (1959), p. 336–354.

[49] M. Laczkovich – « Equidecomposability and discrepancy ; a solution of Tarski's circle-squaring problem », *J. reine angew. Math.* **404** (1990), p. 77–117.

[50] ______, « Decomposition of sets with small boundary », *J. London Math. Soc.* **46** (1992), p. 58–64.

[51] ______, « Paradoxical decompositions : a survey of recent results », in *First European Congress of Mathematics, vol. II (Paris, 1992)*, Progress in Math., vol. 120, Birkhäuser, 1994, p. 159–184.

[52] H. Lebesgue – « Sur une généralisation de l'intégrale définie », *C. R. Acad. Sci. Paris* **132** (1901), p. 1025–1031, *Œuvres scientifiques*, vol. I, p. 197–199.

[53] ______, *Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives*, Gauthier-Villars, 1904, *Œuvres scientifiques*, vol. II, p. 11–154.

[54] ______, « Extraits d'un discours prononcé à Cracovie en 1938 », in *Œuvres scientifiques*, vol. I, l'Enseignement mathématique, 1972, p. 95–96.

[55] A. Lubotzky – *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*, Birkhäuser, 1994.

[56] J. von Neumann – « Zur allgemeinen Theorie des Masses », *Fund. Math.* **13** (1929), p. 73–116, Collected Works, vol. I, p. 599–642 & 643.

[57] A.Yu. Ol'shanskii – « On the problem of the existence of an invariant mean on a group », *Russian Math. Surveys* **35** (1980), no. 4, p. 180–181, publication en russe : *Uspekhi Mat. Nauk.* **35** (1980), no. 4, p. 199-200.

[58] A.Yu. Ol'shanskii & M.V. Sapir – « Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **96** (2002), p. 43–169.

[59] B. Osofsky – « Problem 6102 », *Amer. Math. Monthly* **85** (1978), p. 504–505.

[60] A.T. Paterson – *Amenability*, Math. Surveys and Monographs, vol. 29, American Mathematical Society, 1988.

[61] V. Pestov – « Amenable representations and dynamics of the unit sphere in an infinite-dimensional Hilbert space », *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), p. 1171–1201.

[62] M. Proust – « Les plaisirs et les jours », in *Jean Santeuil,* précédé de *Les Plaisirs et les jours*, La Pléiade, Gallimard, 1971, éd. originale 1896. Phrase complète : « Les paradoxes d'aujourd'hui sont les préjugés de demain, puisque les plus épais et les plus déplaisants préjugés d'aujourd'hui eurent un instant de nouveauté où la mode leur prêta sa grâce fragile », in *Les regrets rêveries couleur du temps*, V, p. 110.

[63] C. Richter – « Simple paradoxical replications of sets », *Discrete Comput. Geom.* **25** (2001), p. 65–83.

[64] R.M. Robinson – « On the decomposition of spheres », *Fund. Math.* **34** (1947), p. 246–260.

[65] J.M. Rosenblatt – « Invariant measures and growth conditions », *Trans. Amer. Math. Soc.* **193** (1974), p. 33–53.

[66] W.W. Rouse Ballet & H.S.M. Coxeter – *Mathematical recreations and essays*, 13$^{\text{e}}$ éd., Dover, 1987, la première édition date de 1892.

[67] J.-J. Rousseau – *Émile, livre II*, 1762.

[68] C.H. Sah – *Hilbert's third problem : scissors congruence*, Pitman, 1979.

[69] P. Sarnak – *Some applications of modular forms*, Cambridge Univ. Press, 1990.

[70] A. Shields – « Felix Hausdorff : Grundzüge der Mengenlehre », *Math. Intelligencer* **11** (1989), no. 1, p. 6–9, voir aussi *Ibid.* **12** (1990), no. 1, p. 4–5.

[71] W. Sierpinski – *On the congruence of sets and their equivalence by finite decomposition*, Lucknow University Studies, vol. XX, 1954, (Session 1948-49).

[72] K. Stromberg – « The Banach-Tarski paradox », *Amer. Math. Monthly* **86** (1979), p. 151–161.

[73] A. Tarski – « Sur les fonctions additives dans les classes abstraites et leur application au problème de la mesure », *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III,* **22** (1929), p. 114–117, *Collected Papers*, vol. 1, p. 243–248.

[74] ______, « Algebraische Fassung des Massproblems », *Fund. Math.* **31** (1938), p. 47–66, *Collected Papers*, vol. 2, p. 451–472.

[75] J. Tits – « Free Subgroups in Linear Groups », *J. Algebra* **20** (1979), p. 250–270.

[76] G. Vitali – « Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta », Tip. Gamberini e Parmeggiani, Bologna, 1905, *Opere sull'analisi reale et complessa*, Ed. Cremonese, Carteggio, 1984, p. 231–235 ; commentaire p. 7–8.

[77] S. Wagon – *The Banach-Tarski paradox*, Cambridge University Press, 1985.

[78] R.J. Zimmer – « Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random variables », *J. Funct. Anal.* **27** (1978), p. 350–372.

[79] ______, *Ergodic theory and semi-simple groups*, Birkhäuser, 1984.