Préparation aux écrits [1]

Entrée **: Un peu de cours**

Les questions sont ordonnées autour des trois grandes thématiques *Algèbre* / *Analyse* / *Probabilités*. Elles ne sont pas classées par ordre de difficulté ou d'importance. Certaines questions sont marquées d'une * afin d'indiquer au lecteur qu'il s'agit d'un résultat plus original et surtout utile dans les concours les plus exigeants.

Vous connaissez déjà de nombreux résultats dans la liste (non exhaustive) qui suit, cependant les preuves sont souvent mal connues (ou même non connues). Afin de répondre au mieux à l'exigence (croissante) des concours il est donc absolument essentiel de maîtriser non seulement son cours mais aussi la démonstration d'un certain nombre de résultats classiques.

Isolées ces questions ont certes l'air bien futiles mais constituent un bagage suffisant pour résoudre une impressionnante quantités de sujets d'oraux (et notamment dans les concours les plus exigeants...). Vous trouverez dans les parties qui suivent une liste d'exercices dont la résolution découle immédiatement (ou presque...) de l'application judicieuse d'un de ces petits résultats. Bon courage !

Algèbre

1. Démontrer que tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ admet une droite ou un plan stable. En déduire une démonstration du théorème spectral.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Démontrer que $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det A \in \{\pm 1\}$.

3. Démontrer le lemme d'Hadamard : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,
$$|a_{i,i}| > \sum_{1 \leq j \leq n,\, j \neq i} |a_{i,j}|.$$
Alors A est inversible.

4. (*) Déduire de la question précédente le lemme des disques de Gershgörin : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors
$$\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} D(a_{i,i}, r_i)$$
où $r_i = \sum_{1 \leq j \leq n,\, j \neq i} |a_{i,j}|$.
*Indication : Écrire que si $\lambda \in Sp(A)$ alors $A - \lambda I_n$ est non inversible ce qui contredit l'inégalité de **3** pour au moins un des i.*

5. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n$, $\langle AX, X \rangle \geq 0$ (où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$).

6. Démontrer l'existence et l'unicité (*) de la racine carrée sur $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

7. Démontrer l'existence de la décomposition polaire sur $GL_n(\mathbb{R})$ (et aussi l'unicité) et sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Y-a t-il toujours unicité sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

[1] En cas de questions / suggestions sur un exercice ou une correction, il ne faut absolument pas hésiter une seconde et m'écrire à romain.panis@gmail.com !

8. Démontrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (pour l'ouverture, proposer deux méthodes différentes).
Indication 1 : pour la deuxième méthode, penser à la formule $(1-x)^{-1} = \sum_{k\geq 0} x^k$.
Indication 2 : si A est de norme triple < 1 alors $I_n - A$ est inversible d'inverse $\sum_{k\geq 0} A^k$. On a donc obtenu un voisinage de l'identité constitué uniquement de matrices inversibles. Pour obtenir un voisinage de matrices inversibles en tout élément $B \in GL_n(\mathbb{R})$, remarquer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(B-A)^{-1} = (I_n - B^{-1}A)^{-1}B^{-1}$.

9. Démontrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

10. Donner une description complète des éléments de $O_2(\mathbb{R})$.

11. Rappeler et redémontrer la formule de calcul du déterminant de Vandermonde.

12. Démontrer le théorème de Caley-Hamilton (*). Fournir une preuve topologique pour le cas de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Indication : pour la preuve topologique, on pourra commencer par remarquer que le résultat est facile sur l'ensemble des matrices diagonalisables à n valeurs propres distinctes.

13. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$. Montrer que si P est scindé alors P' aussi.

14. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que M est de rang 1 si et seulement si M s'écrit $M = XY$ où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

15. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in E$, $(x, u(x))$ est liée.

16. Déduire de la question précédente que toute matrice de trace nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice de diagonale nulle.
Indication : procéder par récurrence.

17. Déterminer les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ soit dense dans $\mathbb{R}$. Cette condition étant remplie, montrer que $\mathbb{N} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\sin(n))_{n\geq 0}$ [2].

18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{0\}$.

19. Montrer qu'une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux est simultanément diagonalisable.

20. Démontrer la caractérisation du rang d'une matrice triangulaire comme taille maximale d'une matrice extraite carré inversible. En déduire que le rang est une application *semi-continue supérieurement*, ce qui signifie qu'au voisinage d'une matrice de rang r il ne prend que des valeurs $\geq r$.

21. Montrer qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

22. Énoncer et démontrer la formule des relations racines-coefficients.

23. Démontrer qu'une matrice non nulle de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

Un exemple d'application de ce résultat : calculer $\det(J - I_n)$ où J est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

23$^{\text{bis}}$. (*) Y-a t-il plus de dérangements pairs ou impairs dans $\mathfrak{S}_n$?
Indication : Calculer $\sum_{\sigma\in\mathcal{D}_n} \varepsilon(\sigma)$ où $\mathcal{D}_n$ est l'ensemble des dérangements de $\mathfrak{S}_n$.

2. Les plus curieux pourront s'intéresser à la question suivante : quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\sin(p))_{p\in\mathcal{P}}$? La réponse est cependant un peu plus difficile...

24. Soient $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, AX_i, \dots, X_n) = \mathrm{Tr}(A) \det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, X_n).$$

Indication : remarquer que l'application à gauche est n-linéaire alternée donc colinéaire au déterminant. Il suffit de trouver le coefficient de proportionnalité.

Analyse

1. Montrer que det est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\nabla \det = \mathrm{Com}$.

2. Montrer que l'application polynôme caractéristique est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer cependant que l'application polynôme minimale n'est même pas continue (elle est cependant $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Saurez-vous le trouver ? [3]).

3. Démontrer le lemme de Cesàro : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge vers un complexe α, alors

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha.$$

Montrer que la convergence au sens de Cesàro n'implique pas la convergence au sens usuel. Montrer qu'il existe des suites non bornées mais convergentes au sens de Cesàro. Montrer qu'il existe des suites bornées mais non convergentes au sens de Cesàro.

4. Démontrer le *lemme du soleil levant* : de toute suite réelle on peut extraire une sous-suite monotone. En déduire une nouvelle preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass.

5. (*) Démontrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $x > 0$ par $f(x) = e^{-1/x}$ et pour $x \leq 0$ par $f(x) = 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Soient $a < b < c < d$ des réels. Déduire de ce qui précède la construction d'une fonction *plateau* de classe $\mathcal{C}^\infty$ valant 1 sur $[b, c]$ et nulle en dehors de $]a, d[$.

Solution : *Définissons d'abord φ_0 sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_0(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $\varphi_0(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$. L'application du théorème de prolongement $\mathbb{C}^k$ permet de montrer que φ_0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ [4]. Posons pour $x \in \mathbb{R}$,*

$$\varphi_1(x) = \varphi_0(x)\varphi_0(1-x).$$

φ_1 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et est nulle en dehors de $]0, 1[$. Posons enfin pour $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi_2(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} \varphi_2(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t)dt}.$$

φ_2 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et constante égale à 1 sur $[1, +\infty[$.

Soient $a < b < c < d$, nous allons construire une fonction $\varphi_{[b,c],]a,d[}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, constante égale à 1 sur $[b, c]$ et nulle en dehors de $]a, d[$. Posons pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{[b,c],]a,d[}(x) = \varphi_2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\varphi_2\left(\frac{d-x}{d-c}\right).$$

On vérifie qu'une telle définition fournit la fonction désirée.

3. Ce n'est pas une question de cours...
4. Il faut savoir le faire !

5^{bis}. Utiliser la question précédente pour construire une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable partout mais dont la dérivée est discontinue exactement en tout point de $\mathbb{Z}$.
Indication : remarquer que la fonction $x\mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable partout mais que sa dérivée est discontinue uniquement en 0.

6. Démontrer qu'une série entière de rayon de convergence $R>0$ est analytique sur son disque ouvert de convergence *i.e* développable en série entière au voisinage de tout point de son disque ouvert de convergence.

7. Énoncer et démontrer le théorème de Heine.

8. Montrer qu'une fonction convexe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bornée est constante.

9. Soit $\phi:[0,+\infty[\to\mathbb{R}^+$ une fonction continue, intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $[t_0,+\infty[$ où $t_0>0$. Montrer que

$$\sum_{k\geq 1}\beta\phi(\beta k)\underset{\beta\to 0^+}{\longrightarrow}\int_0^{+\infty}\phi(t)\mathrm{d}t.$$

Ce résultat tombé à l'écrit de Centrale (MP Maths 1 2009) et utile dans un oral d'Ulm de la session 2018 (dont l'énoncé et le corrigé se trouvent plus bas) peut servir d'alternative commode à la fameuse comparaison série-intégrale que vous connaissez dans le cas où il n'y a plus monotonie.

10. Démontrer le critère spécial des séries alternés et la majoration du reste d'une série alternée.

11. Donner un développement limité de H_n à la précision $o(1)$.

12. Donner deux preuves (l'une est faisable en première année, l'autre repose sur un puissant théorème vu en seconde année) de l'égalité bien connue

$$\ln 2=\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

13. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cade d'un espace pré-hilbertien réel. Étudier le cas d'égalité.

14. Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1.

15. Énoncer le théorème de convergence dominée (cas discret et continu).

16. Énoncer les trois théorèmes / méthodes de permutation série / intégrale du cours.

17. Démontrer la formule de Cauchy : si $f(z)=\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ est une série entière complexe de rayon de convergence $R>0$, alors pour $0\leq r<R$, pour $n\geq 0$, on a

$$a_nr^n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta.$$

18. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable et intégrable sur $\mathbb{R}$. On suppose que f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et (*) en déduire que f a pour limite 0 en $\pm\infty$.
Indication : appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour démontrer que f est $1/2$-Hölderienne. Pour la seconde partie, raisonner par l'absurde et faire un dessin.

