

# Chapitre II

## Géométrie analytique

Ce que les Anciens avoient démontré sur les courbes, quelque important, quelque subtil qu'il fut, n'étoit pourtant qu'un amas de Propositions particulières ... jusqu'à l'invention de l'Algèbre ; moyen ingénieux de réduire les Problèmes au Calcul le plus simple & le plus facile que la Question proposée puisse admettre. Cette clef universelle des Mathématiques ... a produit une véritable révolution dans les Sciences... (G. Cramer, *L'Analyse des lignes courbes algébriques*, Genève 1750)

### II.1 La Géométrie de Descartes

... en cherchant une question de géométrie ... je ne considère point d'autres théorèmes, sinon que le côtés des triangles semblables ont semblable proportion entre eux, et que dans les triangles rectangles le carré de la base est égal aux deux carrés des côtés ; et je ne crains point de supposer plusieurs quantités inconnues pour réduire la question à tels termes, qu'elle ne dépende que de ces deux théorèmes...

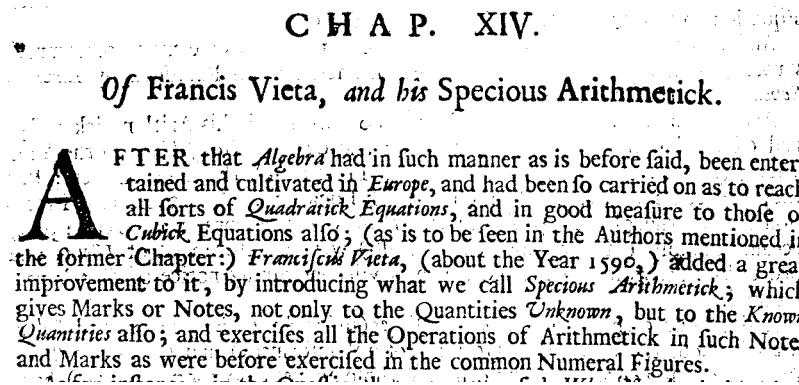
(Descartes, *Lettre à Mme La princesse Élisabeth*, 1643, *Oeuvres de Descartes* (V. Cousin), tome 9e, p. 143)

. .. affin de faire voir qu'on peut construire tous les Problemes de la Geometrie ordinaire, sans faire autre chose que le peu qui est compris dans les quatre figures que i'ay expliquées. Ce que ie ne croy que les anciens ayent remarqué, car autrement ils n'eussent pas pris la peine d'en escrire tant de gros liures, ou le seul ordre de leurs propositions nous fait connoistre qu'ils n'ont point eu la vraye methode pour les trouver toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées.

(R. Descartes, *La Geometrie*, 1637, p. 304)

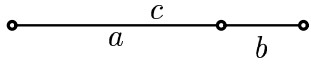
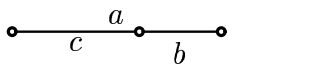
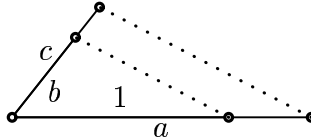
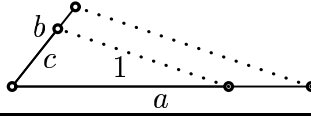
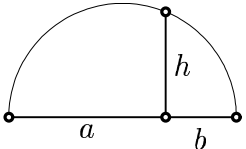
La *Géométrie* de Descartes, publiée en 1637, sorte d'appendice du *Discours de la Méthode* (à compter de la page 297), est l'une des oeuvres scientifiques les plus importantes des XVI<sup>e</sup> et XVII<sup>e</sup> siècles. Là se croisent les chemins de la *géométrie* et de l'*algèbre* (“al jabr” : mot arabe, introduit vers 830 lors de la résolution d'équations de degrés 2 d'abord, 3 et 4 plus tard. Viète, vers 1590, étend l'algèbre à des calculs “par espèces” ; voir figure 1.1).

Descartes commence par noter que, pour “tous les Problemes de Geometrie”, il suffit de “connoistre la longuer de quelques lignes droites” et que “souuent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, & il suffit de les designer par quelques lettres, chascune par une seule. Comme pour adiouter la ligne  $BD$  a  $GH$ , ie nomme l'une  $a$  & l'autre  $b$ , & escriis  $a + b$  ;...” . De ce moment historique date l'usage des lettres minuscules pour noter les

FIG. 1.1 – Wallis (fac-similé  $\approx 1650$ ) sur l'algèbre de Viète

grandeurs d'un problème (géométrique) et les dernières lettres de l'alphabet pour noter les inconnues; en effet, deux pages plus loin Descartes écrit "C'est a dire,  $z$ , que ie prens pour la quantité inconnüe..."

On a donc une sorte de dictionnaire entre les opérations géométriques et les opérations algébriques

Géométrie	Algèbre	
	somme $c = a + b$	
	différence $c = a - b$	
	produit $c = a \cdot b$	(1.1)
	quotient $c = \frac{b}{a}$	
	racine $h = \sqrt{a \cdot b}$ (Eucl. II.14)	

Ce dictionnaire permet de transférer un problème de la géométrie à l'algèbre, ou vice-versa. La solution recherchée pourrait devenir plus facile!...

**EXEMPLUM 1. Theorema Fermatii.** Pour convaincre le lecteur des avantages de cette nouvelle approche, choisissons un théorème de Fermat :

**Théorème.** Soit  $AMB$  un demi-cercle de rayon 1 et  $EFBA$  un rectangle de largeur  $\sqrt{2}$  attaché à ce cercle. Pour un point  $M$  arbitraire du cercle, soient  $R$  et  $S$  les points coupés par les droites  $ME$  et  $MF$  au diamètre  $AB$  (voir figure 1.2 à gauche). Alors

$$AS^2 + RB^2 = AB^2 . \quad (1.2)$$

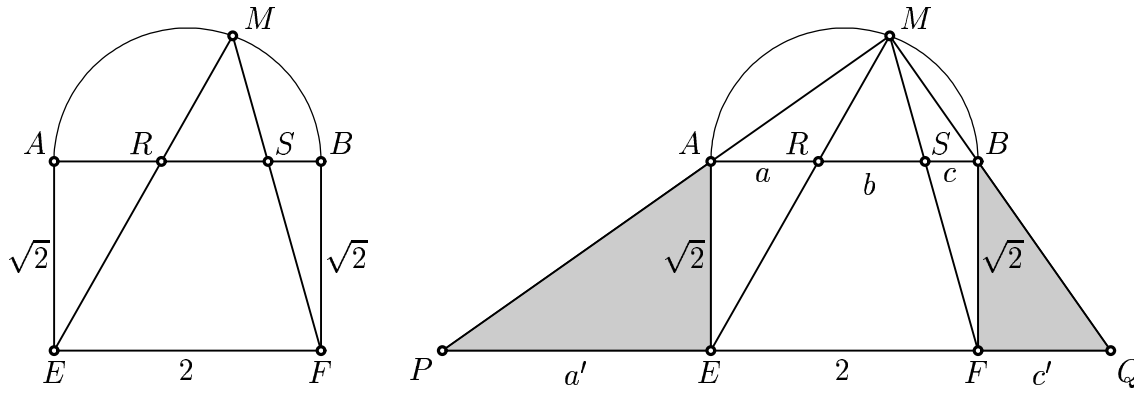


FIG. 1.2 – Un théorème de Fermat (à gauche); preuve (à droite)

## THEOREMA FERMATI

4. Si super semicirculi  $AMB$  diametro (Fig. 3)  $AB$  constituatur parallelogrammum rectangulum  $ABFE$ , cuius latitudo  $AE$  seu  $BF$  aequetur chordae quadrantis eiusdem circuli seu lateri quadrati inscripti, atque ex punctis  $E$  et  $F$  ad quodvis peripheriae punctum  $M$  ducantur rectae  $EM, FM$ , his diameter  $AB$  ita secabitur in punctis  $R$  et  $S$ , ut sit:  $AS^2 + BR^2 = AB^2$ .

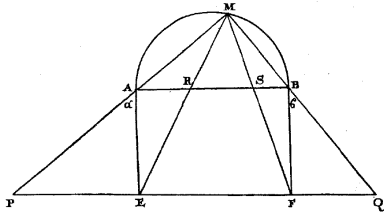
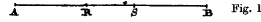


Fig. 3

## LEMMA

2. Si linea recta  $AB$  (Fig. 1) utcumque secetur in duobus punctis  $R$  et  $S$ , erit rectangulum ex tota  $AB$  in partem mediam  $RS$  una cum rectangulo



ex partibus extremis  $AR$  et  $BS$  aequale rectangulo ex partibus  $AS$  et  $BR$ , seu erit:

$$AB \cdot RS + AR \cdot BS = AS \cdot BR.$$

## DEMONSTRATIO

Cum sit

$$AB = AS + BS,$$

erit utrumque ducendo in  $RS$

$$AB \cdot RS = AS \cdot RS + BS \cdot RS$$

addatur  $\frac{AR \cdot BS}{AR \cdot BS}$  utrinque, et erit

$$AB \cdot RS + AR \cdot BS = AS \cdot RS + BS \cdot RS + AR \cdot BS.$$

At est

$$BS \cdot RS + AR \cdot BS = BS(RS + AR) = BS \cdot AS,$$

unde fit

$$AB \cdot RS + AR \cdot BS = AS \cdot RS + BS \cdot AS.$$

Verum est

$$AS \cdot RS + BS \cdot AS = AS(RS + BS) = AS \cdot BR.$$

Consequenter habebitur:

$$AB \cdot RS + AR \cdot BS = AS \cdot BR.$$

Q. E. D.

## DEMONSTRATIO

Ex puncto  $M$  per terminos diametri  $A$  et  $B$  producantur rectae  $MAP$  et  $MBQ$ , donec basi  $EF$  productae occurrant in punctis  $P$  et  $Q$ . Iam, quia angulus  $AMB$  est rectus, erit  $P + Q = \text{ang. recto}$ ; at est etiam  $P + \alpha = \text{ang. recto}$  et  $Q + \beta = \text{ang. recto}$ , ob rectas  $AE$  et  $BF$  ad  $EF$  normales; unde erit  $P = \beta$  et  $Q = \alpha$  ideoque triangula  $PEA$  et  $BFQ$  inter se similia; ex quo habebitur  $PE : AE = BF : QF$  hincque  $PE \cdot QF = AE \cdot BF = AE^2$  et propterea  $2PE \cdot QF = 2AE^2$ . At quia  $AE$  aequatur chordae quadrantis, erit  $2AE^2 = AB^2 = EF^2$ , ita ut futurum sit  $2PE \cdot QF = EF^2$ . Quare, cum hic recta  $PQ$  ita in punctis  $E$  et  $F$  secta habeatur, ut sit duplum rectangulum partium extremarum  $PE$  et  $QF$  aequale partis mediae  $EF$  quadrato, diameter vero  $AB$  in punctis  $R$  et  $S$  simili modo sit secta, sequitur fore quoque duplum rectangulum partium extremarum  $AR$  et  $BS$  aequale quadrato partis mediae  $RS$  seu erit  $2AR \cdot BS = RS^2$ . Iam cum sit  $AS + BR = AB + RS$ , erit quadratis sumtis:

$$AS^2 + BR^2 + 2AS \cdot BR = AB^2 + RS^2 + 2AB \cdot RS.$$

Ponatur hic pro  $RS^2$  eius valor  $2AR \cdot BS$  fietque

$$AS^2 + BR^2 + 2AS \cdot BR = AB^2 + 2AB \cdot RS + 2AR \cdot BS.$$

At per lemma praemisum est  $AB \cdot RS + AR \cdot BS = AS \cdot BR$  ideoque etiam  $2AB \cdot RS + 2AR \cdot BS = 2AS \cdot BR$ , quo valore in illa aequalitate substituto orietur:

$$AS^2 + BR^2 + 2AS \cdot BR = AB^2 + 2AS \cdot BR;$$

auferatur utrinque pars communis  $2AS \cdot BR$  ac remanebit:  $AS^2 + BR^2 = AB^2$ .  
Q. E. D.

FIG. 1.3 – Fac-similé de l'énoncé et de la preuve du théorème de Fermat par Euler (copié des Opera 26, p. 16-18)

*Preuve.* Un bon siècle après Descartes, Euler s'est cru obligé de faire la preuve dans le style des Anciens (cf. fac-similé en figure 1.3).

Mais combien plus facile devient cette preuve “à la Descartes” : Introduisons  $a, b, c$  pour les segments  $AR, RS$  et  $SB$  (voir figure 1.2 à droite), alors l'affirmation du théorème devient

$$(a + b)^2 + (b + c)^2 = (a + b + c)^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = 2ac. \quad (1.3)$$

L'idée est maintenant de prolonger (Eucl. Post. 2, we have not forgotten) les segments

$MA$ ,  $MB$  et  $EF$  pour obtenir deux triangles  $EAP$  et  $FQB$  semblables à  $MBA$ .

$$\text{Thalès: } \frac{a'}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{c'} \Rightarrow a'c' = 2.$$

$$\text{Thalès: } \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} = \frac{b}{2} \Rightarrow ac = \frac{a'c'b^2}{4} = \frac{b^2}{2}. \quad \text{QED.}$$

## EXEMPLUM 2. Quadrilateri circulo inscripti.

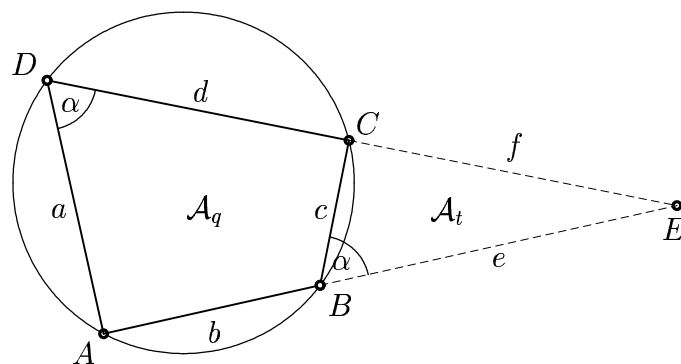


FIG. 1.4 – Un quadrilatère inscrit dans un cercle

Prenons un cercle (voir figure 1.4) et un quadrilatère  $ABCD$  inscrit. Prolongeons  $AB$  et  $DC$  au point  $E$ . Par Euclide III.22 (voir figure I.2.6 (c)), les deux triangles  $ADE$  et  $CBE$  sont semblables. Par Thalès

$$\frac{e}{c} = \frac{f+d}{a}, \quad \frac{f}{c} = \frac{e+b}{a}$$

En prenant la somme et la différence, nous obtenons encore

$$\begin{aligned} \frac{e+f}{c} \left(1 - \frac{c}{a}\right) &= \frac{b+d}{a} \Rightarrow \frac{e+f}{c} = \frac{d+b}{a-c} \\ \frac{f-e}{c} \left(1 + \frac{c}{a}\right) &= \frac{b-d}{a} \Rightarrow \frac{f-e}{c} = \frac{b-d}{a+c}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

**Aire du quadrilatère.** Les amoureux de la belle formule de Héron (voir section I.4) pour l'aire d'un triangle admireront la formule d'Euler, plus belle encore, de l'aire d'un quadrilatère inscrit dans un cercle :

Notons cette aire par  $\mathcal{A}_q$ . Elle est la différence de l'aire du triangle  $ADE$  moins celle du triangle  $BCE$ . Ces triangles sont semblables de rapport  $\frac{a}{c}$ . Par Eucl. VI.19, nous avons donc

$$\mathcal{A}_q = \mathcal{A}_t \cdot \left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right) = \mathcal{A}_t \cdot \left(\frac{a^2 - c^2}{c^2}\right) \quad (1.5)$$

où  $\mathcal{A}_t$  est l'aire du triangle  $BCE$ .