19. Donner un exemple de fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ intégrable mais non bornée.

20. Donner un exemple de forme linéaire non continue.

21. (*) Donner un exemple d'un espace vectoriel normé E et de deux normes N_1 et N_2 sur E tels qu'on ne puisse pas trouver C_1, $C_2 > 0$ vérifiant

$$N_1 \leq C_1 N_2, \text{ ou } \qquad N_2 \leq C_2 N_2.$$

On ne peut donc pas forcément comparer deux normes en dimension infinie.

22. (*) Le théorème d'équivalence des normes en dimension finie est-il vrai sur un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie ?
Indication : la réponse est non. Pour l'observer, considérer la norme sur $\mathbb{Q}^2$ *donnée par, si* $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$, $\|(x, y)\| := |x + \sqrt{2}y|$.

23. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite sous-additive, c'est à dire vérifiant pour $n, m \geq 0$,

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m.$$

Montrer que

$$\frac{a_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \inf\left\{\frac{a_k}{k}\ ,\ k \geq 1\right\}.$$

Solution : Notons $\alpha = \inf\left\{\frac{u_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. *Supposons d'abord* $\alpha \in \mathbb{R}$. *On remarque que si* $n > m$ *sont deux entiers et si* $n = am + b$ *est la division euclidienne de* n *par* m *alors*

$$u_n \leq a u_m + u_b.$$

Soit $\varepsilon > 0$, *il existe* $N > 0$ *tel que*

$$\alpha \leq \frac{u_N}{N} \leq \alpha + \varepsilon.$$

Alors, si $n \geq N$, *on écrit* $n = aN + b$ *et par la remarque précédente*

$$\alpha \leq \frac{u_n}{n} \leq a\frac{u_N}{n} + \frac{u_b}{n} \leq \frac{aN}{n}\frac{u_N}{N} + \frac{\max_{i=0,\ldots,N} |u_i|}{n} \leq \alpha + \varepsilon + \frac{M}{n}$$

où l'on a noté $M = \max_{i=0,\ldots,N} |u_i|$. *En particulier si* n *assez grand,*

$$\alpha \leq \frac{u_n}{n} \leq 2\varepsilon + \alpha$$

d'où le résultat. Dans le cas où $\alpha = -\infty$ *on procède pareillement en partant d'un réel* $A < 0$ *quelconque et d'un* N *tel que* $\frac{u_N}{N} \leq A$.

24. Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{t^2/2} \geq \cosh(t).$$

Indication : interdiction de faire une étude de fonction.

25. Démontrer le lemme de Gronwall : Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $g \geq 0$ continues et $C \in \mathbb{R}^+$ tels que pour tout $t \in [a, b]$,

$$f(t) \leq C + \int_a^t g(s)f(s)\mathrm{d}s.$$

Montrer que pour tout $t \in [a, b]$,

$$f(t) \leq C \exp\left(\int_a^t g(s)\mathrm{d}s\right).$$

Indication : trouver une inéquation différentielle vérifiée par $w(t) := C + \int_a^t g(s)f(s)\mathrm{d}s$ *et la résoudre.*

Probabilités

1. Démontrer l'inégalité de Markov, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la loi faible des grands nombres.
2. Démontrer le lemme de Borel-Cantelli : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'évènements. On suppose que
$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) < \infty,$$
montrer que
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = 0.$$
On suppose maintenant les évènements indépendants et que
$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) = \infty,$$
montrer que
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = 1.$$
Application : loi forte des grands nombres (voir exercices ci-dessous).
3. Donner une démonstration probabiliste du théorème de Weierstrass. On rappelle la méthode : si $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, on cherche à l'approximer par la famille des polynômes de Bernstein : si $n \geq 1$,
$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
On se donne $x \in [0,1]$ et $(X_i)_{i\geq 1}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre x. On introduit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On calcule ensuite l'espérance de la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$, on trouve qu'elle vaut exactement $B_n(f)(x)$. On utilise enfin le fait que f est uniformément continue sur $[0,1]$ pour contrôler la quantité
$$\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] - f(x)\right|$$
par une quantité ne dépendant pas de x (on utilisera aussi l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

Solution : *On conserve les notations ci-dessus. On sait que S_n suit une loi binomiale de paramètre (n, x) (cf cours, il faut savoir le démontrer et le plus rapide est sans doute de passer par les fonctions génératrices). Par transfert,*
$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n = k) f\left(\frac{k}{n}\right) = B_n(f)(x).$$
Par continuité de f sur le compact $[0,1]$ et par le théorème de Heine, f y est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0,1]$, $|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Alors,
$$\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] - f(x)\right| \leq \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\{|\frac{S_n}{n} - x| \leq \eta\}}\right] + \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\{|\frac{S_n}{n} - x| > \eta\}}\right].$$

Or on a

$$\mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\mathbb{1}_{\{|\frac{S_n}{n}-x|\leq\eta\}}\right]\leq\varepsilon$$

et

$$\mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\mathbb{1}_{\{|\frac{S_n}{n}-x|>\eta\}}\right]\leq 2\|f\|_\infty\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\eta\right)\leq\frac{2\|f\|_\infty nx(1-x)}{n^2\eta^2}\leq\frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}$$

où la dernière inégalité provient de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Il suffit alors de choisir n suffisamment grand pour obtenir le résultat voulu.

4. Démontrer que si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes, on a l'égalité suivante :

$$G_{X+Y}=G_X\cdot G_Y$$

où l'on désigne par G la fonction génératrice.

5. Montrer qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1. Montrer que X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1. Dans chaque cas, exprimer alors l'espérance (resp. la variance) en fonction de $G'_X(1)$ (resp. $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$).

6. Calculer espérance, variance, fonction génératrice, transformée de Laplace[5] (*) de la variable aléatoire X lorsque X suit une loi de Bernoulli de paramètre p (resp. Binomiale de paramètre (n,p), Poisson de paramètre λ, géométrique de paramètre p).

7. Soit X une variable aléatoire réelle à support fini. Montrer que les moments de X caractérisent entièrement la loi de X[6].

8. (Inégalité de Paley-Zygmund) Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On suppose que X admet un moment d'ordre 2. Soit $\lambda\in]0,1[$, montrer que

$$\mathbb{P}(X\geq\lambda\mathbb{E}[X])\geq(1-\lambda)^2\frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X\geq\lambda\mathbb{E}[X]}]$.

5. On rappelle que la transformée de Laplace d'une variable aléatoire positive Z est définie comme l'application $\mathcal{L}_Z : s\in\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{E}[e^{-sZ}]$.
6. Ce n'est plus vrai dans le cas général mais les contre-exemples sont inaccessibles en classe préparatoire.

Plat : Quelques exercices

Les exercices qui suivent ne sont pas classés par thématique ou par ordre d'importance. Il s'agit simplement de **bons** exercices en ce sens que leur résolution contient une technique intéressante et reprend des points essentiels du cours.

1. Dénombrer le carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que si $p \in \mathcal{P}$, $p \neq 2$, -1 est un carré modulo p si et seulement si $p \equiv 1[4]$.
2. (*) Soit $n \geq 1$. On note $\Omega_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X]\,,\, P \text{ scindé à racines simple de degré}\, n\}$. Montrer que Ω_n est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\overline{\Omega}_n$.
3. (*) Soit $n \geq 1$. On note $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,,\, \exists p \geq 1\; M^p = I_n\}$. Déterminer $\overline{\mathcal{A}}$[7]. Déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathcal{A}$. (**)
4. On considère des graphes sur $\mathbb{Z}^d$ où $d \geq 2$. On leur impose la condition suivante : si une arête existe entre deux points $x, y \in \mathbb{Z}^d$, alors $d(x, y) = 1$. Montrer que si l'on considère un tel graphe G, alors : G admet un chemin infini partant de l'origine si et seulement si il admet des chemins arbitrairement grands partant de l'origine.
5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables. On suppose $\exp(A) = \exp(B)$, montrer que $A = B$. *Indication : on montre que A et B commutent de sorte que ces matrices sont co-diagonalisables et ont le même spectre donc sont égales. Pour cela, on remarque que B commute à* $\exp(B)$ *donc à* $\exp(A)$. *Or en utilisant une interpolation de Lagrange on peut montrer que A est un polynôme en* $\exp(A)$.
6. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continue. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \int_{-1}^{1} f(t)t^k dt$ et pour $n \geq 3$, on pose
$$a_n = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t + \ln n} dt.$$
   - **a.** Montrer que $a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k I_k}{(\ln n)^{k+1}}$.
   - **b.** On suppose qu'il existe $p \geq 0$ tel que $I_0 = \ldots = I_{p-1} = 0$ et $I_p \neq 0$. Trouver un équivalent de a_n.
   - **c.** Trouver une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\sum a_n$ converge.
7.
   - **a.** Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. *Indication : montrer que son complémentaire est fermé en utilisant la caractérisation de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ en terme de positivité stricte des $\langle X, AX\rangle$ pour $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*
   - **b.** Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$.
   - **c.** Montrer que $f : A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto A^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $df(A)$ est injective.
   - **d.** Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto \sqrt{A}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

     Attention : cette question est infaisable sans le célèbre théorème d'inversion globale. Il dit qu'une application $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^\infty$ bijective et dont la différentielle est inversible en tout point de $\mathbb{R}^n$ est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme.
   - **e.** En utilisant ce qui précède, démontrer que l'application suivante est de classe $\mathcal{C}^\infty$:
$$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2 A} dt.$$
     Indication : si $n = 1$, vous savez calculer cette intégrale non ?

7. Grand classique de l'oral de Polytechnique.

8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

b. Montrer qu'il existe $U, V \in O_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale à coefficients positifs tels que $A = UDV$. *Cette décomposition est plus connue sous le nom de décomposition en valeurs singulières.*
Indication : commencer par supposer $A \in GL_n(\mathbb{R})$ puis utiliser un argument de densité.

c. En déduire la décomposition polaire.

d. Réciproquement, déduire de la décomposition polaire la décomposition en valeurs singulières.

e. Montrer que A est somme d'au plus n matrices de rang 1.

9. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a. Étudier la convergence de la suite de terme général

$$\int_{[0,1]^n} f\left((x_1 \dots x_n)^{1/n}\right) dx_1 \dots dx_n.$$

Indication : lorsque f est un polynôme, cette limite est facile à calculer.

b. (**) Montrer que

$$\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f\left(\frac{1}{2}\right).$$

10. Soit u un endomorphisme *cyclique* de E, $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$, c'est à dire tel qu'il existe un vecteur non nul $x \in E$ vérifiant $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ libre. Démontrer que le commutant $\mathcal{C}[u]$ de u vérifie $\mathcal{C}[u] = \mathbb{K}[u]$.
Application : $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\Delta : P \mapsto P(X + 1) - P(X)$. Déterminer le commutant de Δ (Oral X 2016).

11. Soient $X_1, \dots, X_n, \dots$ des variables aléatoires discrètes indépendantes suivant une même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

a. Calculer $\mathbb{E}[e^{sS_n}]$ pour $s \in \mathbb{R}$.

b. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $K, C > 0$ dépendants de ε et λ uniquement tels que

$$\mathbb{P}(S_n \geq n(\lambda + \varepsilon)) \leq Ke^{-Cn}.$$

c. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\tilde{K}$,$\tilde{C} > 0$ dépendants de ε et λ uniquement tels que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| \geq \varepsilon\right) \leq \tilde{K}e^{-\tilde{C}n}.$$

d. (*) En déduire que $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers λ.

La notion de convergence presque sûre n'est pas au programme mais la connaissance de sa définition peut être utile : on dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ converge vers une variable aléatoire X s'il existe un événement A presque sûr tel que pour tout $\omega \in A$,

$$X_n(\omega) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X(\omega).$$

Indication : utiliser le lemme de Borel-Cantelli.

Remarque. Le résultat de la dernière question est un résultat de "loi forte". Il s'agit en fait de la preuve de la loi forte des grand nombres dans le cas d'une somme de variables de Poisson. A l'oral, j'ai pu aussi voir le même exercice avec par exemple des sommes de variables de Bernoulli ou de Rademacher. Le terme "forte" provient du fait que la convergence dans ce résultat est plus forte que dans la loi faible des grands nombres (dans lequel la convergence est seulement une convergence en probabilité).

12. **a.** (i) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}.$$

(ii) Soit X une variable aléatoire discrète telle que $|X| \leq 1$ et $\mathbb{E}[X] = 0$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire e^{tX} est d'espérance finie et que

$$\mathbb{E}[e^{tX}] \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$

b. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires centrées, indépendantes telles que $|X_i| \leq a_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ où $a_i > 0$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

(i) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[e^{tS_n}] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).$$

(ii) Montrer que si $t, \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).$$

(iii) En déduire

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2\exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right).$$

c. On considère enfin une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Trouver une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon_n\right) \leq \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

13. (*) (*Lemme de Dedekind*) Soient M un groupe, F un corps, $(\sigma_i)_{i\in I}$ une famille de morphismes de $M \to (F^*, \times)$. Montrer que $(\sigma_i)_{i\in I}$ est libre dans le F-espace vectoriel $\mathcal{F}(M, F)$.

Solution : Nous procédons par récurrence sur la taille $n \geq 1$ d'une sous-famille finie de morphismes. Le cas $n = 1$ est clair. Supposons donc $n \geq 2$ et la liberté assurée pour toute famille de cardinal $n - 1$. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ des morphismes distincts comme ci-dessus. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i = 0.$$

Montrons que les λ_i sont nuls. Observons que pour tout $g, g' \in M$,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i(gg') = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i(g)\sigma_i(g') = 0$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_n(g)\sigma_i(g') = 0.$$

En soustrayant ces deux égalités on obtient que pour tout $g \in M$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(\sigma_i(g) - \sigma_n(g))\sigma_i = 0$$

et en appliquant l'hypothèse de récurrence on obtient que pour tout $1 \leq i \leq n-1$, pour tout $g \in M$,

$$\lambda_i(\sigma_i(g) - \sigma_n(g)) = 0.$$

On peut choisir (les morphismes sont distincts) $g \in M$ tel que $\sigma_1(g) \neq \sigma_n(g)$. On obtient alors $\lambda_1 = 0$. En appliquant à nouveau l'hypothèse de récurrence on obtient le résultat voulu.

14. (*) Soient $1 \leq n \leq d$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$. On suppose qu'il existe $z_0, \dots, z_n \in \mathbb{U}_{d+1}$ deux à deux distincts tels que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$P(z_i) \leq \frac{1}{2^d}.$$

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1 \Rightarrow |P(z)| \leq 1$.
Indication : utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange.

15. Un nombre complexe $\alpha \in \mathbb{C}$ est dit *algébrique* sur $\mathbb{Q}$ s'il existe $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

a. Montrer que l'ensemble $\mathbb{A}$ des nombres réels algébriques sur $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

b. (i) Soit $a \in \mathbb{R}$ algébrique sur $\mathbb{Q}$, racine de $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire avec $\deg P = n > 0$. On suppose $a \notin \mathbb{Q}$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{\alpha}{q^n}.$$

(ii) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec $q \geq 2$ tel que

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^k}.$$

Montrer que a est transcendant. Un tel nombre est appelé *nombre de Liouville.*

(iii) Montrer que $a = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}}$ est un nombre de Liouville.

16. (*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de trace nulle. Montrer qu'il existe $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = BC - CB = [B, C]$. *Indication : utiliser la question* **16** *de la partie Algèbre ci-dessus et observer que le résultat est préservé par conjugaison ce qui permet de se ramener au cas où A est de diagonale nulle. Fixer ensuite $B = \mathrm{Diag}(b_1, \dots, b_n)$ et regarder l'application $\mathrm{ad}_B : M \mapsto [M, B]$. Cette application est linéaire, on veut montrer que A est dans son image. Il suffit de montrer que pour un bon choix de B on a $\dim(\ker(\mathrm{ad}_B)) = n$.*

17. Soient $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps commutatifs de caractéristique différente de 2.

a. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{K})$ tel que pour toute matrice A de G, $A^2 = I_n$. Montrer que $|G| \leq 2^n$.

b. On suppose qu'il existe un morphisme injectif du groupe $GL_n(\mathbb{K})$ dans le groupe $GL_m(\mathbb{L})$. Montrer que $n \leq m$.

c. Existe-t-il un isomorphisme entre $GL_n(\mathbb{Q})$ et $GL_m(\mathbb{R})$? Entre $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_m(\mathbb{C})$?

18. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

a. Montrer que les suites $(\mathrm{Im} u^k)_{k\geq 0}$ et $(\ker u^k)_{k\geq 0}$ sont d'abord strictement monotones pour l'inclusion puis constantes à partir d'un même rang $p \leq n$.

b. Montrer que la suite $(\ker u^k)_{k\geq 0}$ s'essoufle au sens où $(\dim \ker u^{k+1} - \dim \ker u^k)_{k\geq 0}$ décroît.

c. Montrer que $E = \mathrm{Im} u^p \oplus \ker u^p$.

d. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où N est nilpotente et C inversible. Il s'agit de la *décomposition de Fitting* qui est absolument essentielle lorsque l'on cherche à dénombrer les nilpotents sur un corps fini.

19. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$. Que peut-on dire d'un endomorphisme u de E laissant stable tous les sous-espaces de dimension k de E ?

Solution : on se rappelle qu'un endomorphisme stabilisant toute droite est une homothétie. Montrons que c'est aussi le cas de tout endomorphisme stabilisant tout espace de dimension $k \geq 2$. Soit u un tel endomorphisme. On montre que u stabilise tout sous-espace de dimension $k-1$ ce qui permet de conclure par récurrence. Prenons H un sous-espace de dimension $k-1$ de E. H est de codimension au moins 2 donc on peut trouver deux vecteurs non nuls et non colinéaires x, y tels que $x \notin H$, $y \notin H$. Alors u stabilise $H \oplus \mathbb{K}x$ et $H \oplus \mathbb{K}y$ donc stabilise l'intersection c'est à dire H.

20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{Tr}(A^k) = 0$. Montrer que les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1.

Indication : raisonner par récurrence mais sur un résultat plus fort en montrer que, pour tout $n \geq 1$, pour tout $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}^*$, pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distincts dans $\mathbb{C}$, si

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

alors pour tout i, $|\lambda_i| < 1$.

Remarque. Une jolie application de ce résultat : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que le rayon de convergence de $\sum \mathrm{Tr}(A^n) z^n$ est exactement $1/\rho(A)$.

21. a. Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs d'un espace pré-hilbertien réel E.

(i) Montrer que la matrice $A = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique positive et de même rang que la famille $(x_1, \dots, x_n)$. A est la matrice de Gram de la famille $(x_1, \dots, x_n)$, on la note $G(x_1, \dots, x_n)$.

(ii) On suppose $(x_1, \dots, x_n)$ libre et on pose $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Soit $x \in E$, montrer que

$$d(x, F)^2 = \frac{\det G(x, x_1, \dots, x_n)}{\det G(x_1, \dots, x_n)}.$$

(*iii*) On suppose de plus F orienté. Montrer que

$$\det G(x_1,\ldots,x_n) = [x_1,\ldots,x_n]^2.$$

b. Soit $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer que M est la matrice de Gram d'une famille $(v_1,\ldots,v_n)$.

22. Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\det A \le \prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Indication : commencer par écrire $A = ODO^{-1}$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ puis utiliser l'inégalité de Jensen.

23. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\rho(A) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$ le rayon spectral de A.

a. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(*i*) Il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$ telle que $\|\!|A|\!\| < 1$ avec $\|\!|\cdot|\!\|$ norme triple subordonnée à $\|\cdot\|$.

(*ii*) $\rho(A) < 1$.

(*iii*) $(A^k)_{k\ge 0}$ converge vers 0.

Indication : faire (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i). La dernière implication est de très loin la plus dure. Commencer par supposer que A est triangulaire supérieure et la conjuguer avec des puissances de la matrice $D = \mathrm{Diag}(p,p^2,\ldots,p^n)$ où $p > 1$. On remarque que les coefficients non diagonaux de D^kAD^{-k} sont les $a_{i,j}p^{k(i-j)}$ où $i < j$ et donc sont rendus aussi petits que l'on souhaite pourvu que k est assez grand. Construire ensuite une norme sur $\mathbb{C}^n$ (simple) qui a pour norme subordonnée

$$\|\!|A|\!\| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|p^{k(i-j)} < \rho(A) + \varepsilon$$

si l'on a choisit k assez grand.

b. Montrer que $\sum A^k$ converge si et seulement si $\rho(A) < 1$.

c. Soit N une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$N(A^k)^{1/k} \underset{k\to+\infty}{\to} \rho(A).$$

Indication : commencer par utiliser la norme construite au **a** *puis utiliser l'équivalence des normes en dimension finie.*

24. Pour $x > 1$, on pose

$$f(x) = \int_1^{+\infty} e^{it^x}\,dt.$$

a. Montrer que f est bien définie et étudier sa continuité. *Indication : faire un changement de variable puis une intégration par parties.*

b. (*) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$. On rappelle la valeur de l'intégrale de Dirichlet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

25. *(Théorème de Korovkin)* (*) Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est un opérateur positif (et on note $u \geq 0$) si pour tout $f \in E$,

$$f \geq 0 \Rightarrow u(f) \geq 0.$$

a. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose u positif, montrer que u est continu.

b. Soit $f \in E$. On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + C(x-y)^2.$$

c. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$ on pose $e_k(x) = x^k$. On a $e_k \in E$. Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{L}(E)^{\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs positifs. On suppose que pour $k = 0,1,2$, $(u_n(e_k))_n$ converge uniformément vers e_k sur $[0,1]$. Montrer que pour tout $f \in E$, $(u_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

26. (*) Quelles sont les fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limites uniformes sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes strictement croissants ? *Indication : remarquer que les fonctions candidates sont les fonctions croissantes, se ramener à l'intervalle* $[0,1$ *puis utiliser les polynômes de Bernstein introduits dans la preuve du théorème de Weierstrass.*

27. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions c-lipschitziennes de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction f. Montrer que la convergence est uniforme. *Indication : se ramener à la convergence sur un nombre fini de points.*

28. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes sur $[a,b]$ qui converge simplement vers f. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact de $]a,b[$. *Indication : utiliser l'exercice précédent.*

29. (Exercice très instructif) Soient $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ intégrable et $u_0 \in \mathbb{R}^n$. On considère u la solution sur $\mathbb{R}^+$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) &= A(t)u(t) \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

a. Montrer que u est bornée sur $\mathbb{R}^+$, puis que u admet une limite finie en $+\infty$. On note $\varphi(u_0)$ cette limite. *Indication : écrire*

$$u(t) = \int_0^t u'(s)\mathrm{d}s + u_0$$

et montrer avec le lemme de Gronwall que l'intégrale converge.

b. Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$. *Indication : si* $\varphi(u_0) = 0$*, écrire* $u(t) = -\int_t^{+\infty} A(s)u(s)\mathrm{d}s$ *et appliquer à nouveau le lemme de Gronwall.*

c. Calculer $\det \varphi$. *Indication : Notons* $X_1, \ldots, X_n$ *les solution de* $u' = Au$ *associées respectivement aux conditions initiales* $u(0) = e_1, \ldots, u(0) = e_n$ *où* $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^n$*. Et observer (en utilisant le* **24** *de la partie algèbre) que la fonction* $w(t) = \det(X_1(t), \ldots, X_n(t))$ *vérifie l'équation différentielle*

$$w'(t) = \mathrm{Tr}(A(t))w(t).$$

On trouve alors

$$\det \varphi = w(\infty) = \exp\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{Tr}(A(s))\mathrm{d}s\right).$$

30. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la matrice $M_n = (X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où les X_{ij} sont des variables de Rademacher indépendantes.

a. Calculer $\mathbb{E}[\det M_n]$ et $V(\det M_n)$.

b. Que dire des lois $\det M_n$ et $-\det M_n$?

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $Y = {}^tAA$. Montrer que

$$\det Y \leq \prod_{i=1}^{n} Y_{i,i}.$$

d. Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que $P(|\det M_n| = n^{n/2}) = O(a^n)$.

e. Soit $\varepsilon > 0$. Que dire de $\mathbb{P}(|\det M_n| \geq n^{n/2-\varepsilon})$?

***Dessert* : Un peu de challenge...**

Les exercices qui suivent sont super-durs et pourraient pour certains constituer l'objet d'un sujet entier aux concours. Je les mets pour satisfaire votre curiosité, mais mieux vaut les réserver pour la préparation à l'oral.

1. Déterminer les points de continuité de l'application polynôme minimal sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que cette application est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Démontrer que le rayon spectral est continu sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. (*Chaînes de Markov et temps de mélange*) On considère n et d deux entiers vérifiant $2 \leq d \leq n$.

a. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$. Montrer que le spectre de A est inclus dans $[-1, 1]$.

On note $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de A. On admet que $\lambda_2 \leq 1 - 2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\mu_A$ où

$$\mu_A = \min\left\{\sum_{i\in I, j\notin I} a_{ij},\ I \subset [\![1, n]\!] \text{ et } 0 < |I| < n\right\}.$$

b. Soit Γ un graphe connexe à n sommets. De chaque sommet S partent exactement d arêtes qui vont vers d sommets distincts (on n'exclut pas qu'une des arêtes revienne à S). Une particule se déplace d'un sommet à l'autre aux instants successifs $k = 0, 1, \ldots$ selon la loi suivante : Si à l'instant k la particule est en S, elle reste en S avec une probabilité $1/2$ et elle emprunte une des d arêtes issue de S avec la probabilité $1/(2d)$. Les choix s'effectuent en toute indépendance mutuelle. Si S et T sont des sommets et $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{P}_k(S, T)$ la probabilité pour que la particule étant en S à l'instant 0 soit en T à l'instant k. Étudier la convergence de la suite $(\mathbb{P}_k(S, T))_{k\in\mathbb{N}}$. On pourra utiliser le résultat d'algèbre linéaire sur les disques de Gershgörin.

c. Pour $\varepsilon > 0$, on note

$$I_{S,T}(\varepsilon) = \min\left\{k \in \mathbb{N}\,,\ \frac{1-\varepsilon}{n} \leq \mathbb{P}_k(S, T) \leq \frac{1+\varepsilon}{n}\right\}.$$

Montrer que $I_{S,T}(\varepsilon) = O\left(n^2 d \ln\left(\frac{n}{\varepsilon}\right)\right)$.

4. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel qu'il existe $k \in [0, 2[$ tel que

$$\forall M \in G,\ |\!|\!| M - I_n |\!|\!| \leq k$$

où $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ est la norme triple associée à la norme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $M \in G$, $M^q = I_n$.

5. Soit [8] V un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $f \in V$, $\exists u \in [0, 1]$ tel que $f(u) > 0$. Montrer qu'il existe un polynôme réel, strictement positif sur $[0, 1]$ tel que pour tout $f \in V$,

$$\int_0^1 f(x)P(x)dx = 0.$$

8. Probablement l'un des exercices les plus difficiles jamais donné à l'oral. Pour les curieux un corrigé se trouve dans la rubrique question / réponse du numéro 129-1 de la RMS.

Digestif : Des petits sujets

Vous trouverez dans la liste qui suit une compilation (très personnelle) de sujets de concours intéressants, classés par thématique. Je précise d'avance que certains de ces sujets intéresseront plutôt les candidats au concours X-ENS, ces sujets apparaissent en gras dans la liste qui suit. La liste est volontairement courte : vos révisions doivent se concentrer sur ce que vous avez fait en cours et en TD cette année, faire des sujets supplémentaires c'est éventuellement pour vous entraîner à composer en conditions de concours mais il est inenvisageable de construire un programme de révision comportant trop de sujets de révisions.

- **Probabilités** : Mines-ponts MP 2015 Maths 2[9], **X MP 2016 Maths B**, Centrale PSI 2015 Maths 2, ENS MP 2015 Maths C (la dernière partie modulo une question en rapport avec ce qui précède).
- **Calcul différentiel** : X MP 2010 Maths 1, **ENS MP Cachan-Lyon 2009**[10].
- **Analyse** : ENS MP 2017 Maths C (les deux premières parties), **X MP 2017 Maths B**[11], Mines-ponts MP 2016 Maths 2.
- **Groupes**[12] : **ENS 2010 Épreuve de 6h**.
- **Algèbre linéaire** : Mines-ponts MP 2015 Maths 1, Mines-ponts MP 2011 Maths 1

Plus généralement si vous êtes intéressés par un concours en particulier, il ne faut pas hésiter à aller parcourir les annales des dernières années pour voir un peu ce qui tombe. Faire tous les sujets est inutile mais mieux vaut savoir un peu ce qui vous attend.

Remarque. Cette liste n'est pas à jour. De manière générale il est recommandé de jeter un coup d'œil aux sujets des 2-3 années précédentes dans les concours qui nous intéressent (sans forcément les faire, juste dans la perspective de voir quels sujets sont redondants, de quelle longueur sont les sujets, etc).