L'idée toute simple est maintenant d'insérer la formule de Héron pour  $\mathcal{A}_t$  et de calculer l'aire du quadrilatère. Mais il faut l'audace et le génie d'Euler pour effectuer ces calculs si élégamment. Écrivons  $a^2 - c^2 = (a - c)(a + c)$  et prenons le carré de  $\mathcal{A}_q$ . Ensuite, distribuons les facteurs de la formule de Héron et de (1.5) comme suit :

$$16\mathcal{A}_q^2 = \frac{a-c}{c}(e+f+c) \cdot \frac{a-c}{c}(e+f-c) \cdot \frac{a+c}{c}(c+f-e) \cdot \frac{a+c}{c}(c-f+e)$$

$$= (a - c)\left(\frac{e + f}{c} + 1\right) \cdot (a - c)\left(\frac{e + f}{c} - 1\right) \cdot (a + c)\left(1 + \frac{f - e}{c}\right) \cdot (a + c)\left(1 + \frac{e - f}{c}\right).$$

Grâce à (1.4), la formule ci-dessus est miraculeusement simplifiée en

$$16\mathcal{A}_q^2 = (d + b + a - c)(d + b - a + c)(a + c + b - d)(a + c + d - b)$$

et nous avons :

**Théorème** (Euler 1750; aussi appelée *Formule de Brahmagupta*). *Soit*

$$s = \frac{a + b + c + d}{2}$$

*le demi-périmètre du quadrilatère inscrit dans un cercle, alors son aire est*

$$\mathcal{A}_q = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}. \quad \text{QED.} \quad (1.6)$$

Il est inconcevable de faire cette preuve dans le style des Anciens — pourtant Euler l’a fait — sur 6 pages A4.

### EXEMPLUM 3. Le problème de Cramer-Castillon.

“Dans ma jeunesse ... un vieux Géometre, pour essayer mes forces en ce genre, me proposa le Problème que je vous proposai, tentez de le résoudre et vous verrez, combien il est difficile.”

(G. Cramer en 1742; cité des *Opera* d’Euler, vol. 26, p. xxv)

“Sur un problème de géométrie plane qu’on regarde comme fort difficile”  
(Castillon 1776; titre de sa publication)

“Le lendemain du jour dans lequel je lus à l’Académie ma solution du Problème concernant le cercle et le triangle à inscrire dans ce cercle, en sorte que chaque côté passe par un de trois points donnés, M. de la Grange m’en envoya la solution algébrique suivante.”

(Castillon 1776; voir *Oeuvres de Lagrange*, vol. 4, p. 335)

“Ce problème passe pour difficile, et il a fixé l’attention de plusieurs grands géomètres.”

(Carnot, *Géométrie de Position*, 1803, p. 383)

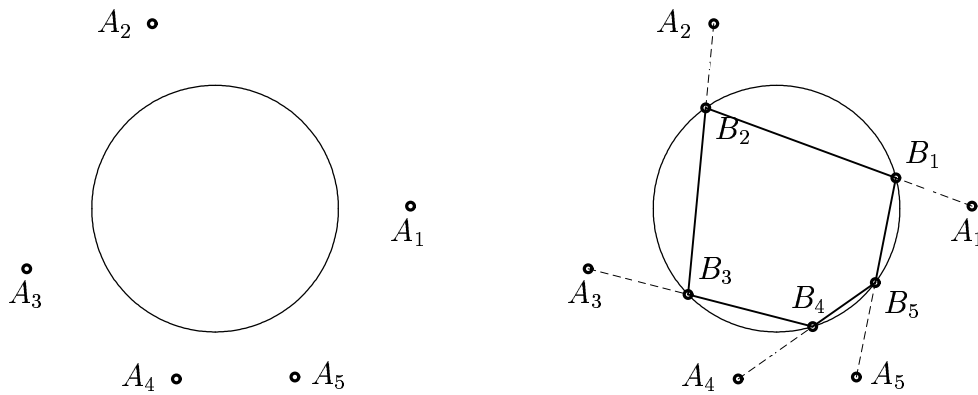


FIG. 1.5 – Le polygone de Pappus (à droite) et les points donnés (à gauche)

**Problème.** Soit donné un cercle et  $n$  points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  dans le plan (voir figure 1.5 à gauche). On cherche un  $n$ -gone  $B_1, B_2, \dots, B_n$  inscrit dans le cercle, dont les côtés passent respectivement par les points  $A_i$  (voir figure 1.5 à droite).

Ce problème nous vient d’une construction de Pappus (le cas de  $n = 3$  et  $A_1, A_2$  et  $A_3$  alignés; voir *Problematis cuiusdam Pappi Alexandrini constructio*, Opera d’Euler vol. 26). Un “vieux Géometre” inconnu le propose au jeune G. Cramer (voir citation), qui finit par “contaminer” tous les grands mathématiciens du 18e siècle (Castillon, Euler, Lexell et le jeune Ottaiano de 16 ans). Finalement, Lagrange trouve *en une nuit* une solution analytique (voir citation). Carnot découvre en 1803 que la solution devient spécialement élégante à l’aide de, ce qu’on appelle aujourd’hui, la *transformation de Möbius*.

### La transformation de Möbius.

Wenn man den schlichten, stillen Mann [Möbius] vor Augen hat, muss es einen einigermassen in Erstaunen setzen, dass sein Vater ... den Beruf eines Tanzlehrers ausübte. Um die Verschiedenheit der Generationen vollends vor Augen zu führen, erwähne ich, dass ein Sohn des Mathematikers der bekannte Neurologe ist, der Verfasser des vielbesprochenen Buches “Vom physiologischen Schwachsinn des Weibes”.

(F. Klein, *Entw. der Math. im 19. Jahrh.* (1926), p. 117)

Une *transformation de Möbius*  $u \mapsto v$  est une application

$$v = \frac{pu + q}{ru + s} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

avec  $p, q, r, s$ , des quantités données. La matrice des coefficients est significative seulement à une constante près.

Carnot découvre que la *composition* de deux transformations

$$u_2 = \frac{p_1 u_1 + q_1}{r_1 u_1 + s_1}, \quad u_3 = \frac{p_2 u_2 + q_2}{r_2 u_2 + s_2} = \frac{p u_1 + q}{r u_1 + s} \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 & q_2 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ r_1 & s_1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

est de nouveau une transformation de Möbius pour laquelle la matrice est le *produit* des deux matrices. Le résultat analogue est vrai pour les opérations *inverses*; les transformations avec  $ps - qr \neq 0$  forment un *groupe*.

L’application (1.7) est une *involution*, i.e., sa propre inverse, ssi  $s = -p$ .

### Solution analytique du problème de Cramer–Castillon.

En modifiant légèrement la preuve de Carnot, nous utilisons les coordonnées “pythagoriciennes” sur le cercle (supposé de rayon 1, voir Fig. 1.6, à gauche; voir aussi [HW97], page 124)

$$u = \tan \frac{\alpha}{2}, \quad x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad y = \frac{2u}{1 + u^2}. \quad (1.9)$$

Le point  $(x, y)$  parcourt le cercle en sens inverse de l’aiguille d’une montre pour  $-\infty < u < \infty$  (les valeurs sont en relation avec les célèbres triplets de Pythagore  $(1 - u^2, 2u, 1 + u^2)$ ; d’où le nom).

Idée: partons d’un point quelconque  $B_1$  de coordonnée  $u_1$  et calculons sa projection  $B_2$  sur le cercle par le point  $A_1$  de coordonnées connues  $(a_1, b_1)$  (voir Figure 1.6, à droite). Ensuite on calcule  $B_3, B_4, \dots$  similairement et on doit finalement satisfaire la condition  $B_{n+1} = B_1$ .

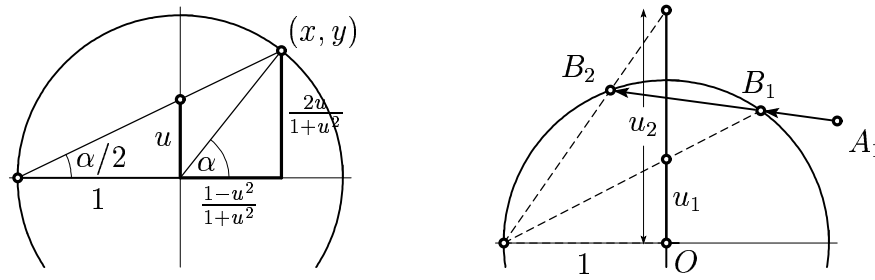


FIG. 1.6 – Coordonnées pythagoriciennes sur un cercle (gauche) et l'involution d'un cercle par rapport à un point  $A_1$  donné (à droite)

Calculs: la collinéarité de  $B_1$ ,  $B_2$  et  $A_1$  est caractérisée par

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1-u_1^2}{1+u_1^2} & \frac{2u_1}{1+u_1^2} & 1 \\ \frac{1-u_2^2}{1+u_2^2} & \frac{2u_2}{1+u_2^2} & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad \det \begin{pmatrix} 1-u_1^2 & 2u_1 & 1+u_1^2 \\ 1-u_2^2 & 2u_2 & 1+u_2^2 \\ a_1 & b_1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Cela, simplifié et divisé par le facteur trivial  $u_2 - u_1$ , donne

$$u_2 = \frac{-b_1 u_1 + 1 - a_1}{-(a_1 + 1)u_1 + b_1} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} u_2 \\ 1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -b_1 & 1 - a_1 \\ -a_1 - 1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

une transformation de Möbius. Autour du  $n$ -gone de la Figure 1.5, et en utilisant (1.8), nous voyons que nous devons multiplier toutes ces matrices et nous arrivons à la condition

$$u_{n+1} = u_1 = \frac{au_1 + b}{cu_1 + d} \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_n & 1 - a_n \\ -a_n - 1 & b_n \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} -b_1 & 1 - a_1 \\ -a_1 - 1 & b_1 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Cette formule représente une équation quadratique pour  $u_1$  possédant normalement deux solutions (voir exemple en figure 1.7<sup>1</sup>).

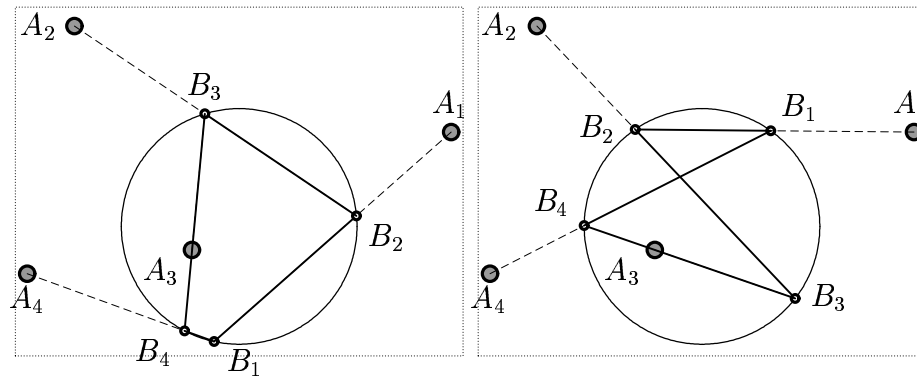


FIG. 1.7 – Deux solutions d'un problème de Cramer-Castillon

#### EXEMPLUM 4. Billard dans une ellipse.

Considérons une table de billard en forme d'ellipse (voir figure 1.8). Nous savons qu'une balle partant d'un foyer est réfléchiée dans l'autre foyer (voir section I.3, p. 30).

**Problème.** L'angle  $\varphi_1$  donné, on aimerait connaître les angles  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ , etc.

1. Exemple dû à F. Sigrist (Neuchâtel)

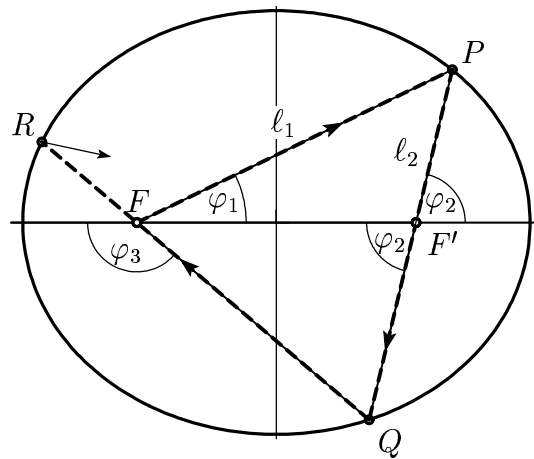


FIG. 1.8 – Billard dans une ellipse

**Solution.** Notons

$$c_i = \cos \varphi_i . \quad (1.12)$$

Nous plaçons les foyers dans les points  $-1$  et  $1$ , donc  $a = \frac{1}{e}$ . Si  $x$  est l'abscisse de  $P$ , on obtient de la première définition de l'ellipse (voir figure I.3.4) que<sup>2</sup>

$$\ell_{1,2} = a \pm ex = \frac{1}{e} \pm ex$$

(en effet  $\ell_1 = PF = PA = e PB = a + ex$  car  $\ell_1 = a$  si  $x = 0$ ). Ainsi, par définition du cosinus,

$$c_1 = \frac{x+1}{ex + \frac{1}{e}} , \quad c_2 = \frac{x-1}{-ex + \frac{1}{e}} .$$

Il s'agit de deux transformations de Möbius. Nous pouvons inverser la première et insérer  $x$  dans la deuxième. En calcul matriciel :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -e & \frac{1}{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e & \frac{1}{e} \end{pmatrix}^{-1} = \text{cte} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ -\theta & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \theta = \frac{2e}{e^2 + 1} .$$

Ainsi le résultat est de nouveau une transformation de Möbius<sup>3</sup>

$$c_2 = \frac{c_1 - \theta}{-\theta c_1 + 1} . \quad (1.13)$$

Les puissances de la matrice correspondante donneront les autres angles  $\varphi_3, \varphi_4$ , etc. (qui convergent vers  $\pi$ , i.e., le vecteur propre pour  $\lambda_{\max}$ , si  $e > 0$  et  $\varphi_1 \neq 0$ ).

**Conséquence : ‘the most elementary theorem of Euclidean Geometry’.**<sup>4</sup>

“Urquhart considered this to be the ‘most elementary theorem’, since it involves only the concepts of straight line and distance. The proof of this theorem by purely geometrical methods is not elementary. Urquhart discovered this result when considering some of the fundamental concepts of the theory of special relativity.”

(D. Elliot ; *J. Australian Math. Soc.* 1968, p. 129)

2. Au collège, ces formules sont souvent une étape de la preuve analytique pour  $\ell_1 + \ell_2 = 2a$ .

3. cette formule se trouve aussi dans un manuscrit non publié de Christoph Soland (Gymnase du Bugnon).

4. Merci à Pierre de la Harpe, et au livre *Billiards* de S. Tabachnikov, pour cette indication.

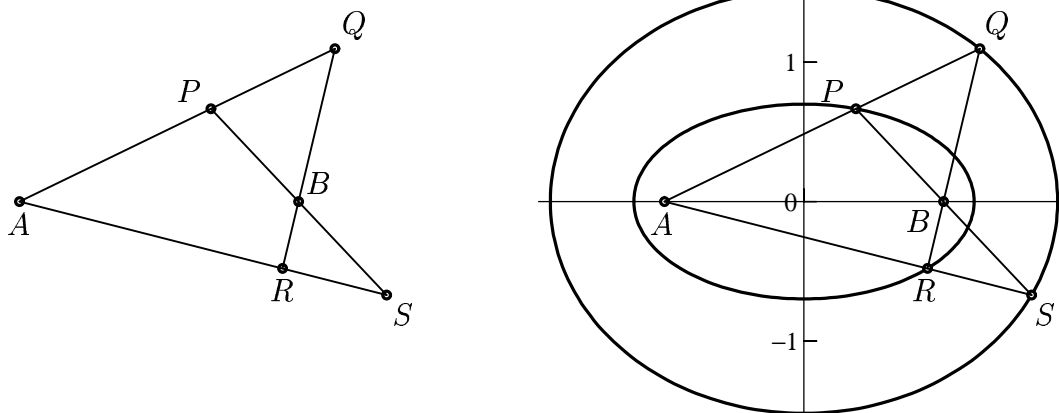


FIG. 1.9 – Dessin pour le théorème de Urquhart

**Théorème** (M.L. Urquhart (1902-1966), physicien et mathématicien australien). *Si les points  $A, B, P, Q, R, S$  sont alignés comme en figure 1.9 (à gauche), alors*

$$AP + PB = AR + RB \quad \Rightarrow \quad AQ + QB = AS + SB . \quad (1.14)$$

*Preuve.* Les conditions dans (1.14) expriment le fait que les points  $P$  et  $R$  se trouvent sur une ellipse de foyers  $A$  et  $B$ , et les points  $Q$  et  $S$  sur une autre ellipse de mêmes foyers (figure 1.9 à droite). Les “billards” de ces ellipses sont gérés par la formule (1.13), seulement avec une excentricité (i.e., un  $\theta$ ) différente. Ainsi, les trajectoires

$$A \mapsto P \mapsto B \mapsto S \mapsto A \quad \text{et} \quad A \mapsto Q \mapsto B \mapsto R \mapsto A$$

reviennent sous le même angle  $\varphi_3$ , car les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ -\theta & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -\psi & 1 \end{pmatrix}$$

permutent.<sup>5</sup> QED.