9. On y trouve aussi beaucoup de topologie. Ce sujet est vraiment excellent pour réviser.
10. Épreuve excessivement difficile, le pire qu'il puisse y avoir en calcul différentiel je pense.
11. Il peut être intéressant de regarder cette épreuve si l'X vous intéresse beaucoup : l'épreuve de Maths B spécifique à l'X est toujours de ce format, c'est à dire interminable et très très calculatoire.
12. Exclusivement pour ceux qui passent X-ENS, il y a bien un jour où ça recommencera à tomber...

Petit bisou d'au revoir : Des exercices corrigés

Évidemment ce polycopié est long et difficile à parcourir en profondeur avec la quantité de révisions qui vous attend... J'ajoute donc dans cette section une série de corrigés (personnels donc évidement pleins d'erreurs !) que je trouve intéressants. Ces exercices sont pour la plupart assez difficiles et intéresseront plutôt les candidats au concours X/ENS.

Exercice. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.*

a. *Comparer le rang de M dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{F}_p$ avec p premier.*

b. *Existe-t-il toujours p premier tel que $rg_{\mathbb{Q}}(M) = rg_{\mathbb{F}_p}(M)$?*

Solution.

a. D'après le cours, le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K}$ est un corps, est exactement la taille maximale d'une matrice extraite de A inversible.

En particulier, ici $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et comme le déterminant d'une matrice carrée extraite de M est le même dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; on en déduit qu'une matrice carrée extraite de M est inversible sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si elle est inversible sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est inversible sur $\mathbb{C}$. On a donc obtenu que le rang est invariant par extension de corps.
Si maintenant p premier, on commence par remarquer que si une matrice carrée extraite de M a son déterminant dans $\mathbb{F}_p$ non nul, alors il est non nul dans $\mathbb{Q}$ et cette remarque donne

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Q}}(M) \geq \mathrm{rg}_{\mathbb{F}_p}(M).$$

L'autre inégalité est fausse. Pour s'en convaincre il suffit par exemple de considérer la matrice $M = pI_n$: M est de rang n sur $\mathbb{Q}$ mais nulle une fois réduite dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$.

b. La réponse est oui. Comme nous l'avons vu dans la question précédente, il suffit de montrer que le déterminant d'une matrice carrée extraite inversible de M de taille maximale est non nul dans au moins un des $\mathbb{F}_p$. Or ce déterminant est entier (car M est à coefficients entiers et par la formule polynomiale du déterminant) ; donc si on le note D, dire que D est nul dans tous les $\mathbb{F}_p$ signifie que D est divisible par tous les nombres premiers : ceci n'est possible que si D est nul puisqu'il existe une infinité de nombres premiers, or cela est absurde car $D \neq 0$. Donc il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Q}}(M) = \mathrm{rg}_{\mathbb{F}_p}(M).$$

On a même montré que l'ensemble des p premiers tels que

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Q}}(M) > \mathrm{rg}_{\mathbb{F}_p}(M)$$

est fini.

Exercice. *Déterminer les matrices de $GL_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec tous les éléments de leur classe de conjugaison.*

Solution. On va démontrer que les matrices qui conviennent sont les matrices d'homothétie non nulles. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ une matrice qui commute avec tous les éléments de sa classe de conjugaison. On sait que A possède une valeur propre (non nulle) λ et il existe $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$AX = \lambda X.$$

Observons que si $P \in GL_n(\mathbb{C})$, alors PX est vecteur propre pour λ de PAP^{-1}. Plus exactement, en notant $E_\lambda(A)$ l'espace propre de A associé à la valeur propre λ, on a que

$$E_\lambda(PAP^{-1}) = PE_\lambda(A).$$

Comme A et PAP^{-1} commutent, on en déduit que A stabilise $PE_\lambda(A)$. Ceci est vrai pour tout $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Si $k = \dim E_\lambda(A)$, alors on vient de démontrer que A stabilise tout sous-espace de dimension k de $\mathbb{C}^n$. En effet, ceci découle du fait que lorsque P parcourt $GL_n(\mathbb{C})$, $PE_\lambda(A)$ parcourt tous les sous-espaces de dimension k de $\mathbb{C}^n$. On conclut alors en utilisant le résultat classique suivant :

Lemme. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$. Soit u un endomorphisme de E laissant stable tous les sous-espaces de dimension k de E. Alors u est une homothétie.*

Preuve du lemme. On se rappelle qu'un endomorphisme stabilisant toute droite est une homothétie. Montrons que c'est aussi le cas de tout endomorphisme stabilisant tout espace de dimension $n-1 \geq k \geq 2$. On montre que u stabilise tout sous-espace de dimension $k-1$ ce qui permet de conclure par récurrence. Prenons H un sous-espace de dimension $k-1$ de E. Le sous-espace H est de codimension au moins 2 donc on peut trouver deux vecteurs non nuls et non colinéaires x, y tels que $x \notin H$, $y \notin H$. Alors u stabilise $H \oplus \mathbb{K}x$ et $H \oplus \mathbb{K}y$ donc stabilise l'intersection c'est à dire H.

Donc si $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ on obtient que A est une matrice d'homothétie en appliquant le lemme. Sinon $k = n$ et on obtient de la même manière que $A = \lambda I_n$.

Exercice. *On considère des voitures de longueur 2 et un parc de stationnement à n places symbolisé par $\{1,\dots,n\}$. A chaque fois qu'une voiture arrive, on tire au hasard un nombre entre 1 et $n-1$ et la voiture se gare (si possible) sur les emplacements i, $i+1$. On continue jusqu'à ce qu'aucune voiture ne puisse se garer. Donner une estimation asymptotique du nombre d'emplacements libres à l'issue de ce processus quand n tend vers $+\infty$.*

Solution. Initialement le parking est vide. On note $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoire i.i.d de loi uniforme sur $\{1,\dots,n-1\}$ symbolisant la place à laquelle la k-ème voiture essaye de se garer : si la voiture ne peut pas se garer à la place $i = X_k(\omega)$ (c'est à dire si i ou $i+1$ est occupé), alors elle part sans se garer. On note N_n la variable aléatoire à valeurs dans $\{1,\dots,n\}$ donnant le nombre de cases vides à la fin du processus. Notre objectif est d'estimer $\alpha_n := \mathbb{E}[N_n]$.

On a alors l'idée de conditionner par rapport à la place choisie par la première voiture. En utilisant la formule de l'espérance conditionnelle, on obtient si $n \geq 2$,

$$\mathbb{E}[N_n] = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{E}[N_n|X_1 = i].$$

En remarquant que $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = 1$, on écrit

$$\mathbb{E}[N_n|X_1 = i] = \alpha_{i-1} + \alpha_{n-i-1}.$$

En effet, cette relation traduit simplement le fait qu'après avoir placé la première voiture en i dans le parking, on subdivise le parking initial en deux parkings plus petits de tailles respectives $i-1$ et $n-i-1$. Comme les arrivées des voitures sont indépendantes, tout se passe comme si on répétait le processus sur deux systèmes plus petits, ce qui donne la relation voulue. En substituant dans la formule de l'espérance conditionnelle on obtient pour $n \geq 2$

$$(n-1)\alpha_n = \sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_{i-1} + \alpha_{n-i-1}) = 2\sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i.$$

Introduisons alors la série génératrice des α_i,

$$f(t) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n t^n$$

qui est bien définie pour $|t| < 1$ puisque $\alpha_n \leq n$ pour tout $n \geq 0$. La relation de récurrence sur $(\alpha_i)_{i\geq 0}$ permet d'écrire pour t convenable,

$$f(t) = t + 2tg(t)$$

où

$$g(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right) t^{n+1}.$$

Ainsi, on obtient en dérivant,

$$g'(t) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right) t^n = \frac{f(t)}{1-t}.$$

Et finalement en utilisant l'expression de f en fonction de g, g est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle

$$g'(t) - \frac{2t}{1-t}g(t) = \frac{t}{1-t}.$$

Comme $g(0) = 0$ et $\int_0^t \frac{s}{1-s}\mathrm{d}s = -s - \ln(s)$, on en déduit pour $t \in]-1, 1[$,

$$g(t) = \frac{e^{-2t}}{(1-t)^2} \int_0^t s(1-s)e^{2s}\mathrm{d}s.$$

On calcule alors cette dernière intégrale par intégration par parties et on obtient

$$\int_0^t s(1-s)e^{2s}\mathrm{d}s = \frac{1}{2}(-e^{2t}(1-t)^2 + 1)$$

puis

$$g(t) = \left(\frac{e^{-2t}}{(1-t)^2} - 1\right)\frac{1}{2}.$$

En utilisant à nouveau la relation entre f et g, on obtient

$$f(t) = t + 2tg(t) = \frac{te^{-2t}}{(1-t)^2}.$$

Remarquons enfin que pour $|t| < 1$,

$$\frac{t}{(1-t)^2} = \sum_{k\geq 0} kt^k$$

de sorte qu'un produit de Cauchy donne finalement

$$f(t) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n t^n = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} (n-k)\frac{(-1)^k 2^k}{k!}\right) t^n.$$

En utilisant l'unicité des coefficients dans le développement en série entière de f, on aboutit finalement à

$$\mathbb{E}[N_n] = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\frac{(-1)^k 2^k}{k!}$$

de sorte que

$$\mathbb{E}[N_n] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e^2}.$$

Remarque. La dernière formule donne même

$$\mathbb{E}[N_n] \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{e^2} - \frac{2}{e^2} + o(1).$$

Exercice.

a. *Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.*

b. *Soit k un entier naturel non nul tel que $p = 3k+2$ soit premier. On fixe une partie A de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ et un élément x de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. On note B l'ensemble des classes modulo p des éléments de $[\![k+1, 2k+1]\!]$ et $B_0 = A \cap (xB)$. Montrer que B_0 est sans somme, autrement dit $\forall (x,y) \in B_0^2$, $x + y \notin B_0$.*

c. *Soit A une partie finie de $\mathbb{Z}^*$. On admet qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3. Montrer qu'il existe une partie $B \subset A$ sans somme et telle que*

$$|B| > \frac{|A|}{3}.$$

d. *Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3.*

Solution.

a. Supposons par l'absurde que l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est fini et notons $p_1, \ldots, p_k$ ses éléments. Posons

$$N = p_1 \ldots p_k + 1.$$

Alors $N \geq 2$ donc admet un diviseur premier : c'est forcément l'un des p_i, disons p_1 quitte à ré-indicer. Alors p_1 divise N et $p_1 \ldots p_k$ donc divise 1 : absurde.

b. Soit $(z, y) \in B_0^2$. Alors par définition il existe $b_1, b_2 \in B$ tels que $z = xb_1$ et $y = xb_2$. Alors $z + y = x(b_1 + b_2)$. Or par définition de B, on a $b_1 + b_2 \notin B$. Comme $\alpha \mapsto x\alpha$ est une bijection de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ dans lui-même, on en déduit que $z + y \notin xB$ et en particulier $z + y \notin B_0$.

c. Quitte à translater A, on peut supposer $A \subset \mathbb{N}^*$. Ensuite, puisqu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $3k+2$, on peut fixer $p > \max A$ et voir A comme une partie de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. On définit alors B comme précédemment et on introduit une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. On introduit enfin la variable aléatoire $Y = |A \cap (XB)|$. Pour conclure il suffit de voir que $\mathbb{P}(Y > |A|/3) > 0$. Or,

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{\alpha \in A} \mathbb{P}(X \in \alpha^{-1}B)$$

et comme X suit une loi uniforme, on a

$$\mathbb{P}(X \in \alpha^{-1}B) = \frac{|\alpha^{-1}B|}{p-1} = \frac{|B|}{3k+1} = \frac{k+1}{3k+1}.$$

Finalement,

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{k+1}{3k+1}|A| > \frac{|A|}{3}.$$

En particulier ceci nous dit que Y prend avec probabilité strictement positive une valeur plus grande que $|A|/3$. Soit ω tel que $Y(\omega) > |A|/3$. Alors

$$B_0 = A \cap (X(\omega)B)$$

est une partie sans somme de A de cardinal strictement supérieur à $|A|/3$.

d. Supposons par l'absurde que l'ensemble des nombres premiers congrus à 2 modulo 3 est fini et notons $p_1, \ldots, p_k$ ses éléments. Posons

$$N = 3p_1 \ldots p_k - 1.$$

Observons que $N \geq 2$. En conséquence N admet des diviseurs premiers. Si un diviseur premiers de N était congru à 2 modulo 3, il diviserait 1 ce qui est absurde. On en déduit que les diviseurs premiers de N sont : 3 ou des nombres premiers congrus à 1 modulo 3. Par le même argument on obtient que 3 n'est pas diviseur premier de N. Donc tous les diviseurs premiers de N sont congrus à 1 modulo 3 de sorte que N lui-même doit être congru à 1 modulo 3 : absurde par construction.

Exercice. *Soient $\beta \in \mathbb{R}^{+*}$, $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $j \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P}(X_k = j) = e^{-\beta k j}(1 - e^{-\beta k}).$$

On pose

$$N = \sum_{k=1}^{+\infty} k X_k.$$

a. *Montrer que N est presque sûrement fini.*

b. *Trouver un équivalent de $\mathbb{E}[N]$ lorsque $\beta \to 0^+$.*

c. *Trouver un équivalent de $\mathbb{V}(N)$ lorsque $\beta \to 0^+$.*

d. *Pour $n \geq 0$, on note $p(n)$ le nombre de partitions de l'entier n. Exprimer la loi de N à l'aide de $p(n)$.*

e. *En déduire que*

$$\overline{\lim} \left(\frac{\ln(p(n))}{\pi\sqrt{2n/3}} \right) \leq 1.$$

f. *En utilisant la croissance de $n \mapsto p(n)$, montrer que*

$$\underline{\lim} \left(\frac{\ln(p(n))}{\pi\sqrt{2n/3}} \right) \geq 1.$$

Remarque. Compte tenu de la manière dont est posé l'énoncé, on utilisera sans réserve le théorème de convergence monotone qui, dans le cas d'une somme infinie de variables aléatoires positives, permet d'exprimer l'espérance de la somme comme la somme des espérances. On étendra aussi le résultat connu sur la variance d'une somme finie de variables i.i.d à une somme infinie. Vu la longueur de l'exercice (et son objectif final), l'oral n'est certainement pas construit autour de la démonstration délicate de ces points. Une autre manière de justifier les calculs qui suivent est de considérer que l'on travaille dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Cet exercice est affreusement long et très calculatoire. Il est sans doute impossible de le terminer dans le temps imparti (à moins de négliger de nombreuses justifications). Dans le corrigé qui suit, on essaye cependant de fournir un maximum de preuves mais il est essentiel de bien réaliser que le jour de l'oral (et même pour le grand oral d'Ulm), l'examinateur ne peut attendre d'un candidat qu'il soit capable de réaliser tout cet exercice en détail en seulement 1 heure.

Solution.

a. On commence par observer que puisque les X_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, la variable N prend la valeur ∞ si et seulement si une infinité d'évènements $\{X_k \geq 1\}$ se produit. Pour montrer que N est presque sûrement finie, on doit donc établir que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} \{X_k \geq 1\} \right) = 0.$$

En particulier, il suffit, par limite monotone, d'établir que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} \{X_k \geq 1\} \right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or ceci s'obtient par σ-sous-additivité des mesures de probabilités et en remarquant la convergence de la série

$$\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(X_k\geq 1).$$

En effet, pour $k\geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_k\geq 1)=1-\mathbb{P}(X_k=0)=e^{-\beta k}$$

qui est bien le terme général d'une série convergente. On écrit ensuite pour $n\geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n}\{X_k\geq 1\}\right)\leq\sum_{k\geq n}\mathbb{P}(X_k\geq 1)$$

et le terme de droite tend bien vers 0 comme reste d'une série convergente.

b. En passant à l'espérance dans l'expression de N, on obtient

$$\mathbb{E}[N]=\sum_{k\geq 1}k\mathbb{E}[X_k].$$

Or si $k\geq 1$,

$$\mathbb{E}[X_k]=(1-e^{-\beta k})\sum_{j\geq 1}j(e^{-\beta k})^j=\frac{e^{-\beta k}}{1-e^{-\beta k}}.$$

En introduisant $f:x>0\mapsto\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ on a donc

$$\mathbb{E}[N]=\frac{1}{\beta^2}\sum_{k\geq 1}\beta f(\beta k).$$

On utilise enfin pour conclure le lemme classique suivant,

Lemme. *Soit $\phi:[0,+\infty[\to\mathbb{R}^+$ une fonction continue, intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $[t_0,+\infty[$ où $t_0>0$. Alors,*

$$\sum_{k\geq 1}\beta\phi(\beta k)\underset{\beta\to 0^+}{\longrightarrow}\int_0^{+\infty}\phi(t)\mathrm{d}t.$$

Preuve du lemme. On commence par poser $n_0(\beta)=n_0:=\lfloor t_0/\beta\rfloor+1$. On écrit ensuite

$$\int_0^{+\infty}\phi(t)\mathrm{d}t-\sum_{k\geq 1}\beta\phi(\beta k)=\sum_{k=1}^{n_0}\int_{\beta(k-1)}^{\beta k}(\phi(u)-\phi(\beta k))\mathrm{d}u+\sum_{k\geq n_0+1}\int_{\beta(k-1)}^{\beta k}(\phi(u)-\phi(\beta k))\mathrm{d}u.$$

On appelle A_1 (resp. A_2) le premier (resp. le second) terme du membre de droite de l'égalité ci dessus. On commence par fixé $\varepsilon>0$. On obtient une majoration de A_2 en utilisant le fait que si $k\geq n_0$, alors $kn_0\geq t_0$ et donc ϕ est décroissante sur $[n_0\beta,+\infty[$. Par télescopage on obtient alors,

$$|A_2|\leq\sum_{k\geq n_0+1}\int_{\beta(k-1)}^{\beta k}\phi(\beta(k-1))-\phi(\beta k))\mathrm{d}u=\beta(\phi(\beta n_0)-\lim_{k\to+\infty}\phi(\beta k))=\beta\phi(\beta n_0).$$

En notant M un majorant de ϕ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient

$$|A_2| \leq \beta M.$$

Reste à obtenir une majoration de $|A_1|$. La fonction ϕ est continue sur le compact $[0, t_0+1]$, elle y est donc uniformément continue par le théorème de Heine (en fait elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ mais ce fait ne nous est pas utile). En particulier, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [0, t_0+1]^2$,

$$|x-y| \leq \eta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(y)| \leq \varepsilon.$$

Alors, pour $\beta < \eta$, on obtient,

$$|A_1| \leq \sum_{k=1}^{n_0} \int_{\beta(k-1)}^{\beta k} |\phi(u) - \phi(\beta k)| \mathrm{d}u \leq \varepsilon n_0 \beta \leq \varepsilon(t_0+\beta).$$

Finalement, pour $\beta < \eta$, on a

$$\left| \int_0^{+\infty} \phi(t)\mathrm{d}t - \sum_{k\geq 1} \beta\phi(\beta k) \right| \leq |A_1| + |A_2| \leq \varepsilon(t_0+\eta+M)$$

d'où le résultat.