## Coordonnées cartésiennes et les coniques.

C’est à l’aide de ce secret que Descartes, à l’âge de vingt ans, parcourant l’Europe dans le simple appareil d’un jeune soldat volontaire, résolvait d’un coup d’œil, et comme en se jouant, tous les problèmes géométriques que les mathématiciens de divers pays s’envoyaient mutuellement ...

(J.-B. Biot, *Essai de Géométrie analytique*, 1823, p. 75)

Voici **LE** problème historique, qui a absorbé Descartes pendant 5 à 6 semaines ; il est à l’origine de **SA** géométrie : “La question donc qui auoit esté commencée a resoudre par Euclide, & poursuiuie par Apollonius, sans auoir esté acheuée par personne, estoit telle” (Descartes, p. 306) :

**Le problème de Pappus.**<sup>6</sup> Soient données trois (resp. quatre, cinq) droites  $a, b, c$  (resp.  $d, e$ ). Pour un point  $P$ , notons  $PA, PB, PC$  (resp.  $PD, PE$ ) les distances de  $P$  à ces droites. On cherche le lieu géométrique de tous les points  $P$  pour lesquels

$$PA \cdot PB = PC^2 \quad \text{resp.} \quad PA \cdot PB = PC \cdot PD, \quad PA \cdot PB \cdot PC = PD \cdot PE \cdot M . \quad (1.15)$$

5. les logiciens puristes remarqueront une petite confusion entre hypothèses et conclusion ; cela se nettoie par un argument *ad absurdum*.

6. Le problème original a été légèrement modifié, sans en changer l’essentiel.

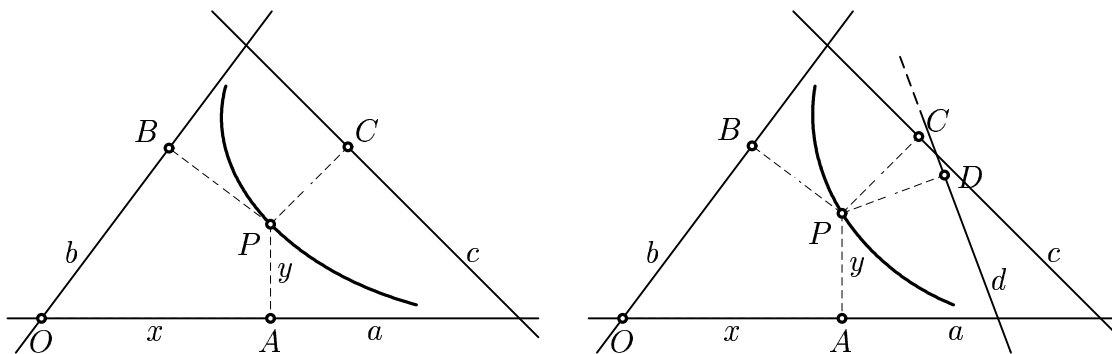


FIG. 1.10 – Le problème de Pappus pour 3 droites (à gauche) et 4 droites (à droite)

On peut encore étendre le problème à six, sept, etc. droites. Pappus prétend que pour le cas de trois ou quatre droites, la courbe “est unam ex tribus conicis sectionibus” ; par contre, pour plus de quatre lignes, les courbes seraient “non adhuc cognitos”.

Pour résoudre le problème de Pappus, Descartes propose de fixer la position du point  $P$  par deux valeurs, une fois par<sup>7</sup>  $x = OA$ , et ensuite par  $y = AP$  (“Que le segment de la ligne  $AB$ , qui est entre les points  $A$  &  $B$ , soit nommé  $x$ . & que  $BC$  soit nommé  $y$ ”). Ainsi sont nées les *coordonnées cartésiennes*. Aujourd’hui, on appelle  $x$  l’*abscisse*,  $y$  l’*ordonnée*, le point  $O$  l’*origine*, la droite  $OA$  l’*axe des  $x$* , et son orthogonale l’*axe des  $y$* .

Avant de progresser dans la solution du problème, développons quelques outils.

### Équations pour droites.

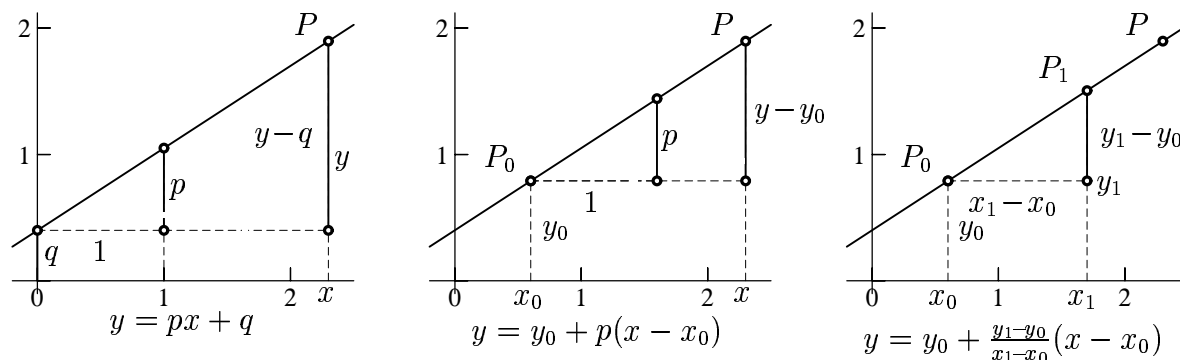


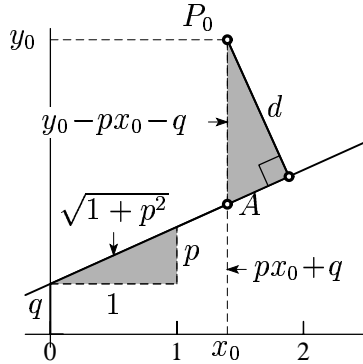
FIG. 1.11 – Équations d’une droite dans les coordonnées cartésiennes

Les équations pour une droite (voir figure 1.11) sont une pure incarnation du théorème de Thalès. On appelle  $p$  la *pente* de la droite. Les trois formules sont utiles si (1) la pente et l’ordonnée à l’origine  $q$  sont connues, (2) la pente et un point  $P_0$  sont connus, (3) deux points  $P_0$  et  $P_1$  sont connus.

**Distance d’un point à une droite.** Soit  $P_0$  un point de coordonnées  $x_0, y_0$ . On cherche

7. Puisque ce sont des inconnues, on les choisit à la fin de l’alphabet ; le  $z$  est déjà utilisé plus haut, donc viennent en suite le  $x$  et le  $y$ .

à calculer la distance  $d$  de ce point à la droite  $y = px + q$  :



On calcule  $P_0A$  par (1.1) ;

les deux triangles grisés sont semblables  
(angles orthogonaux)

(1.16)

Thalès : 
$$d = \frac{|px_0 + q - y_0|}{\sqrt{1 + p^2}} .$$

### Vers la solution du problème de Pappus.

Cette recherche peut être presque toujours rendue plus facile par des transformations analytiques qui simplifient les équations, en faisant évanouir quelques-uns de leurs termes ...

(J.-B. Biot, *Essai de Géométrie analytique*, Paris 1823, p. 145)

Avec (1.16), chacun des facteurs  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  etc. dans (1.15) est de la forme  $a_i x + b_i y + c_i$ . Si l'on effectue les produits, la condition (1.15) devient, pour le cas de trois ou quatre lignes, une équation de la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad (1.17)$$

où  $a, b, c, d, e, f$  sont des constantes connues. Maintenant, Descartes procède ainsi : si une valeur de  $y$  est choisie, nous sommes en face d'une équation quadratique

$$\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha} , \quad (1.18)$$

ce qui détermine deux points (ou un, ou zéro) de notre courbe. Par cette voie, et par la distinction d'innombrables cas différents, Descartes prétend montrer que ces courbes sont effectivement des coniques. Ses calculs ne sont pas convaincants. On doit à Newton (*Arithmetica Universalis*, écrit 1673, publié 1707) une importante simplification de ces théories. Il est en effet le premier à utiliser librement les valeurs négatives pour coefficients et coordonnées. Les preuves ont été reprises par Cramer (1750) qui avoue désespéré : "On voit par cet échantillon, quelle variété de Cas se présenteroit dans les Lignes des Ordres supérieurs ...".

La dernière et majeure simplification de la théorie date du début du 19e siècle, avec l'usage systématique des *changements de coordonnées* (Lacroix, Biot ; voir citation). Les formules deviennent plus belles encore grâce à la notion du calcul matriciel (Cayley 1857). Nous allons donc revenir à cette question à la section II.4.

### Que deviennent les postulats d'Euclide ?

**Lemme.**

$$\begin{array}{l} \text{Toute construction} \\ \text{par règle et compas} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Composition d'opérations rationnelles} \\ \text{et de racines carrées.} \end{array}$$

*Preuve* :  $\Rightarrow$  : Tout ce que fait une construction par règle et compas :

1. Eucl. Post. 1 : relier 2 points :

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y = px + q ;$$

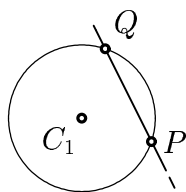
2. Eucl. Post. 3 : cercle centré en  $(x_0, y_0)$  passant par  $(x_1, y_1)$  :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad \text{où} \quad r^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 ;$$

3. Intersection de deux droites :

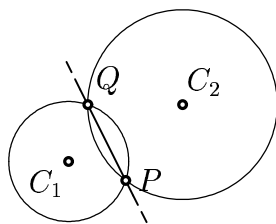
$$\begin{aligned} y &= p_1x + q_1 \\ y &= p_2x + q_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2} , \quad y = p_1x + q_1 ;$$

4. Intersection d'une droite et d'un cercle :



$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r^2 \\ y &= px + q \\ \Rightarrow (x - x_0)^2 + (px + q - y_0)^2 &= r^2 \\ \Rightarrow Ax^2 + 2Bx + C &= 0 , \\ \Rightarrow x &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} ; \end{aligned}$$

5. Intersection de deux cercles :



$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r_0^2 \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 &= r_1^2 \\ (\text{soustraire}) & \\ -2x(x_0 - x_1) + (x_0^2 - x_1^2) - 2y(y_0 - y_1) + (y_0^2 - y_1^2) &= r_0^2 - r_1^2 \\ (\text{équation d'une droite ; retour au point 4.}) & \end{aligned}$$

$\Leftarrow$  :

1. Les opérations rationnelles (additions, multiplications, divisions) se font par Thalès (voir le “dictionnaire” de Descartes (1.1)) ;
2. La racine se fait par le Théorème de la Hauteur (voir (1.1)) ; QED.

Bref, la géométrie d'Euclide correspond à tous les calculs contenant équations linéaires et quadratiques ; par contre toutes les courbes de degré supérieur ou les courbes analytiques appartiennent à la nouvelle géométrie dont est fier Descartes (dans l'introduction au “Livre second” *De la nature des lignes courbes*).

## Coniques ; tangentes, pôles et polaires.

La théorie des pôles et polaires, inventée par Apollonios, devient particulièrement élégante avec les méthodes analytiques. Prenons une ellipse en position habituelle

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.19)$$

et soit  $P_0(x_0, y_0)$  un point. Appliquons maintenant un algorithme qui remplace chaque carré  $x^2$  ou  $y^2$  par un produit  $x \cdot x_0$  et  $y \cdot y_0$ <sup>8</sup>

$$\frac{x_0}{a^2} \cdot x + \frac{y_0}{b^2} \cdot y = 1, \quad (1.20)$$

ce qui représente l'équation d'une droite. Cette droite est appelée la *polaire* de  $P_0$ .

**Proposition 1.** *Si le point  $P_0$  se trouve sur l'ellipse*

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \quad (1.21)$$

*alors la polaire est la tangente à l'ellipse en  $P_0$ .*

*Preuve :* Soit  $P(x, y)$  un autre point sur cette droite (voir figure 1.12 à gauche); posons

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} =: U. \quad (1.22)$$

À cette équation on additionne (1.21) et on soustrait deux fois (1.20) pour obtenir

$$U - 2 + 1 = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} > 0,$$

donc  $U > 1$  et tout autre point de cette droite est en dehors de l'ellipse (une argumentation que nous connaissons déjà...). QED.

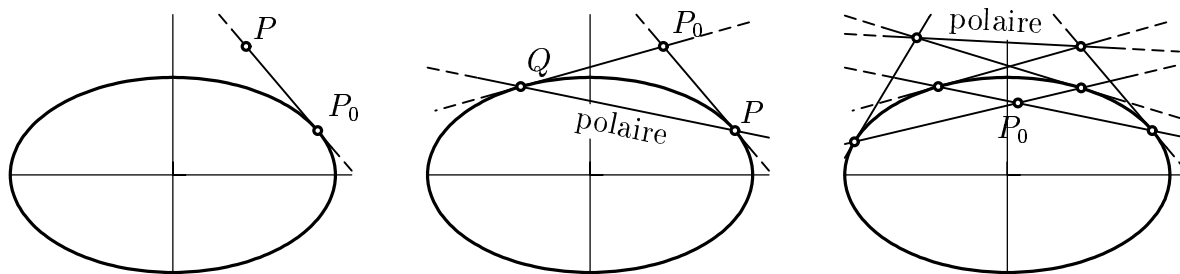


FIG. 1.12 – Pôle et polaire

Voici une observation importante :

$$\begin{aligned} &\text{La formule pour la polaire étant parfaitement symétrique,} \\ &\text{le point } P_0 \text{ se trouve aussi sur la polaire du point } P. \end{aligned} \quad (1.23)$$

En échangeant  $P$  et  $P_0$ , cela amène au résultat suivant (voir figure 1.12 au milieu) :

**Proposition 2.** *Si le point  $P_0$  se trouve à l'extérieur de l'ellipse, alors la polaire de  $P_0$  passe par les deux points de contact à l'ellipse des deux tangentes depuis le point  $P_0$ . QED.*

**Proposition 3.** *Si le point  $P_0$  se trouve à l'intérieur de l'ellipse, alors la polaire de  $P_0$  est le lieu géométrique des points, pour lesquels la polaire passe par le point  $P_0$  (voir figure 1.12 à droite). QED.*

**Exemple.** La polaire d'un foyer  $F$  est la directrice correspondante.

---

8. et, plus tard, chaque terme linéaire  $2x$  par une somme pondérée  $x_0 + x$ .

**Condition de contact.** La polaire permet de calculer la tangente depuis un point  $P_0$  à la conique ; il suffit de calculer l'intersection de la polaire avec la courbe pour trouver le point de contact. Mais il y a une façon plus simple :

Prenons une droite de la forme

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1 \quad (1.24)$$

où les deux constantes  $u$  et  $v$  sont les coordonnées des intersections avec les axes.

*Question :* trouver une condition pour que cette droite soit tangente à l'ellipse ?

*Solution :* si nous posons

$$u = \frac{a^2}{x_0}, \quad v = \frac{b^2}{y_0},$$

alors la droite (1.24) est de la forme (1.20). Il s'agit d'une tangente si le point  $(x_0, y_0)$  satisfait (1.21), ce qui donne

$$\frac{a^2}{u^2} + \frac{b^2}{v^2} = 1 \quad (1.25)$$

comme *condition de contact*.

*Condition de contact pour  $y = px + q$  :* cette équation, écrite sous la forme (1.24), devient

$$\frac{x}{-\frac{q}{p}} + \frac{y}{q} = 1, \quad (1.25) \Rightarrow a^2 p^2 + b^2 - q^2 = 0 \quad (1.26)$$

comme condition de contact.