On peut maintenant appliquer ce lemme à la fonction f précédemment introduite puisqu'elle se prolonge par continuité en 0 et vérifie les autres hypothèses du lemme. On a donc obtenu

$$\mathbb{E}[N] \underset{\beta\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\beta^2} \int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u.$$

Il reste donc à évaluer cette intégrale. On procédant au changement de variable $v = e^{-u}$ on obtient

$$\int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u = -\int_0^1 \frac{\ln(v)}{1-v}\mathrm{d}v.$$

Or cette dernière intégrale se calcule en développant en série entière $v \mapsto \frac{1}{1-v}$ et en permutant somme et intégrale. On obtient finalement

$$\int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u = \zeta(2) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[N] \underset{\beta\to 0^+}{\sim} \frac{\pi^2}{6\beta^2}$$

c. On vérifie que $V(X_k) = \frac{e^{-\beta k}}{(1-e^{-\beta k})^2}$ et on écrit par indépendance des X_k

$$V(N) = \sum_{k\geq 1} k^2 V(X_k) = \frac{1}{\beta^3} \sum_{k\geq 1} \beta g(\beta k)$$

où l'on a introduit $g : x > 0 \mapsto \frac{x^2 e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$. La fonction g est justiciable du lemme précédent ce qui permet d'assurer que

$$V(N) \underset{\beta\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\beta^3} \int_0^{+\infty} g(u)\mathrm{d}u.$$

En raisonnant comme précédemment on trouve

$$\int_0^{+\infty} g(u)\mathrm{d}u = 2\zeta(2) = \frac{\pi^2}{3}$$

de sorte que

$$V(N) \underset{\beta\to 0^+}{\sim} \frac{\pi^2}{3\beta^3}.$$

d. On rappelle que si $n \geq 1$,

$$p(n) = \left| \left\{ (\alpha_i)_{i\geq 1} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}^*} \, , \, \sum_{i\geq 1} i\alpha_i = n \right\} \right|.$$

Alors, il vient que si $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k iX_i = k\right) = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{N}^k \, , \, \sum_{i=1}^k i\alpha_i = k} \mathbb{P}(X_1 = \alpha_1)\dots\mathbb{P}(X_k = \alpha_k)$$

ce qui donne

$$\mathbb{P}(N = k) = e^{-\beta k} p(k) \prod_{i=1}^k (1 - e^{-\beta i}).$$

e. L'idée est de choisir β en fonction de n de telle sorte que $\mathbb{E}[N] \sim n$. Pour cela, en utilisant le résultat de la question **b.** on voit directement qu'il faut prendre

$$\beta = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}.$$

Posons pour $n \geq 1$

$$f_n(\beta) = \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\beta i}).$$

Pour obtenir la majoration désirée, appliquons l'inégalité de Markov. On obtient,

$$\mathbb{P}(N = n) \leq \mathbb{P}(N \geq n) \leq \frac{\mathbb{E}[N]}{n}.$$

En passant au ln dans l'inégalité précédente et en divisant par $\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}$ on obtient

$$\frac{\ln(p(n))}{\pi\sqrt{2n/3}} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2n/3}} \ln\left(\frac{\mathbb{E}[N]}{n}\right) - \frac{\ln\left(f_n\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)\right)}{\pi\sqrt{2n/3}} + \frac{(\pi\sqrt{n})/\sqrt{6}}{\pi\sqrt{2n/3}}.$$

On remarque ensuite que

$$-\frac{\ln\left(f_n\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)\right)}{\pi\sqrt{2n/3}} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2n/3}} \sum_{k\geq 1} - \ln\left(1 - e^{-\frac{\pi k}{\sqrt{6n}}}\right).$$

On a besoin d'estimer la somme dans cette majoration. On utilise pour cela une comparaison série-intégrale pour obtenir

$$\sum_{k\geq 1} - \ln(1 - e^{-\alpha k}) \underset{\alpha\to 0^+}{\sim} \frac{\pi^2}{6\alpha}.$$

En effet, cette somme est du même ordre que

$$\int_0^{+\infty} -\ln(1-e^{-\alpha t})\mathrm{d}t$$

lorsque α tend vers 0^+. En procédant au changement de variable $v = e^{-\alpha t}$ dans l'intégrale précédente, on obtient,

$$\int_0^{+\infty} -\ln(1-e^{-\alpha t})\mathrm{d}t = \int_1^0 -\ln(1-v)\frac{-1}{v\alpha}\mathrm{d}v = \frac{1}{\alpha}\sum_{k\geq 1}\int_0^1 \frac{v^{k-1}}{k}\mathrm{d}v = \frac{\pi^2}{6\alpha}$$

ce qui donne l'équivalent recherché. Finalement, on obtient donc

$$\overline{\lim}\left(-\frac{\ln\left(f_n\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)\right)}{\pi\sqrt{2n/3}}\right) \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi\sqrt{2n/3}}\sum_{k\geq 1} -\ln\left(1-e^{-\frac{\pi k}{\sqrt{6n}}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Enfin comme

$$\frac{\mathbb{E}[N]}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On a donc bien obtenu

$$\overline{\lim}\left(\frac{\ln(p(n))}{\pi\sqrt{2n/3}}\right) \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

f. On utilise l'identité classique valable pour $|x|<1$,

$$\sum_{k\geq 0} p(k)x^k = \prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-x^k}.$$

Par croissance de la suite $(p(n))_{n\geq 0}$, on a si $n\geq 1$,

$$p(n)\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \geq \sum_{k=0}^{n} p(k)x^k.$$

On évalue ensuite ceci en $x = e^{-\beta}$ avec le β précédemment choisi. En passant au ln dans l'inégalité précédente et en divisant par $\pi\sqrt{2n/3}$ on obtient alors

$$\frac{\ln(p(n))}{\pi\sqrt{2n/3}} + \frac{\ln\left(1-e^{\frac{-(n+1)\pi}{\sqrt{6n}}}\right)}{\pi\sqrt{2n/3}} - \frac{\ln\left(1-e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)}{\pi\sqrt{2n/3}} \geq \frac{1}{\pi\sqrt{2n/3}}\sum_{k\geq 1} -\ln\left(1-e^{-\frac{\pi k}{\sqrt{6n}}}\right) + \alpha_n$$

où

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi\sqrt{2n/3}}\ln\left(1-\frac{\sum_{k\geq n+1} p(k)x^k}{\sum_{k\geq 0} p(k)x^k}\right).$$

Or $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ de sorte que, avec les calculs réalisées à la question précédente,

$$\underline{\lim}\left(\frac{\ln(p(n))}{\pi\sqrt{2n/3}}\right) \geq \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

On a finalement obtenu

$$p(n) \underset{n\to+\infty}{=} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}(1+o(1))}.$$

Remarque. Hardy et Ramanujan ont démontré en 1918 que l'on dispose en fait de

$$p(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$

en utilisant des méthodes bien plus complexes. L'exercice précédent donne a priori un résultat beaucoup plus faible (quoique déjà très satisfaisant). On peut en fait directement obtenir l'équivalent de Hardy et Ramanujan avec les calculs précédents en utilisant le théorème centrale limite dans sa version locale pour affirmer que

$$\mathbb{P}(N = n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(n-m_n)^2}{2\sigma_n^2}}$$

où $m_n = \mathbb{E}[N(\beta)]$ et $\sigma_n^2 = V(N(\beta))$ avec $\beta = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$.

Remarque. Cet exercice est extrêmement important !

Exercice *(Théorème d'Ascoli).* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de $\mathbb{R}$ dans lui même. Soit $A \subset \mathbb{R}$.

1. *On suppose que pour tout $x \in A$, $\exists M_x > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$|f_n(x)| \leq M_x.$$
On suppose A fini ou dénombrable. Montrer que l'on peut extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge simplement sur A.

2. *On ajoute l'hypothèse d'équicontinuité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon.$$
Montrer que l'on peut extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que la convergence est uniforme sur tout compact.

Pour montrer ce second point, on remplacera la définition de l'équicontinuité par une définition « uniforme » (équivalente sur les compacts par le théorème de Borel Lebesgue) : Si $a < b$,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in [a,b],\ |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon.$$

3. *Réciproquement, on suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact. Montrer que la suite est uniformément bornée sur tout compact et équicontinue.*

Solution. Cet exercice démontre un résultat extrêmement classique et mérite une petite introduction. Vous avez pu voir dans votre cours de topologie que les compacts en dimension finie étaient exactement les fermés bornés. Une question naturelle apparaît alors : lorsque l'on passe en dimension infinie, que faut-il rajouter comme hypothèse sur une partie X de notre espace pour qu'elle soit compacte ? On se propose ici de répondre à cette question dans le cas de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et on démontre que les parties compactes de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ sont exactement les fermés bornés *équicontinus*. On peut s'intéresser à d'autres espaces normés de dimension infinie. Par exemple si vous êtes vraiment intéressés par cette problématique, je vous recommande d'essayer de chercher les parties compactes de $(\ell^1(\mathbb{C}), \|.\|_1)$ où $\ell^1(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des suites complexes sommables.

1 La méthode utilisée pour cette première question est absolument essentielle et doit être parfaitement maitrisée dans l'optique de la préparation du concours X/ENS. Supposons d'abord A finie. On note $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$. On sait que $K := [-M_{\alpha_1}, M_{\alpha_1}] \times \ldots \times [-M_{\alpha_p}, M_{\alpha_p}]$ est compact (produit de compacts).
La suite $(f_n(\alpha_1), \ldots, f_n(\alpha_p))_{n\in\mathbb{N}} \in K$ à valeurs dans un compact admet une valeur d'adhérence et on en déduit l'existence de $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction, et $(a_1, \ldots, a_p) \in K$ tel que
$$(f_{\varphi(n)}(\alpha_1), \ldots, f_{\varphi(n)}(\alpha_p)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (a_1, \ldots, a_p).$$
D'où le résultat. Bien retenir que le fait d'extraire sur un produit fini de compact revient à faire p extractions successives. Pour le cas où A est infini on a recourt au célèbre procédé diagonal de Cantor.

Supposons donc A infini (dénombrable) et posons $A = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On construit par récurrence une suite $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'extractions telles que pour tout $n \geq 0$

- La suite $(f_{\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_n(k)}(\alpha_n))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\alpha_n^{(\infty)}$.