*Tangentes depuis un point  $P_0$  :* Une droite passant par  $P_0(x_0, y_0)$  est de la forme

$$y - y_0 = p \cdot (x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y = px + (y_0 - px_0)$$

et la condition de contact (1.26) devient ici

$$a^2 p^2 + b^2 - (y_0 - px_0)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p^2(a^2 - x_0^2) + 2px_0y_0 + (b^2 - y_0^2) = 0. \quad (1.27)$$

Ceci représente une équation de degré 2 en les pentes  $p$  des deux tangentes.

**Le cercle de Monge.** *Question :* quel est le lieu géométrique des points depuis lesquels une ellipse est vue sous un angle droit ?

*Réponse.* Nous divisons l'équation (1.27) par le coefficient de  $p^2$  pour avoir

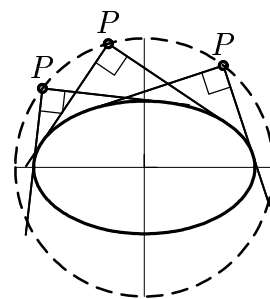
$$p^2 + 2p \cdot \frac{x_0 y_0}{a^2 - x_0^2} + \frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2} = 0.$$

Les deux tangentes sont orthogonales si  $p_1 \cdot p_2 = -1$ , donc, par Viète, si

$$\frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2} = -1 \quad \Rightarrow \quad x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2. \quad (1.28)$$

Les points  $P_0$  se trouvent sur le cercle de rayon  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , appelé *cercle de Monge*<sup>9</sup>.

**Tangente à une ellipse.** Le résultat suivant a une certaine similitude avec le précédent ; cette fois-ci l'angle droit est dans un foyer :



<sup>9</sup> G. Monge 1746-1818, célèbre géomètre français ; avec L. Carnot fondateur de l'École Polytechnique à Paris (1794).

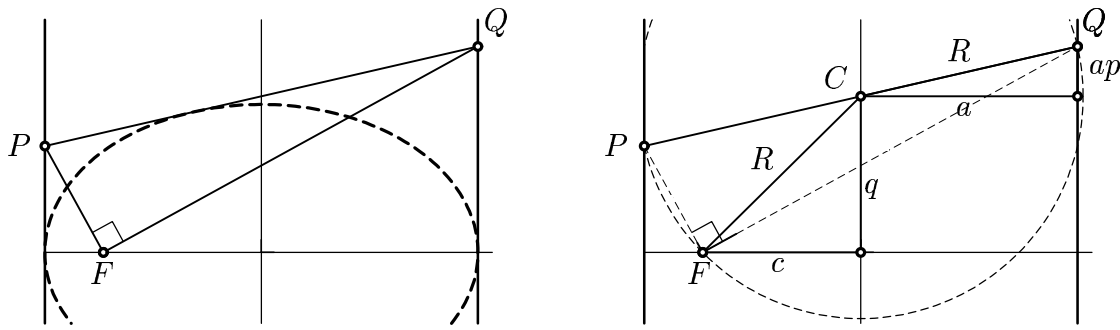


FIG. 1.13 – Tangente à une ellipse

**Proposition** (Poncelet 1822, Pl. IX, Fig. 74). Soient  $P$  et  $Q$  deux points sur les tangentes des sommets des grands axes d’une ellipse, respectivement, et  $F$  un foyer. Alors

$$\text{La droite } (PQ) \text{ est tangente à l’ellipse} \quad \Leftrightarrow \quad \text{l’angle } \widehat{PFQ} \text{ est droit}$$

(voir figure 1.13 à gauche).

*Preuve.* Prenons la droite  $PQ$  sous la forme habituelle  $y = px + q$ . Qui dit “angle droit”, pense “cercle de Thalès” (voir figure 1.13 à droite). Ce cercle, centré en  $C$  (au milieu de  $PQ$ ), a un rayon  $R$  satisfaisant

$$R^2 = a^2 + a^2 p^2.$$

Avec cette relation, nous avons

$$a^2 p^2 + b^2 - q^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 = c^2 + q^2 = a^2 - b^2 + q^2.$$

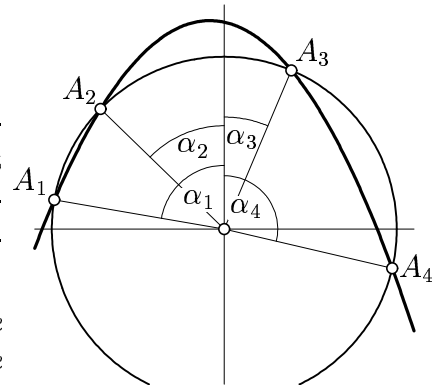
La première condition est la condition de contact (1.26) ; la deuxième indique que le cercle passe par le foyer  $F$ . QED.

**Parabole et cercle.** Terminons ce paragraphe par un résultat “privé”, que votre didascalos, alors collégien, avait trouvé pendant les vacances d’été de 1960. Une démonstration simple est cherchée. Laissons ce challenge à la jeunesse passionnée de géométrie ! Le voici :

**Proposition.** Quatre points  $A_1, A_2, A_3, A_4$  d’un cercle se trouvent sur une parabole  $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  (à axe vertical) si et seulement si

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \quad (1.29)$$

modulo  $2\pi$ , où les  $\alpha_i$  sont les angles entre  $A_i$ , le centre du cercle et le “Pôle nord” (angles orientés, voir dessin).



## II.2 Constructibilium omnium, et inconstructibilium

Magnopere sane est mirandum, quod, quum iam Euclidis temporibus circuli divisibilitas geometrica in tres et quinque partes nota fuerit, nihil his inventis intervallo 2000 annorum adiectum sit, ...

(C.F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, 1801, Art. 365)

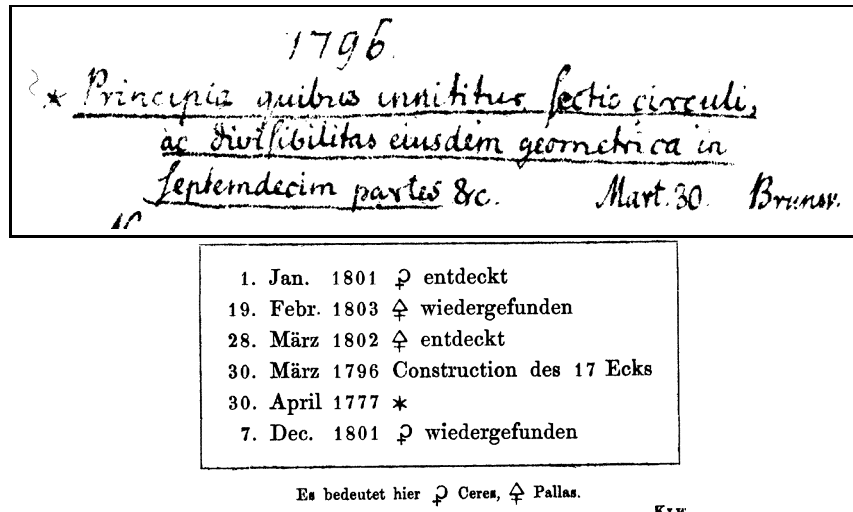


FIG. 2.1 – Fac-similé du début du “Notizenjournal” de Gauss, 30 mars 1796, concernant le 17-gone (dessus); les dates les plus importantes de sa vie pour Gauss lui-même (dessous)

Dirichlet hält Vorlesungen über den Gegenstand, dem Gauss seinen ganzen Ruhm verdankt. (B. Riemann, étudiant à Berlin, dans une lettre à ses parents; comm. par E. Neuenschwander)

Pour Descartes, “sa” nouvelle géométrie aurait dû évincer toutes les mathématiques grecques (Euclide, Apollonios, etc., et les efforts pour chercher des constructions avec règle et compas; voir les citations du paragraphe précédent), à l’exception des théorèmes de Thalès et Pythagore.

Revers inattendu: précisément la reprise des questions de construction avec règle et compas du jeune Gauss amène aux plus belles victoires en algèbre et en géométrie. Le 30 mars 1796, Gauss découvre que le 17-gone peut être construit par règle et compas; ému par cette découverte, la *première* nouveauté dans ce secteur après plus de 2000 ans (voir citation), il décide de devenir mathématicien. Il commence un “Notizenjournal”, où il note, l’une après l’autre, toutes les découvertes de ses études solitaires. La “divisibilitas in septemdecim partes” sera la première de ces notices (voir figure 2.1 en haut). Plus tard, Gauss marquera cette date parmi les 6 les plus importantes de sa vie (voir figure 2.1 en bas).

Nous commençons par étendre le Lemme de la section précédente (concernant les constructions par règle et compas) au plan complexe :

**Le plan complexe.** Notre outil est l’identification du plan

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\} \quad (2.1)$$

avec le plan complexe (Gauss 1799, Argand 1806). Pour le “nombre”  $\sqrt{-1}$  Euler introduit (en 1777) le symbole  $i$ , qui possède la propriété

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{i.e.} \quad i^2 = -1, \quad (2.2)$$

(voir Fig. 2.2 à gauche). On note  $\bar{z} = x - iy$  le nombre *complexe conjugué*. On appelle  $\arg(z) = \varphi = \arctan(y/x)$  l’*argument* de  $z$  et  $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$  la *valeur absolue*. Ainsi, on a

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (2.3)$$

en coordonnées polaires.

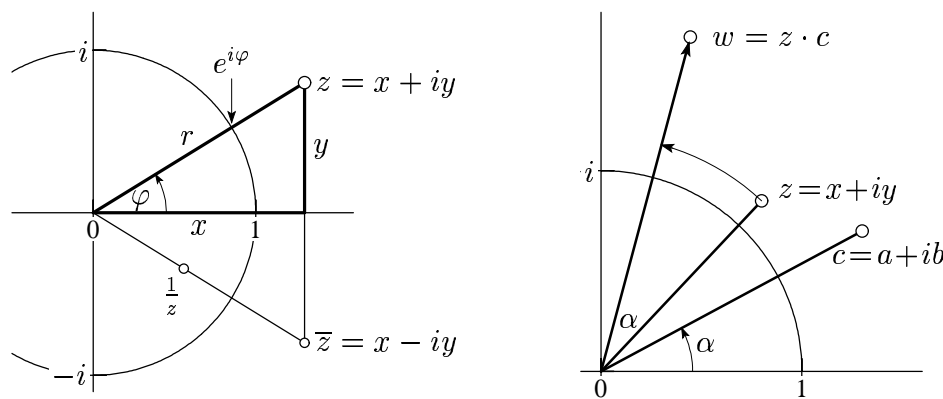


FIG. 2.2 – Plan complexe

**Propriétés algébriques.** Le produit de deux nombres complexes devient, en tenant compte de (2.2),

$$\begin{aligned} c = a + ib &= s(\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ z = x + iy &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \end{aligned} \Rightarrow c \cdot z = ax - by + i(bx + ay) \quad (2.4)$$

ou

$$rs[(\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi) + i(\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi)] = rs(\cos(\alpha + \varphi) + i(\sin(\alpha + \varphi))) \quad (2.5)$$

La *signification géométrique* du produit est alors évidente : la multiplication d'un nombre  $z$  avec  $c$  effectue une rotation par  $\alpha = \arg c$  suivie d'une homothétie par  $s = |c|$  (voir Fig. 2.2 à droite).

La *division* tourne dans l'autre sens et *divise* le rayon par  $|c|$ . Ses formules algébriques se font “en multipliant numérateur et dénominateur par le complexe conjugué” :

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{r^2} \quad \text{et} \quad \frac{c}{z} = \frac{c\bar{z}}{r^2} \quad (z \neq 0). \quad (2.6)$$

$\mathcal{C}$  devient ainsi un *corps commutatif*.

**La fonction exponentielle.** Celle-ci a ses origines dans les processus de “croissance exponentielle”, i.e. quand une certaine quantité croît (ou décroît) proportionnellement à elle-même (populations, bactéries, températures, etc.). Cela amène à (Leibniz 1684, Euler 1748 ; voir [HW97, p. 25-27])

$$e^x = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N. \quad (2.7)$$

Les produits  $(1 + \frac{x}{N})^j$  décrivent un polygone (voir figure 2.3 à gauche) qui s'approche de la courbe  $e^x$  quand  $N \rightarrow \infty$ .

**La formule d'Euler.** Remplaçons maintenant dans (2.7) la variable  $x$  par une valeur purement imaginaire  $iy$ . Le nombre  $1 + \frac{iy}{N}$  forme un petit triangle rectangle (un côté = 1, l'autre =  $\frac{y}{N}$ ) et ses puissances s'enroulent sur une spirale. Pour la limite  $N \rightarrow \infty$ , la figure devient un secteur de cercle dont  $y$  mesure la longueur d'arc (voir Fig. 2.3 à droite). Cette figure rend immédiatement “visible” la célèbre *formule d'Euler*

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad (2.8)$$

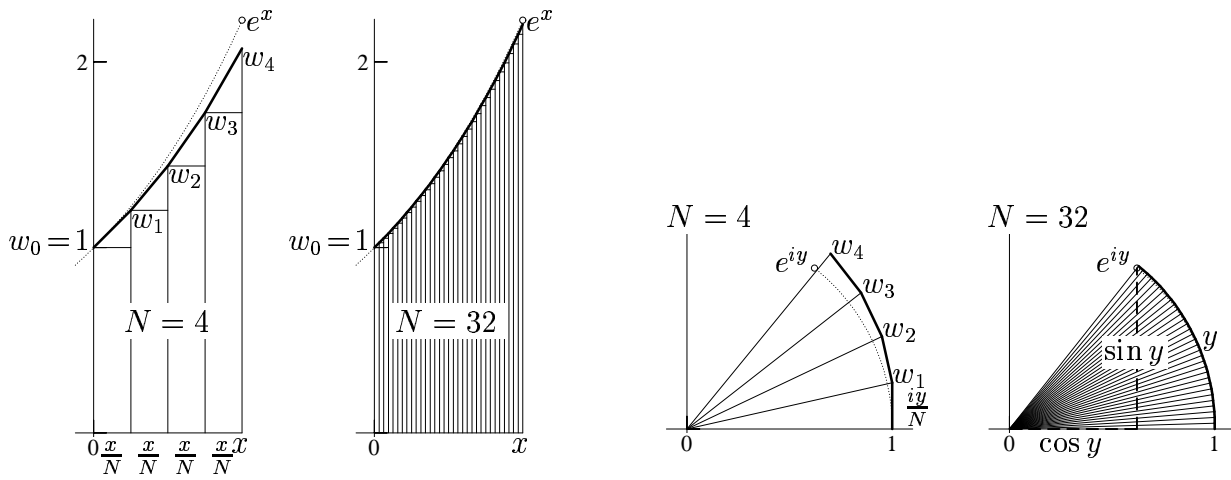


FIG. 2.3 – Fonction exponentielle; à gauche: pour  $x$  réel; à droite: pour  $iy$  purement imaginaire

à l'aide de laquelle la représentation polaire (2.3) devient

$$z = x + iy = r \cdot e^{i\varphi} \quad \text{et le produit (2.5)} \quad c \cdot z = rs \cdot e^{i(\alpha+\varphi)}. \quad (2.9)$$

Voici des cas particuliers de la formule d'Euler :

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1. \quad (2.10)$$

*Remarque.* La preuve originale d'Euler de (2.8) n'est pas géométrique comme ici ; elle utilise la série de Taylor  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$  (voir [HW97, p. 59]).

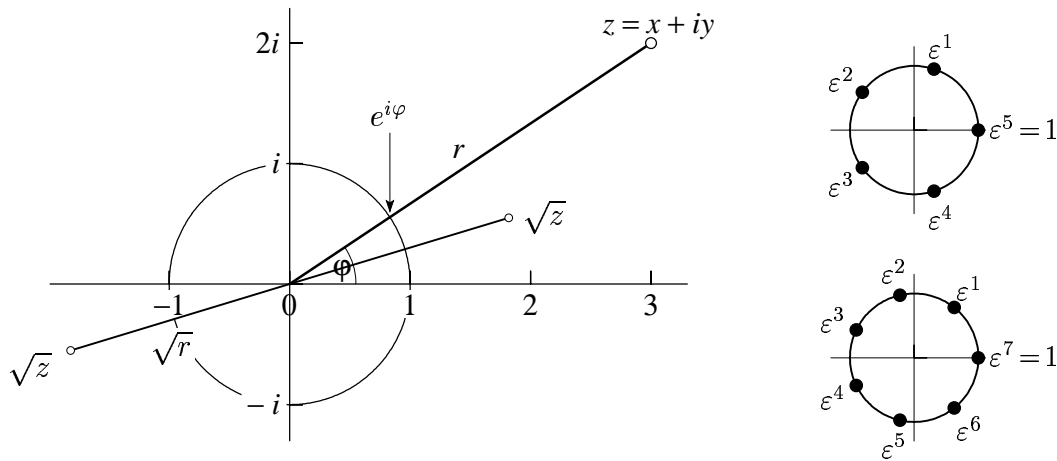


FIG. 2.4 – Racine carrée complexe (à gauche) ; racines de l'unité ( $n=5$  et  $n=7$  ; à droite)

**Racines complexes.** Pour un nombre  $z$  de norme  $r$  et d'argument  $\varphi$ , par les propriétés du produit, la racine complexe possède la norme  $\sqrt{r}$  et l'argument  $\frac{\varphi}{2}$  (voir figure 2.4 à gauche). Toutefois, nous devons être prudents, car  $e^{2i\pi} = 1$  ; il y a donc une deuxième racine d'argument  $\frac{\varphi}{2} + \pi$ .

Comme la racine complexe rajoute à la racine réelle la bissection d'un angle, qui peut se faire par règle et compas (Eucl. I.9), nous avons en extension du Lemme précédent :

**Lemme 2.** *Toute composition d'opérations rationnelles et de racines carrées dans le plan complexe correspond à une construction par règle et compas.*

**Racines  $n$ -ièmes.** Similairement, pour un nombre  $z$  de norme  $r$  et d'argument  $\varphi$ , la racine  $n$ -ième possède la norme  $\sqrt[n]{r}$  et les arguments  $\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ). En particulier, pour  $z = 1$ , nous avons

$$\sqrt[n]{1} = \varepsilon^k = e^{\frac{2ki\pi}{n}}, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.11)$$

qui s'appellent les *racines de l'unité* (voir figure 2.4 à droite). Ces points représentent les sommets de polygones réguliers inscrits dans le cercle unitaire. Ainsi, la solution de l'équation

$$z^n - 1 = 0 \quad (2.12)$$

nous fournit des méthodes pour construire ces polygones.

**Méthode de Gauss et Vandermonde pour racines 5-ièmes.** Avant de nous attaquer

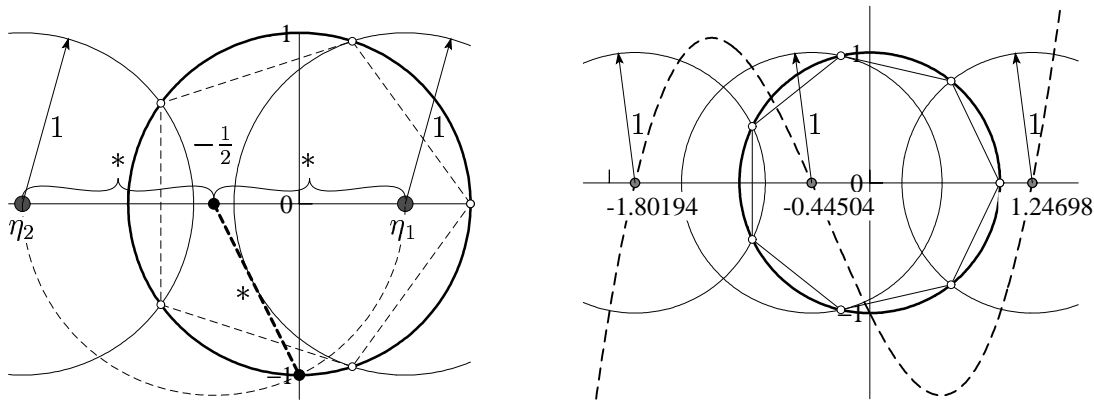


FIG. 2.5 – Construction du pentagone régulier inscrit dans un cercle (à gauche); du heptagone régulier (à droite).

au célèbre 17-gone, traitons le cas  $n = 5$  avec les mêmes idées qui nous seront utiles plus tard : une longue histoire de résolution d'équations algébriques (Tartaglia-Cardano 1545, Lagrange 1770) a conduit à rechercher certaines combinaisons de racines qui satisfont une équation de degré inférieur. Pour l'équation des racines de l'unité, le bon choix est dans des sommes du type (Vandermonde 1771)

$$\varepsilon + \varepsilon^k + \varepsilon^{k^2} + \dots ,$$

que Gauss appelle “périodes”, et où les puissances sont à prendre modulo  $n$ . Nous voici confrontés à la théorie des nombres, à laquelle Gauss a consacré son premier grand travail (*Disquisitiones Arithmeticae* 1801).

*Idée.* Prenons  $k = 2$  et calculons les restes modulo 5 de ses puissances

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1 . \quad (2.13)$$

Puisque tous les restes  $\neq 0$  modulo 5 y sont présents, nous sommes sur la bonne voie. Prenons un terme sur deux et posons

$$\varepsilon + \varepsilon^4 =: \eta_1, \quad \varepsilon^2 + \varepsilon^3 =: \eta_2 . \quad (2.14)$$

Calculons

$$\begin{aligned} \eta_1 + \eta_2 &= \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = -1 \\ \eta_1 \cdot \eta_2 &= \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon + \varepsilon^2 = -1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

car la somme de toutes les racines est 0. Par Viète, les deux  $\eta$  sont racines de l'équation

$$\eta^2 + \eta - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (2.16)$$

et nous avons réduit une équation de degré 5 à une équation de degré 2.

Comme dans notre cas,  $\varepsilon^4$  et  $\varepsilon^3$  sont les complexes conjugués de  $\varepsilon$  et  $\varepsilon^2$ , les deux  $\eta$  sont le double des parties réelles de  $\varepsilon$  et  $\varepsilon^2$ . Cela amène à la construction de la figure 2.5 à gauche.

**Calcul pour racines 7-ièmes.** Ici les puissances de 2 modulo 7 deviennent

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 . \quad (2.17)$$

Cette suite est trop courte. Prenons  $k = 3$  :

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1 . \quad (2.18)$$

Mais aucune tentative comme par exemple  $\eta_1 = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4$  et  $\eta_2 = \varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^5$  ne permet de calculer le produit des  $\eta$ . Il faut définir

$$\varepsilon + \varepsilon^6 =: \eta_1, \quad \varepsilon^3 + \varepsilon^4 =: \eta_2, \quad \varepsilon^2 + \varepsilon^5 =: \eta_3 . \quad (2.19)$$

Ici, on calcule déjà un peu plus péniblement

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = -1, \quad \eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_3 + \eta_3\eta_1 = -2, \quad \eta_1\eta_2\eta_3 = 1 , \quad (2.20)$$

c'est-à-dire que les trois  $\eta$  sont les racines de

$$\eta^3 + \eta^2 - 2\eta - 1 = 0 . \quad (2.21)$$

Nous verrons plus tard que cette équation ne permet pas de construction pas règle et compas. Nous nous contentons donc d'un calcul numérique pour produire le dessin à droite de la figure 2.5.

**Le 17-gone par règle et compas.** Venons-en maintenant à la grande découverte de Gauss, la construction du 17-gone régulier, i.e., la solution de l'équation

$$\varepsilon^{17} - 1 = 0 \quad (2.22)$$

par une suite d'équations de degré 2. Essayons les puissances de 2

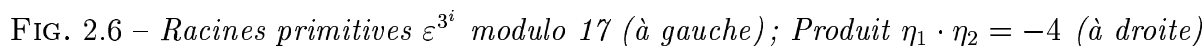
$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 13 \rightarrow 9 \rightarrow 1 . \quad (2.23)$$

Cette suite est trop courte. La suivante fonctionne :

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 13 \rightarrow 5 \rightarrow 15 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 14 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 12 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 1 . \quad (2.24)$$

On prend un exposant sur deux pour  $\eta_1$  (les points noirs dans la figure 2.6 à gauche) et le reste pour  $\eta_2$  (les points grisés) :

$$\begin{aligned} \eta_1 &:= \varepsilon^1 + \varepsilon^9 + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{15} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^8 + \varepsilon^4 + \varepsilon^2 \\ \eta_2 &:= \varepsilon^3 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{11} + \varepsilon^{14} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{12} + \varepsilon^6 . \end{aligned} \quad (2.25)$$


$$\eta^2 + \eta - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \quad \eta_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \quad (2.26)$$
$$\begin{aligned}\mu_1 &:= \varepsilon^1 + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^4 & \mu_3 &:= \varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \varepsilon^{14} + \varepsilon^{12} \\ \mu_2 &:= \varepsilon^9 + \varepsilon^{15} + \varepsilon^8 + \varepsilon^2 & \mu_4 &:= \varepsilon^{10} + \varepsilon^{11} + \varepsilon^7 + \varepsilon^6.\end{aligned}\tag{2.27}$$
$$\mu_1 + \mu_2 = \eta_1, \quad \mu_1 \mu_2 = -1, \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = \frac{\eta_1 + \sqrt{\eta_1^2 + 4}}{2}, \quad (2.28)$$

$$\mu_3 + \mu_4 = \eta_2, \quad \mu_3 \mu_4 = -1, \quad \Rightarrow \quad \mu_3 = \frac{\eta_2 + \sqrt{\eta_2^2 + 4}}{2}. \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \varepsilon^1 + \varepsilon^{16}, \\ \beta_2 &= \varepsilon^{13} + \varepsilon^4 \end{aligned} \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 = \mu_1, \quad \beta_1 \beta_2 = \mu_3 \Rightarrow \beta_1 = \frac{\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 - 4\mu_3}}{2}. \quad (2.30)$$
$$\varepsilon^1 + \varepsilon^{16} = \beta_1, \quad \varepsilon^1 \varepsilon^{16} = 1, \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 - 4}}{2}, \quad (2.31)$$

Gauss a encore compris que la même méthode s'applique pour chaque nombre de la forme

$$n = 2^{(2^k)} + 1 \quad \text{i.e., pour } n = 3, 5, 17, 257, 65537, \quad (2.32)$$

aussi longtemps qu'il s'agit d'un nombre premier (ce qui est le cas pour ces 5). La conjecture de Fermat ("*tous* ces nombres sont des nombres premiers") a pris fin grâce au génie calculateur d'Euler, qui a trouvé le contre-exemple  $2^{(2^5)}+1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$ .

## L'impossibilité de constructions par règle et compas.

Ce principe est annoncé par M. Gauss à la fin de son ouvrage, mais il n'en a pas donné la démonstration.

(P.L. Wantzel, *Journ. de Math.*, vol. 2 (1837), p. 366-372)

... will ich Ihnen hier einen Fall vorführen — um so lieber, als im grossen Publikum so *wenig Verständnis für Beweise dieser Art* vorhanden ist.

(F. Klein, *Elementarmath. vom höheren Standp.*, éd. de 1924, p. 55)

Vers la fin des *Disquisitiones Arithmeticae*, Gauss énonce en majuscules (“OMNIQUE RIGORE DEMONSTRARE POSSUMUS ...”) que tous les autres cas ne possèdent *pas* de constructions par règle et compas ; mais il n'en donne pas de démonstration “rigore”. Celle-ci fut finalement élaborée par P.L. Wantzel (1837, voir citation). Nous montrons ici un cas particulier :

**Théorème.** *L'heptagone régulier ne peut être construit par règle et compas.*

*Preuve* (d'après F. Klein 1908). *Pas 1.*

D'abord on montre facilement que l'équation (2.21) ne peut pas avoir de *racine rationnelle* : l'hypothèse  $\eta = \frac{n}{m}$ , avec  $n$  et  $m$  premier entre eux, donne

$$n^3 + n^2m - 2nm^2 - m^3 = 0 .$$

Donc  $n^3$  est divisible par  $m$ , et  $n$  doit contenir un des facteurs premiers de  $m$ . La même chose est vraie si on échange  $n$  et  $m$ , et nous arrivons à une contradiction, car  $\pm 1$  n'est certainement pas racine de (2.21).

*Pas 2.*

Supposons que (2.21) possède une racine de la forme

$$\eta_1 = \frac{\alpha + \beta\sqrt{R}}{\gamma + \delta\sqrt{R}} , \quad (2.33)$$

où  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  et  $R$  sont rationnels. Si  $\gamma - \delta\sqrt{R} = 0$ , la racine  $\sqrt{R} = \frac{\gamma}{\delta}$  est rationnelle et nous sommes de retour au pas 1. Sinon, nous multiplions numérateur et dénominateur de (2.33) par cette expression, ce qui donne

$$\eta_1 = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{R})(\gamma - \delta\sqrt{R})}{\gamma^2 - \delta^2 \cdot R} = P + Q\sqrt{R} , \quad (2.34)$$

où de nouveau  $P$  et  $Q$  sont rationnels. Cette expression est maintenant insérée dans l'équation (2.21) pour avoir

$$\eta_1^3 + \eta_1^2 - 2\eta_1 - 1 = (P + Q\sqrt{R})^3 + (P + Q\sqrt{R})^2 - 2(P + Q\sqrt{R}) - 1 = 0 . \quad (2.35)$$

Développons, cela donne

$$M + N\sqrt{R} = 0 , \quad (2.36)$$

où, encore et toujours,  $M$  et  $N$  sont rationnels. Si  $N \neq 0$ , nous avons  $\sqrt{R} = -\frac{M}{N}$  et, une fois de plus, cette racine devrait être rationnelle. Sinon,  $M = 0$  et  $N = 0$  et a fortiori  $M - N\sqrt{R} = 0$ . Par conséquent (mêmes calculs avec  $\sqrt{R}$  remplacé par  $-\sqrt{R}$ )

$$\eta_2 = P - Q\sqrt{R} \quad (2.37)$$

est *aussi* racine de (2.21). Mais par Viète

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = -1 \quad \Rightarrow \quad \eta_3 = -1 - \eta_1 - \eta_2 = -1 - 2P \quad (2.38)$$

est une racine de (2.21) rationnelle. Cela est impossible par les pas 1.

*Pas n.*

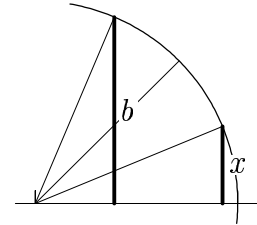
La suite est maintenant simple : si  $\eta_1$  est composé de *plusieurs* racines (emboîtées ou non), on les élimine une après l'autre en parcourant le “Pas 2” plusieurs fois et en échangeant  $\eta_1$  et  $\eta_3$  après chaque tour. QED.

**La trisection de l'angle.** Le célèbre problème classique “Datum angulum in tres partes æquales secare” s'exprime, en employant les identités

$$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha$$

et  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ , par l'équation algébrique

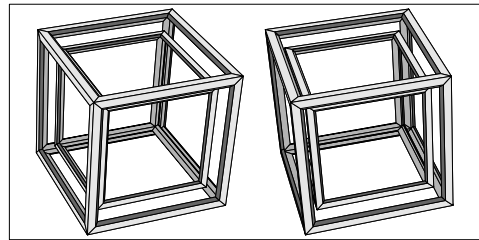
$$-4x^3 + 3x = b$$



où  $x = \sin \alpha$ ,  $b = \sin(3\alpha)$  (cf. section I.4 et Viète 1593, *Opera*, p. 290). Il s'agit de nouveau d'une équation cubique ; la même preuve que celle de l'heptagone s'applique aussi, sauf pour la partie sur les racines rationnelles. Donc, pour certains cas (comme pour exemple pour  $180^\circ$ ), la trisection peut être possible, *toutefois, il n'existe pas de construction générale pour ce problème.*

**La duplication du cube.** Le problème de la duplication du cube (voir section I.3 sur les origines des coniques) consiste à déterminer la racine de

$$x^3 - 2 = 0.$$



Une fois compris que cette équation n'a pas de racine rationnelle (ce qui est maintenant facile) la même preuve s'applique encore pour obtenir le résultat que *la duplication du cube est impossible par règle et compas* (voir le dessin ; il faut d'ailleurs une sacrée confiance dans les compétences scientifiques de votre didascalos pour vraiment croire que le grand cube contient le double du volume du petit !).