La construction d'une telle suite est une simple récurrence avec extraction successive. L'important est ce qui suit : une fois une telle suite construite, on définit pour $n \geq 0$,

$$\psi(n) = \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_n(n).$$

On remarque alors que par construction, pour tout $k \geq 0$,

$$f_{\psi(n)}(\alpha_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha_k^{(\infty)}.$$

D'où le résultat recherché.

2 On commence par appliquer la question **1** avec $A = \mathbb{Q}$ et on dispose donc d'une extraction φ telle que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{Q}$. Montrons que cette suite converge aussi simplement sur $\mathbb{R}$ avec l'hypothèse supplémentaire d'équicontinuité. La suite (g_n) est encore équicontinue. soit $\varepsilon > 0$, soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$|x - y| \leq \eta \Rightarrow |g_n(x) - g_n(y)| \leq \varepsilon.$$

On montrer que la suite $(g_n(x))$ converge en montrant qu'elle est de Cauchy. Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et r un rationnel tel que $|x - r| \leq \eta$. On écrit,

$$|g_p(x) - g_q(x)| \leq |g_p(x) - g_p(r)| + |g_p(r) - g_q(r)| + |g_q(r) - g_q(x)| \leq 2\varepsilon + |g_p(r) - g_q(r)|.$$

Comme la suite $(g_n(r))$ converge, elle est de Cauchy et pour $p, q \geq N$ assez grand on a donc

$$|g_p(x) - g_q(x)| \leq 3\varepsilon.$$

D'où le résultat. On montre à présent que la convergence est uniforme sur tout compact. On fixe $K = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (il suffit de traiter ce cas là). Soit $\varepsilon > 0$. Observons déjà qu'en notant g la limite simple de (g_n) sur $\mathbb{R}$, alors $((g_n)_{n\in\mathbb{N}}, g)$ est équicontinue. On utilise la correction de l'énoncé dans la définition de l'équicontinuité sur les compacts. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$,pour tout $n \geq 0$

$$|x - y| \leq \eta \Rightarrow |g_n(x) - g_n(y)| \leq \varepsilon$$

et

$$|x - y| \leq \eta \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon.$$

Fixons $(x_i)_{i=0,\ldots,p}$ une subdivision régulière de $[a, b]$ de pas inférieur à η. On se ramène (**méthode importante**) à la convergence sur un nombre fini de point (qui est toujours uniforme). Notons $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, pour tout $i \in \{0, \ldots, p\}$,

$$|g_n(x_i) - g(x_i)| \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in [a, b]$ et x_i à au plus η près de x. On écrit, si $n \geq N$,

$$|g_n(x) - g(x)| \leq |g_n(x) - g_n(x_i)| + |g_n(x_i) - g(x_i)| + |g(x_i) - g(x)| \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui donne bien la convergence uniforme voulue.

3 Si K un compact sur lequel la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f continue. Observons déjà que

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

Et cette suite est donc bornée par une constante $M > 0$. Donc pour tout $n \geq 0$,

$$\|f_n\|_\infty \leq M + \|f\|_\infty.$$

Montrons que la suite est équicontinue. Soient $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

De plus pour tout $n \geq 0$ il existe $\eta_n > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$|x - y| \leq \eta_n \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon.$$

On sait que (f_n) converge uniformément vers f sur $[x - \eta, x + \eta]$. Fixons donc $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, pour tout $t \in [x - \eta, x + \eta]$,

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

Posons $\tilde{\eta} = \min\{\eta, \dots, \eta_N\}$. Alors pour tout $n \geq N$, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$|x - y| \leq \tilde{\eta} \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - f_n(y)| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci tient encore si $n \leq N$ d'où le résultat.

Exercice. *Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes strictement positives, toutes d'espérance 1. Pour $n \geq 1$, on pose $P_n = \prod_{k=1}^n X_k$. Montrer que $(P_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilités vers 0 si et seulement si*

$$\prod_{k=1}^n \mathbb{E}[\sqrt{X_k}] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Solution. Commençons par traiter le sens réciproque. Soit $\varepsilon > 0$, il s'agit d'établir que

$$\mathbb{P}(|P_n| > \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour cela, on utilise l'inégalité de Markov. Comme les variables aléatoires X_i sont strictement positives, on peut écrire par l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(|P_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^n \sqrt{X_i} > \sqrt{\varepsilon}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n \sqrt{X_i}\right]}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\sqrt{X_i}]}{\sqrt{\varepsilon}}$$

(on a utilisé l'indépendance des X_i). Or le terme de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ par hypothèse, ce qui donne le résultat.

Passons au sens réciproque. On cherche à présent à contrôler une moyenne à partir d'une probabilité ce qui n'est plus permis par l'inégalité de Markov. Nous allons donc observer un résultat simple qui permet ce contrôle, il s'agit de l'inégalité de Paley Zygmund :

Inégalité de Paley Zygmund. Soit X une variable aléatoire discrète réelle à valeurs strictement positives telle que $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$. Soit $\lambda \in]0,1[$, alors

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda\mathbb{E}[X]) \geq \frac{(1-\lambda)^2\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Démonstration de l'inégalité. Il s'agit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On écrit

$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{X\geq\lambda\mathbb{E}[X]\}}]^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\mathbb{P}(X \geq \lambda\mathbb{E}[X]).$$

On observe ensuite que

$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{X\geq\lambda\mathbb{E}[X]\}}] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{X<\lambda\mathbb{E}[X]\}}] \geq (1-\lambda)\mathbb{E}[X]$$

ce qui donne bien l'inégalité souhaitée.

On peut à présent conclure. Supposons que $(P_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilités vers 0. Appliquons l'inégalité de Paley Zygmund avec $\lambda = 1/2$ à la variable aléatoire strictement positive $\sqrt{P_n}$ (qui admet un moment d'ordre 2). On a

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{P_n} \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}[\sqrt{P_n}]\right) \geq \frac{1}{4}\frac{\left(\prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\sqrt{X_i}]\right)^2}{\prod_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]} = \frac{1}{4}\left(\prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\sqrt{X_i}]\right)^2.$$

Posons $u_n = \mathbb{E}[\sqrt{P_n}] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\sqrt{X_i}]$. Si par l'absurde la suite (déterministe) $(u_n)_{n\geq 0}$ ne tendait pas vers 0, on aurait $\varepsilon > 0$ et une extraction $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \geq 1$, $u_{\varphi(n)} \geq \varepsilon$. Notons en particulier que si $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{P_{\varphi(n)}} \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \geq \mathbb{P}\left(\sqrt{P_{\varphi(n)}} \geq \frac{u_{\varphi(n)}}{2}\right) \geq \frac{1}{4}(u_{\varphi(n)})^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

par l'inégalité précédente. Or dans cette inégalité le terme de gauche tend vers 0 par hypothèse : d'où l'absurdité.

Exercice.

1. *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $0 < \mathbb{E}[X^2] < +\infty$. Montrer que*
$$\mathbb{P}(X > 0) \geq \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$
Pour $n \geq 1$, on se donne $p_n \in]0,1[$. On considère le graphe aléatoire Γ_n, de sommets $1, \ldots, n$, tel que, pour tout (i,j) tel que $1 \leq i < j \leq n$, si $X_{i,j}$ est la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque (i,j) est une arête de Γ_n et 0 sinon, les $X_{i,j}$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p_n. On note Y_n la variable aléatoire qui donne le nombre de sommets isolés.
2. *On suppose que $\frac{\ln n}{n} = o(p_n)$. Montrer que*
$$\mathbb{P}(Y_n > 0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
3. *On suppose que $p_n = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$. Montrer que*
$$\mathbb{P}(Y_n > 0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Solution.

1. Il s'agit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les variables $\mathcal{L}^2$. On écrit
$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{X>0\}}]^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X>0\}}^2] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{P}(X > 0)$$
ce qui donne bien le résultat voulu puisque
$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{X>0\}}]^2 = \mathbb{E}[X]^2$$
car X est à valeurs positives.
2. Notons pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $A_i(n)$ l'évènement : "le sommet i est isolé". On a,
$$\mathbb{P}(Y_n > 0) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i(n)\right).$$
De plus, on a si $i \in \{1, \ldots, n\}$
$$\mathbb{P}(A_i(n)) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq k < i} \{X_{k,i} = 0\} \cap \bigcap_{i < k \leq n} \{X_{i,k} = 0\}\right) = (1 - p_n)^{n-1}.$$
En particulier, de ceci on déduit que
$$\mathbb{P}(Y_n > 0) \leq n(1 - p_n)^{n-1} = ne^{(n-1)\ln(1-p_n)} \leq ne^{-(n-1)p_n} = o(1)$$
par l'hypothèse (on a utilisé la concavité du ln et l'inégalité valable sur $]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$). D'où le résultat voulu.
3. L'idée est d'exprimer Y_n comme une somme d'indicatrices et d'utiliser la question **1**. On a effectivement
$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i(n)}.$$

De ceci on tire

$$\mathbb{E}[Y_n] = n(1-p_n)^{n-1}$$

par linéarité de l'espérance et par le travail effectué à la question précédente. Reste à calculer $\mathbb{E}[Y_n^2]$. On a déjà

$$Y_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i(n)} + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{1}_{A_i(n)} \mathbb{1}_{A_j(n)}.$$

Si $i<j$, on a

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i(n)} \mathbb{1}_{A_j(n)}] = \left((1-p_n)^{n-2}\right)^2 (1-p_n) = (1-p_n)^{2n-3}$$

en raisonnant comme précédemment mais en faisant attention à ne pas compter deux fois l'arête (i,j). On en déduit par la question a) que

$$\mathbb{P}(Y_n > 0) \geq \frac{n^2(1-p_n)^{2n-2}}{n(1-p_n)^{n-1} + n(n-1)(1-p_n)^{2n-3}}.$$

Avec l'hypothèse on conclut facilement que le terme de droite tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.