**La quadrature du cercle.**

Ich kann mit einigem Grunde zweifeln, ob gegenwärtige Abhandlung von denjenigen werde gelesen, oder auch verstanden werden, die den meisten Antheil davon nehmen sollten, ich meyne von denen, die Zeit und Mühe aufwenden, die Quadratur des Circuls zu suchen. Es wird sicher genug immer solche geben ... die von der Geometrie wenig verstehen ...  
(J.H. Lambert, 1770)

*La quadrature du cercle* est le dernier des grands problèmes classiques. On demande, pour un cercle donné, de construire par règle et compas un carré de même aire. Ce problème, consistant à trouver la valeur de  $\pi$  ou  $\sqrt{\pi}$ , a suscité d'innombrables tentatives infructueuses. On a fini par penser qu'une telle construction est impossible



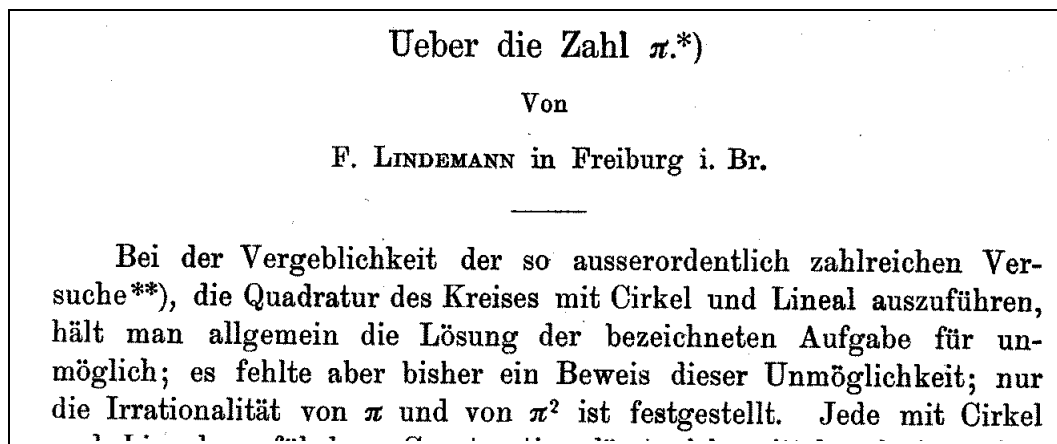


FIG. 2.7 – Début de l'article de Lindemann (*Math. Ann.* vol. 20 (1882), p. 213)

(Lambert 1770, voir citation). Lambert a trouvé que  $\pi$  doit être irrationnel. La preuve rigoureuse de cette affirmation est due à Legendre (1794, voir [HW97], sect. I.6).

Cela ne suffit pas, car les grandeurs constructibles par règle et compas peuvent très bien être irrationnelles (exemple  $\sqrt{2}$ ). La preuve a été achevée par Ch. Hermite (1873) et F. Lindemann (voir fig. 2.7), qui ont prouvé que  $e$  et  $\pi$  sont *transcendants*, i.e., solution d'aucune équation algébrique ! Cette preuve analytique est très difficile.

*Littérature.* Pour ces questions, nous conseillons la *Géométrie élémentaire* de F. Klein, 1896, Bibmath 50/5, qui donne une preuve élémentaire du résultat de Lindemann. Les calculs explicites pour le 257-gone ont été faits par Richelot (1832, *Crelle J.* vol. 9). Le “Professor J. Hermes” a consacré dix ans de sa vie au calcul du 65537-gone ; la solution se trouve dans une grande boîte au Séminaire mathématique de Göttingen (1894), où l'on pourra toujours aller la chercher.

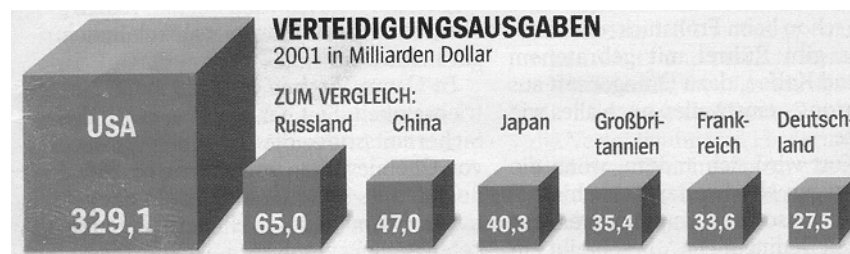


FIG. 2.8 – La duplication ... ou plutôt la 329ification du cube ... (Source : *Der Spiegel* 12/2003). Attention : les rapports sont faux ; le programmeur de ce soft graphique est soit mauvais mathématicien, soit bon psychologue ...

## II.3 Géométrie de l'espace et calcul vectoriel

En latin (1) *vehere*, *vectus* “transporter”, d'où (a) *vehiculum* “moyen de transport” (b) *vectura* “transport” ; *vector* “qui transporte” ...

(Robert, *Dict. étymologique du français*.)

La géométrie de l'espace débute dans le livre XI des *Éléments* d'Euclide par une longue suite de définitions et de propositions fades. La géométrie analytique prouve ici sa puis-

sance : on rajoute tout simplement une troisième coordonnée  $z$ . Qui sait calculer avec deux coordonnées, sait aussi calculer avec trois. Avec la même aisance, on rajoutera plus tard une quatrième coordonnée, puis une cinquième ... etc. La seule limite est alors le réservoir des lettres de l'alphabet. Il est alors mieux d'écrire

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (3.1)$$

pour ces coordonnées.

**Notation vectorielle.** Une deuxième révolution, comparable à celle de Descartes, a lieu vers la fin du 19e siècle avec l'introduction de la notation des “nombres composés”, “complexes” ou “vecteurs” ; on considère alors tout ce  $n$ -tuplet de coordonnées comme *un seul objet mathématique*

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{ou} \quad a = (a_1, a_2, \dots, a_n) . \quad (3.2)$$

**Développement historique des “vecteurs”.** Il y a plusieurs sources ; comme lors de chaque révolution, nous avons une pléthore de citations :

A) *Grassmann* (“*extensive Größen*”).

La Geometria analitica cartesiana fu certo un grande progresso. Ma da lungo tempo si osservò ... e il lavoro più profondo che abbiasi su questo soggetto è senza dubbio l'*Ausdehnungslehre* pubblicato dal Grassmann ... (G. Peano 1894, *Opere Scelte* III, p. 340)

... il est très utile d'introduire la considération des nombres complexes, ou nombres formés avec plusieurs unités, ...

(Peano, *Math. Ann.*, vol. 32 (1888) p. 450)

En Allemagne, le théologien et linguiste Hermann Grassmann (1809-1877), autodidacte en mathématiques, publie en 1844 *Die lineale Ausdehnungslehre*, ouvrage illisible, truffé d'idées mystiques et abstraites. En 1862 paraît une édition révisée, qui n'attire pas davantage l'attention des lecteurs. Ses idées deviennent connues en mathématiques seulement 20 à 30 ans plus tard (voir citations de Peano).

B) *Hamilton* (*quaternions*).

At the age of five Hamilton could read Latin, Greek, and Hebrew. At eight he added Italian and French ; at ten he could read Arabic and Sanscrit and at fourteen, Persian.

(M. Kline, *Math. Thought from Anc. to Mod. Times*, (1972), p. 777)

Tomorrow will be the fifteenth birthday of the Quaternions. They started into life, or light, full grown, on the 16th of October, 1843, as I was walking with Lady Hamilton to Dublin, and came up to Brougham Bridge. That is to say, I then and there felt the galvanic circuit of thought closed ... I felt a *problem* to have been at that moment *solved*, an intellectual *want relieved*, which had *haunted* me for at least *fifteen years* before.

(Hamilton ; cité de M. Kline, *Math. Thought*, (1972), p. 779)

William R. Hamilton (1805-1865), célèbre physicien et mathématicien irlandais (optique, mécanique), introduit les nombres complexes en 1837

$$a + ib \approx (a, b)$$

comme *paires de deux nombres réels*, ce qui est encore valable de nos jours. Puis, il lutte avec acharnement (voir citation) pour généraliser ces nombres à *trois* dimensions. Finalement, il parvient à trouver (1843) une généralisation à *quatre* dimensions

$$a + bi + cj + dk ,$$

les *quaternions*. Grâce aux règles de multiplication

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad & ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \\ & ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j, \end{aligned} \quad (3.3)$$

les quaternions deviennent un *corps non-commutatif*. Hamilton et ses successeurs (Tait ...) font de ces quaternions une puissante religion, qui aurait dû guérir la physique et les mathématiques de tous leurs maux. Mais dans notre monde quatre dimensions sont une de trop ; il faut donc extraire d'un quaternion la partie tridimensionnelle

$$bi + cj + dk \approx (b, c, d) ,$$

qu'Hamilton appelle *vector* (1845).

C) *Heaviside, Gibbs (vecteurs en physique)*.

In mathematics and especially in physics two very different kinds of quantity present themselves. Consider, for example, mass, time, density, temperature, force, displacement of a point, velocity, and acceleration. Of these quantities some can be represented adequately by a single number — (...) A *vector* is a quantity which is considered as possessing *direction* as well as *magnitude*. A *scalar* is a quantity which is considered as possessing *magnitude* but no direction.

(Gibbs, *Vector Analysis* (1901), p. 1)

En physique, certaines grandeurs, telles vitesse, force, champ électrique ou magnétique, ne possèdent pas seulement une *valeur*, mais aussi une *direction*. Les physiciens commencent alors à appliquer les idées d'Hamilton à la théorie de la mécanique, à l'électricité et au magnétisme (Clifford, Heaviside, Gibbs) ; ils trouvent finalement qu'il vaut mieux “nettoyer” la théorie vectorielle de toute trace de quaternions. Ils sont alors plus proches des idées de Grassmann que de celles de Hamilton.

**Signification géométrique des vecteurs.** Si nous fixons deux vecteurs orthonormés de base  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$ , nous avons les équivalences ( $n = 2$ )

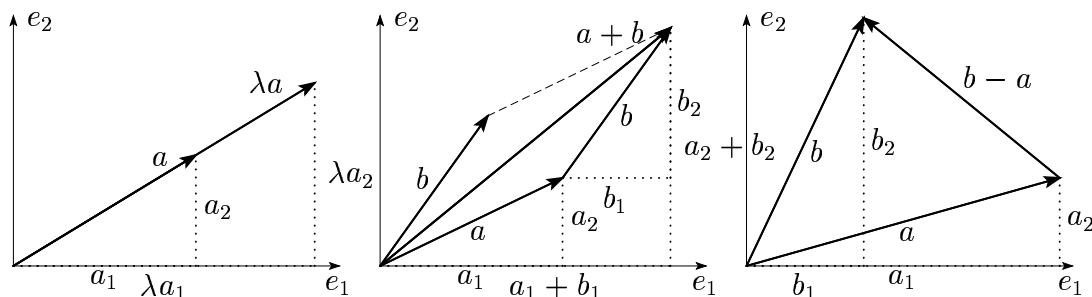
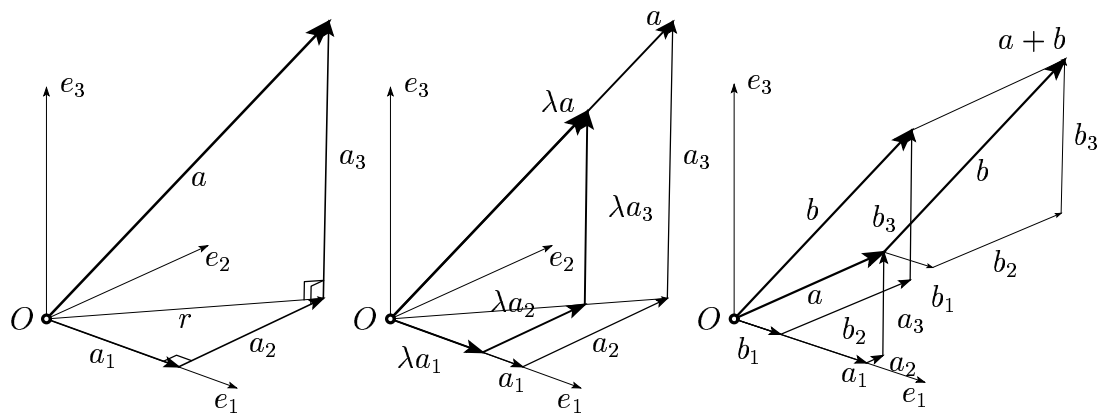
$$(a_1, a_2) \quad \Leftrightarrow \quad a = a_1 e_1 + a_2 e_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \text{---} a_1 \quad \text{---} a_2 \end{array} \quad (3.4)$$

entre les objets ‘algébriques’ de Grassmann et les objets ‘géométriques’ des physiciens. Pour  $n = 3$  voir figure 3.2 à gauche).

**Opérations algébriques.** On fait les opérations algébriques, par exemple la somme et le produit avec un scalaire, pour toutes les coordonnées à la fois :

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \quad \lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) . \quad (3.5)$$

Le *produit avec un scalaire* de  $a$  de (3.5) rallonge le vecteur (ou renverse la direction pour  $\lambda < 0$ ) (figure 3.1 à gauche et figure 3.2 du milieu) ; la *somme*  $a + b$  complète un

FIG. 3.1 – Multiplication avec un scalaire, addition et soustraction de vecteurs dans  $\mathbb{R}^2$ FIG. 3.2 – Vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$ , coordonnées, multiplication avec un scalaire, addition

parallélogramme (figure 3.1 milieu et figure 3.2 à droite); de manière équivalente, cela consiste à poser à la queue leu leu les deux vecteurs par un déplacement parallèle. Ainsi, il est commode d'identifier deux vecteurs parallèles, de même longueur et de même sens<sup>10</sup>. La *différence*  $b - a$  est le vecteur qui connecte le point  $a$  au point  $b$  (figure 3.1 à droite et figure 3.3 à gauche).

### Premières applications des vecteurs.

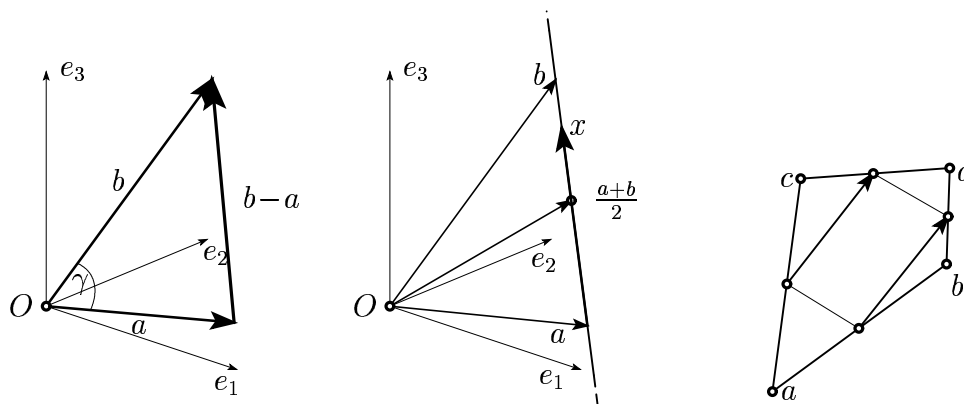


FIG. 3.3 – Différence de vecteurs (à gauche), représentation d'une droite (au milieu), théorème de Varignon (à droite)

10. La littérature connaît bien des définitions variées sur cette distinction (“vecteur”, “vecteur libre”, “vecteur glissant”, “vecteur lié”, “vecteurs équipollents”, “bipoint” etc.). Nous disons simplement “point” si notre vecteur part de l'origine  $O$ .

**Droite passant par deux points.** Pour trouver la droite passant par les points  $a$  et  $b$ , l'idée est de se promener, à partir de  $a$ , en direction de  $b - a$

$$x = a + \lambda(b - a) \quad (3.6)$$

où  $\lambda$  est un paramètre déterminant la position du point  $x$  sur la droite : pour  $\lambda = 0$  nous avons  $x = a$ , pour  $\lambda = 1$  nous retrouvons  $x = b$ . Le milieu du segment  $[a, b]$  est obtenu avec  $\lambda = \frac{1}{2}$ , ce qui donne

$$x = \frac{a + b}{2} \quad (3.7)$$

(voir figure 3.3 au milieu (where else??)).

*Remarque.* Si on écrit la formule (3.6) en deux dimensions, composante par composante, et si on élimine  $\lambda$  dans la deuxième ligne à l'aide de la première, on retrouve la formule habituelle pour une droite (voir figure 1.11).

**Le Théorème de Varignon.** Pierre Varignon (1654-1722), grand connaisseur du calcul différentiel en France, est arrivé par ses recherches en statique au résultat suivant : *les milieux d'un quadrilatère quelconque dans  $\mathbb{R}^3$  forment un parallélogramme.*

Pour la *preuve*, observons qu'une paire de milieux est donnée par

$$\frac{a + b}{2}, \quad \frac{b + d}{2}, \quad \text{l'autre par} \quad \frac{a + c}{2}, \quad \frac{c + d}{2}.$$

La différence de ces paires est le même vecteur  $\frac{d-a}{2}$  (voir figure 3.3 à droite). QED.

**Plan passant par trois points ; équation paramétrique.**

En généralisant l'idée dans (3.6), pour trois points  $a, b, c$  donnés, nous partons du point

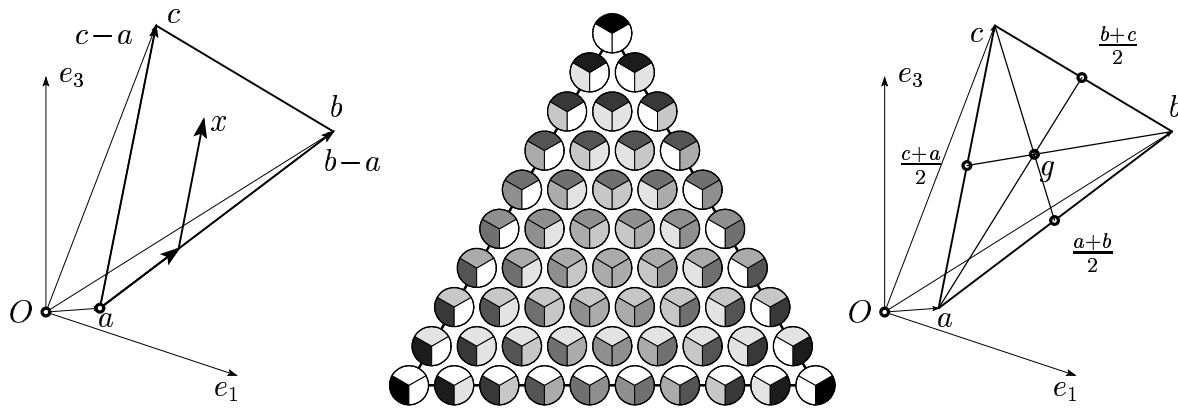


FIG. 3.4 – Création d'un plan (à gauche), coordonnées barycentriques (noir= 1, blanc= 0 ; au milieu), médianes et barycentre d'un triangle (à droite)

$a$  et nous nous promenons dans *deux* directions  $b - a$  et  $c - a$ . Avec deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ , nous obtenons avec

$$x = a + \lambda(b - a) + \mu(c - a) \quad (3.8)$$

tous les points du plan en question (voir figure 3.4 à gauche). Nous remarquons que bon nombre d'exemples du cours d'Algèbre (P. de la Harpe, Chap. I.1) ont cette forme.

**Coordonnées barycentriques.** Pour rendre la formule dans (3.8) plus symétrique, nous l'écrivons comme

$$x = a(1 - \lambda - \mu) + \lambda b + \mu c = m_1 a + m_2 b + m_3 c, \quad m_1 + m_2 + m_3 = 1. \quad (3.9)$$

Ces coordonnées s'appellent *coordonnées barycentriques*, introduites par A.F. Möbius (*Der barycentrische Calcul*, 1827 ; voir figure 3.4 au milieu). On peut s'imaginer trois masses  $m_1, m_2, m_3$  disposées sur les sommets d'un triangle, le point  $x$  étant le barycentre de ces trois masses.

- $m_1 = 1$  ou  $m_2 = 1$  ou  $m_3 = 1$  sont les sommets ;
- $m_1 = 0$  ou  $m_2 = 0$  ou  $m_3 = 0$  sont les côtés opposés ;
- si  $m_1 > 0$  et  $m_2 > 0$  et  $m_3 > 0$  on est à l'intérieur du triangle ;
- $m_1 = m_2$  ou  $m_2 = m_3$  ou  $m_3 = m_1$  sont les trois médianes ;
- $m_1 = m_2 = m_3 = \frac{1}{3}$  est le barycentre (voir figure 3.4 à droite).

Difficile d'imaginer le théorème d'Archimède (des médianes) de manière plus élégante.

## Volume et déterminant.

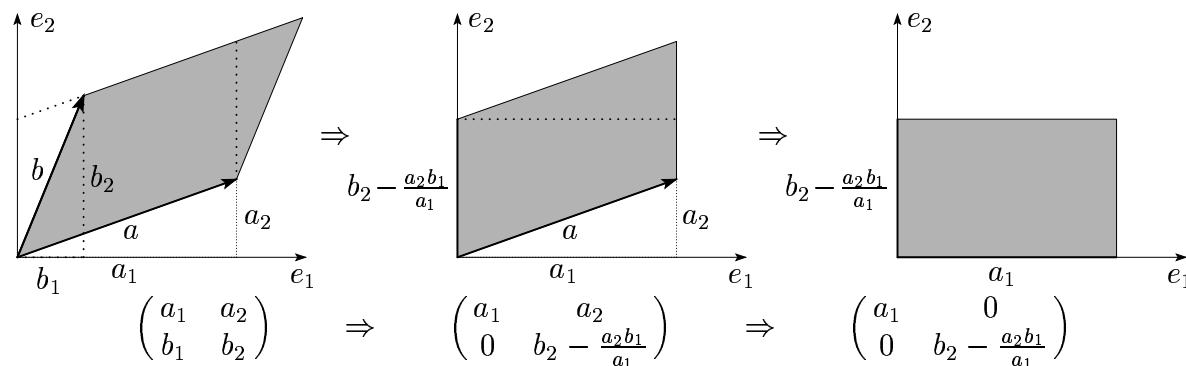


FIG. 3.5 – Élimination de Gauss préservant le volume en dimension 2

**Problème.** Étant donnés deux (ou trois ... ou  $n$ ) vecteurs  $a, b, c$  dans  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^3$  ... ou  $\mathbb{R}^n$ ), déterminer l'aire (ou le volume) du parallélépipède engendré par ces vecteurs.

*Solution.* On place ces vecteurs comme *vecteurs ligne* dans une matrice et on effectue l'algorithme de Gauss, d'abord pour éliminer les éléments en dessous de la diagonale, puis ceux au-dessus (voir figure 3.5 et figure 3.6). Lors de chaque opération, un des vecteurs est transféré en direction d'un autre, et par Euclide I.35 (ou Euclide XI.29), le volume ne change pas (cela est équivalent à la "Proposition (vi)", *Algèbre* IV.3., p. 13). À la fin, on arrive à un parallélépipède rectangle, dont les côtés sont les trois pivots<sup>11</sup> :

**Théorème.** Le volume d'un parallélépipède est (au signe près) égal au produit des trois "pivots" (= éléments dans la diagonale ayant servi à l'élimination des autres). Cette grandeur s'appelle le déterminant de la matrice.<sup>12</sup>

11. ... que nous ne normalisons pas à 1 (i.e., nous supprimons le "pas (M)" de l'*Algèbre* I.2., p. 7-8).

12. La théorie des déterminants est une centaine d'années plus ancienne que celle des matrices. Les premières motivations viennent de l'algèbre (Maclaurin *Treatise of Algebra* 1748, G. Cramer (1750, Appendice p. 656, voir figure 3.7), et Bezout 1764, avec ou sans accent comme vous voulez ...) ; les principaux architectes des déterminants sont Vandermonde (1772 ; le célèbre "déterminant de Vandermonde" est un malentendu), et Laplace (1772) ; la signification géométrique en tant que volume a été découverte par Euler, Lagrange et Jacobi (1769, 1773 et 1841, transformation d'intégrales multiples).

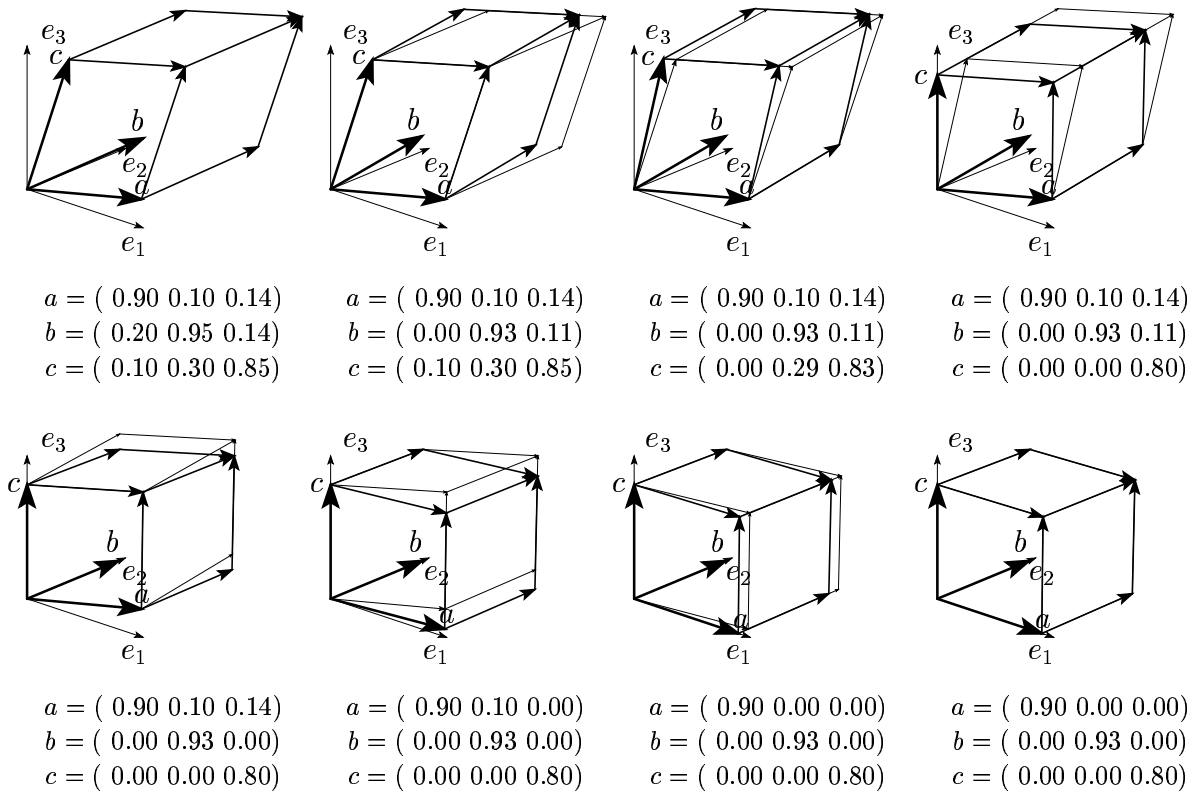


FIG. 3.6 – Élimination de Gauss préservant le volume en dimension 3

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{A^1 Y^2 X^3 - A^1 Y^3 X^2 - A^2 Y^1 X^3 + A^2 Y^3 X^1 + A^3 Y^1 X^2 - A^3 Y^2 X^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1} \\
 y &= \frac{Z^1 A^2 X^3 - Z^1 A^3 X^2 - Z^2 A^1 X^3 + Z^2 A^3 X^1 + Z^3 A^1 X^2 - Z^3 A^2 X^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1} \\
 x &= \frac{Z^1 Y^2 A^3 - Z^1 Y^3 A^2 - Z^2 Y^1 A^3 + Z^2 Y^3 A^1 + Z^3 Y^1 A^2 - Z^3 Y^2 A^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1}
 \end{aligned}$$

FIG. 3.7 – La “règle de Cramer”; copiée de I. Benguigui, Gabriel Cramer, Messieurs Cramer &amp; Cie, Genève 1998

Si on effectue explicitement le calcul, on tombe sur

$$\mathcal{A} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad \text{pour } n = 2, \text{ et}$$

$$\mathcal{V} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

pour la matrice (3.18), une “formule presque toujours inutile pour les calculs et hélas bien trop connue ...” (dixit P. de la Harpe, *Algèbre* IV.3). Pour  $n = 4$  une formule semblable aurait 24 termes, pour  $n = 5$  on a 120 termes, etc. Inutile de dire que ces formules sont encore plus inutiles pour les calculs!...

## Norme et produit scalaire.

On voit en figure 3.2 (à gauche), que la longueur du vecteur  $a$ , dénotée  $\|a\|$  et appelée sa *norme*, satisfait

$$\|a\|^2 = r^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \sum_i a_i^2 \quad (3.10)$$

(appliquer *deux fois* le théorème de Pythagore). Grâce à cette norme, l'espace  $\mathbb{R}^3$  devient un *espace normé* et, en même temps, un *espace métrique* avec distance  $d(a, b) = \|b - a\| = \sqrt{\sum (b_i - a_i)^2}$ .

Ainsi, on peut calculer les longueurs des trois côtés du triangle de la figure 3.3 (à gauche) et appliquer le théorème du cosinus (section I.4, formule (4.7)) :

$$\|b - a\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\| \|b\| \cos \gamma \quad \Rightarrow \quad \sum_i a_i b_i = \|a\| \|b\| \cos \gamma \quad (3.11)$$

ou

$$\cos \gamma = \frac{\sum_i a_i b_i}{\|a\| \|b\|} . \quad (3.12)$$

On reconnaît le *produit scalaire* du cours d'Algèbre

$$\langle a, b \rangle = \langle a|b \rangle = a \cdot b = \sum_i a_i b_i \quad \text{avec} \quad \langle a|a \rangle = a \cdot a = \|a\|^2 . \quad (3.13)$$

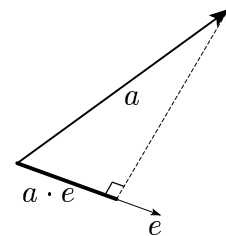
La notation  $a \cdot b$  est due à Gibbs ("dot product"). De (3.11) et (3.12), tirons deux conséquences importantes :

**Théorème 1.** *Deux vecteurs (non nuls) sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.*

**Théorème 2.** *Soit  $e$  un vecteur normé ( $\|e\| = 1$ ). Alors le produit scalaire  $a \cdot e = \|a\| \cos \gamma$  est la longueur de la projection orthogonale de  $a$  sur  $e$  (voir la figure).*

Cela est en accord avec le fait que  $a_i = a \cdot e_i$  pour la base canonique ; nous retrouvons aussi la formule

$$a = \sum_i \langle e_i | a \rangle e_i$$



(du "Théorème 1.12", Chap. VI, p. 11 du polycopié d'*Algèbre*) pour une base orthonormée.

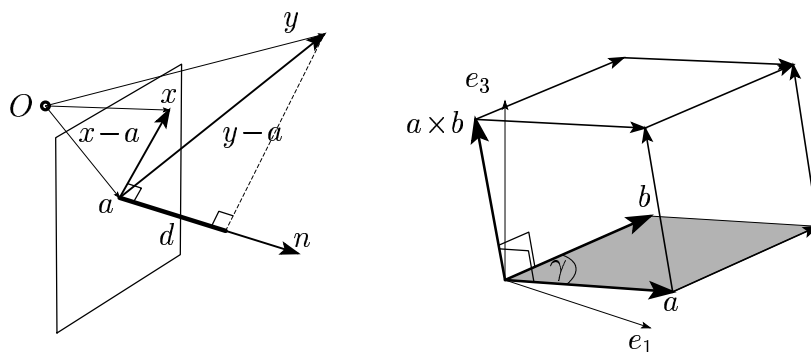


FIG. 3.8 – Équation d'un plan et distance d'un point (à gauche); produit extérieur (à droite)

**Équation cartésienne d'un plan.** Soit  $a$  un point donné et  $n$  un vecteur de norme 1. Alors un point  $x$  se trouve dans le plan passant par  $a$  et orthogonal sur  $n$  ssi (voir figure 3.8 à gauche)

$$(x - a) \cdot n = 0 \quad \text{i.e.,} \quad n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 = q. \quad (3.14)$$

Inversement, si une équation

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 = q$$

est donnée, on sait que  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)/\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$  est un vecteur orthonormal au plan.

**Distance d'un point à un plan.** Soit  $y$  un point quelconque, alors sa distance du plan, déterminée par (3.14), est donnée par

$$d = (y - a) \cdot n. \quad (3.15)$$

**Angle entre deux plans.** On calcule les deux vecteurs orthogonaux et détermine l'angle entre ces deux vecteurs.

**Angle entre une droite et un plan.** Eh bien ! si on connaît une équation paramétrique de la droite (3.6), on calcule l'angle entre le vecteur directeur  $b - a$  de la droite et le vecteur orthogonal au plan.

*Conclusion.* Admirons donc à quelle variété de questions le produit scalaire est utile.

## Le produit vectoriel (ou extérieur).

Issu de considérations générales de Grassmann, ce produit n'existe *comme vecteur* qu'en dimension 3 ; mais son importance en géométrie tridimensionnelle et en physique est considérable.

**Problème.** Étant donnés deux vecteurs  $a$  et  $b$ , trouver un vecteur  $x$  orthogonal sur  $a$  et  $b$ .

*Solution.* Les deux conditions d'orthogonalité (voir Théorème 1) nous amènent à notre premier système d'équations linéaires, traité par la méthode de choix, l'élimination de Gauss (voir *Algèbre*, Chap. I.1)

$$\begin{array}{rcl} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 & \Rightarrow & a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 & & (b_2 - \frac{b_1a_2}{a_1})x_2 + (b_3 - \frac{b_1a_3}{a_1})x_3 = 0. \end{array}$$

Dans cette dernière équation,  $x_3$  est un paramètre arbitraire, le choix  $x_3 = a_1b_2 - a_2b_1$  donne pour le résultat des formules particulièrement jolies :

$$x_1 = a_2b_3 - a_3b_2, \quad x_2 = a_3b_1 - a_1b_3, \quad x_3 = a_1b_2 - a_2b_1, \quad (3.16)$$

et on appelle

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = \left( \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \right) \quad (3.17)$$

le *produit vectoriel* (ou *produit extérieur* ou *cross product*) de  $a$  et  $b$  (voir dessin en figure 3.8 à droite). Le symbole  $\times$  est celui de Gibbs, généralement utilisé durant un siècle. Certaines structures semblables en algèbre moderne incitent à le remplacer par un  $\wedge$ .

**Produit mixte.** Courageux explorateurs, partons du produit *extérieur*  $a \times b$ , et calculons le produit *scalaire* avec un troisième vecteur  $c$ . Grande est la surprise de tomber précisément, en appliquant le “développement relativement à la dernière ligne” (voir le “Corollaire” de l’*Algèbre* IV.3., p. 13), sur :

$$(a \times b) \cdot c = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} . \quad (3.18)$$

**Norme du produit extérieur.** Remplaçons dans (3.18) le vecteur  $c$  par  $a \times b$ . Le volume obtenu est celui d’un prisme droit, dont la hauteur est  $\|a \times b\|$ . Si l’on compare les formules (I.2.24) et (3.18) pour ce volume, on trouve

$$(a \times b) \cdot (a \times b) = \|a \times b\|^2 = \|a \times b\| \cdot \mathcal{A} , \quad (3.19)$$

ce qui donne pour la *norme du produit extérieur*:

$$\|a \times b\| = \mathcal{A} = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin \gamma , \quad (3.20)$$

$\mathcal{A}$  étant l’aire du parallélogramme engendré par  $a$  et  $b$  (voir dessin en figure 3.8 à droite).

*Application.* Le produit extérieur permet de transformer l’équation paramétrique d’un plan en une équation cartésienne. Le résultat est intéressant : *l’équation cartésienne du plan passant par les points  $a$ ,  $b$ , et  $c$  peut s’écrire sous la forme suivante :*

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{pmatrix} = 0 . \quad (3.21)$$

Autre application du produit extérieur : le calcul de la plus courte distance entre les points de deux droites gauches dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Orientation.** Un triple de vecteurs  $a$ ,  $b$ , et  $c$  possède une *orientation positive*, si le signe de  $\det(a, b, c)$  est positif. Ainsi, ces vecteurs ont la même orientation que les trois vecteurs de base  $e_1$ ,  $e_2$ , et  $e_3$ . Nous voyons en (3.19) que le signe du produit extérieur est choisi précisément pour que le triple  $a$ ,  $b$ , et  $a \times b$  ait une orientation positive (car  $e_1 \times e_2 = e_3$ ).

En mathématiques, on pourrait choisir l’orientation de la base telle que désirée ; mais en physique (p. ex. direction d’un champ magnétique), les choses sont plus sérieuses...

## Perspective centrale.

**Perspective** n.f. (lat. médiév. *perspectiva*, de lat. *perspicere*, voir à travers). (Le petit Larousse)

**Problème.** Étant donné un point  $\tilde{x}$ , représentant l’oeil d’un artiste ou le foyer d’une caméra, et un vecteur  $a$ , la direction de vue et la distance du plan de projection, calculer pour chaque objet spatial en position  $x$ , les coordonnées  $u_1, u_2$  de l’image par *projection centrale* (voir figure 3.9).

*Solution.* Pour fixer le plan, calculons deux vecteurs  $h$  et  $g$  orthogonaux entre eux et orthogonaux à  $a$  : d’abord  $h = a \times (0, 0, 1)$  (ainsi il est horizontal), puis  $g = a \times h$ , les

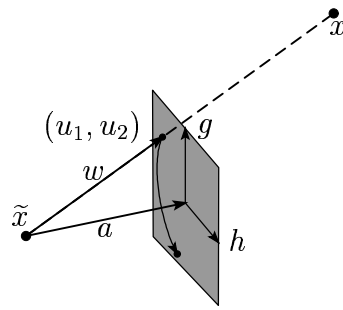


FIG. 3.9 – Projection centrale

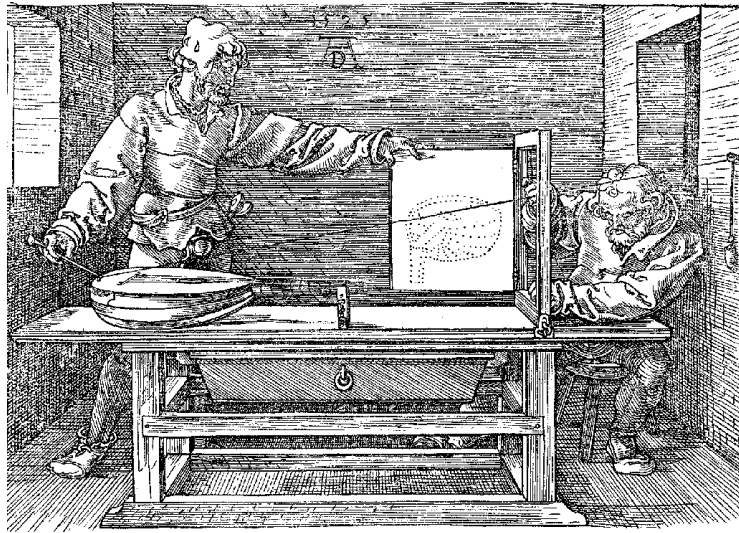
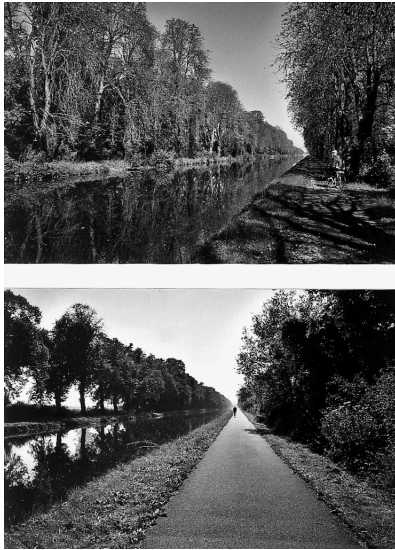


FIG. 3.10 – Perspectives ; à gauche : deux photos de C. Gressly ; à droite : gravure de A. Dürer (on connaît deux gravures similaires de Dürer, l'une avec une guitare, l'autre avec une femme nue ; pour des raisons évidentes, nous préférons la guitare)

deux normalisés à 1 :

$$h = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} (a_2, -a_1, 0), \quad g = \frac{1}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}} (-a_1 a_3, -a_2 a_3, a_1^2 + a_2^2). \quad (3.22)$$

Le vecteur  $w$ , reliant le foyer  $\tilde{x}$  au point de projection, doit être un multiple de  $x - \tilde{x}$  :

$$w = \lambda(x - \tilde{x}). \quad (3.23)$$

Le  $\lambda$  se détermine par la condition :  $w - a$  doit être orthogonal à  $a$  :

$$\langle w - a, a \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\langle a, a \rangle}{\langle x - \tilde{x}, a \rangle}. \quad (3.24)$$

Finalement, les produits scalaires  $u_1 = w \cdot h$  et  $u_2 = w \cdot g$  (voir Théorème 2 ci-dessus) sont les coordonnées recherchées. Au cas où notre photographe n'aurait pas tenu sa caméra horizontalement, on pourrait faire suivre une rotation (4.3) par un angle  $\alpha$ . Ainsi, une image en perspective est déterminée par 7 paramètres : 3 pour  $a$ , 3 pour  $\tilde{x}$  et 1 pour  $\alpha$ .

**Stéréogrammes.** Les beaux stéréogrammes de ce polycopié ont été calculés à l'aide des mêmes formules ; simplement on remplace  $\tilde{x}$  une fois par  $\tilde{x} - 3h$  (oeil gauche) et une fois

par  $\tilde{x} + 3h$  (oeil droit). Le nombre 3, mesuré en cm, est la demi-distance des yeux du spectateur. Cela produit *deux* images, une pour l'oeil gauche et une pour l'oeil droit.

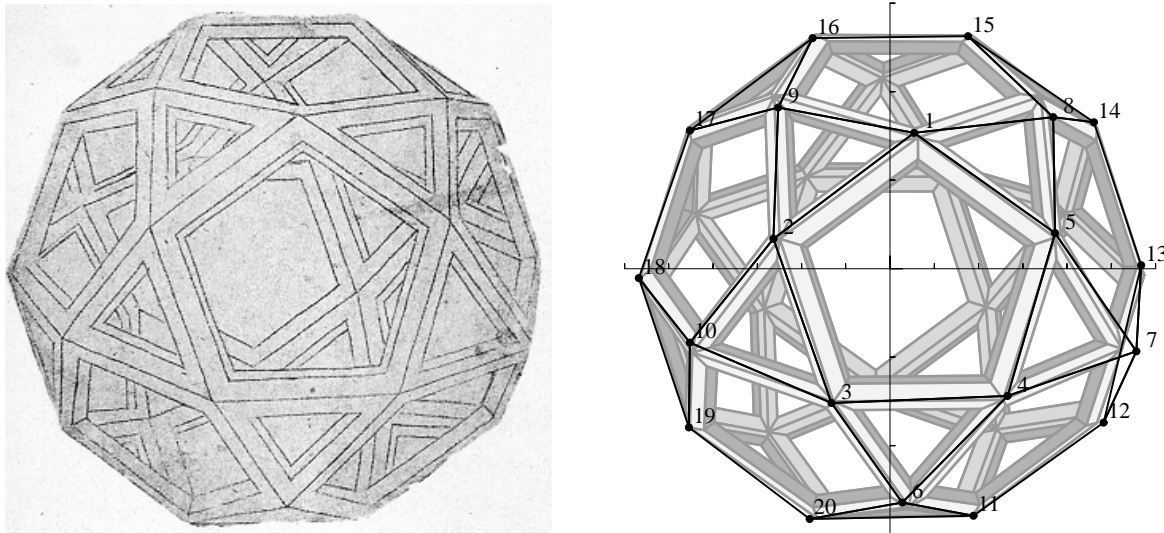


FIG. 3.11 – À gauche : dessin de Leonardo da Vinci (1510, *Codex Atlanticus* fol. 707r; *Bibliotheca Ambrosiana, Milano*) ; à droite : les sommets de Leonardo reproduits en noir, en gris le dessin “corrigé” (Assyrus Abdullus & Gerhardus Wannerus, *linguæ programmatoriæ Fortranus & Postscriptus, Calculatores SunBlade 100, Universitas Genavæ*)

**“Contrôler” Leonardo da Vinci.** Les artistes de la Renaissance ont porté beaucoup de soin à l’étude de la perspective (voir figure 3.10) ; contrairement à aujourd’hui, les fautes de perspective *étaient des fautes* ... Nous nous permettons donc de soumettre un dessin de Leonardo à un *vrai* contrôle scientifique, pour la première fois depuis presque 500 ans. Prenons le dessin d’un icosidodécaèdre<sup>13</sup> ; pour faire les calculs, nous avons mesuré les 20 sommets visibles du dessin et calculé leur position correcte dans l’espace. Puis, par une méthode numérique appelée “méthode des moindres carrés” (voir détails dans le cours d’analyse numérique de deuxième année), nous avons déterminé les meilleures valeurs pour les 7 paramètres ci-dessus. Ces valeurs une fois trouvées, nous pouvons comparer les points de la toile (en figure 3.10 à droite en noir) avec le dessin d’un *vrai* icosidodécaèdre le plus proche possible (en figure 3.10 à droite en gris). On y découvre des erreurs (par exemple le sommet no. 8) ; on dirait “tiens, c’est faux”, pas facile de découvrir la faute sans l’aide du calcul.

## II.4 Matrices et applications linéaires

I certainly did not get the notion of a matrix in any way through quaternions ; it was either directly from that of a determinant or as a convenient way of expressing the equations

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy . \end{aligned}$$

(Cayley 1855 ; cité de M. Kline, *Math. Thought*, p. 805)

13. Remerciements à Stéphane Cirilli et Assyr Abdulle pour avoir aidé à produire ces images et calculs

Über der hartnäckigen Verfolgung des vorgesetzten Weges haben aber die Quaternionisten tiefer liegende Probleme von wahrhaftem Interesse übersehen ; ... Diese tiefere Einsicht in die Verhältnisse verdanken wir Cayley. In “*A Memoir on the Theory of Matrices*” (Phil. Trans. 1858) entwickelt er einen Matrixkalkül, der ...

(F. Klein, *Entw. Math. 19. Jahrhundert* (1926), p. 189)

Als Mann von überragender Bedeutung tritt uns *Arthur Cayley* entgegen. Er wurde 1821 in Richmond geboren, wuchs aber in Petersburg auf, wo sein Vater Kaufmann war. ... 1841 beginnen seine ersten Veröffentlichungen im Cambridge Journal. Dabei schöpft er seine einzigen Anregungen aus der Literatur, und zwar vorwiegend aus Jacobis Schriften und den Veröffentlichungen der Franzosen. Cayley wird 1843 Rechtsanwalt in London, welcher Tätigkeit er während 20 Jahren treu blieb. Wie es ihm gelang, neben diesem vollen Beruf noch eine unvergleichliche mathematische Produktivität zu entfalten, ... das muss immer wieder rätselhaft erscheinen. Cayleys sämtliche grundlegenden Arbeiten sind in dieser Zeit entstanden.

(F. Klein, *Entw. Math. 19. Jahrhundert* (1926), p. 147)

Le litige entre “Grassmannistes” et “Quaternionistes” a finalement été étouffé par la victoire d’un troisième “concurrent”, A. Cayley et son *calcul matriciel*. Cette théorie a tellement bouleversé les mathématiques, que certains livres de “géométrie” du début du 20e siècle (par exemple celui de Schreier–Sperner [MA50/31]) ne font plus que du calcul vectoriel et matriciel de A à Z.

## Changements de coordonnées.

Cette recherche peut être presque toujours rendue plus facile par des transformations analytiques qui simplifient les équations, en faisant évanouir quelques-uns de leurs termes ...

(J.-B. Biot, *Essai de Géométrie analytique*, Paris 1823, p. 145)

L’usage systématique des changements de coordonnées (Lacroix, Biot ; voir citation) date du début du 19e siècle.

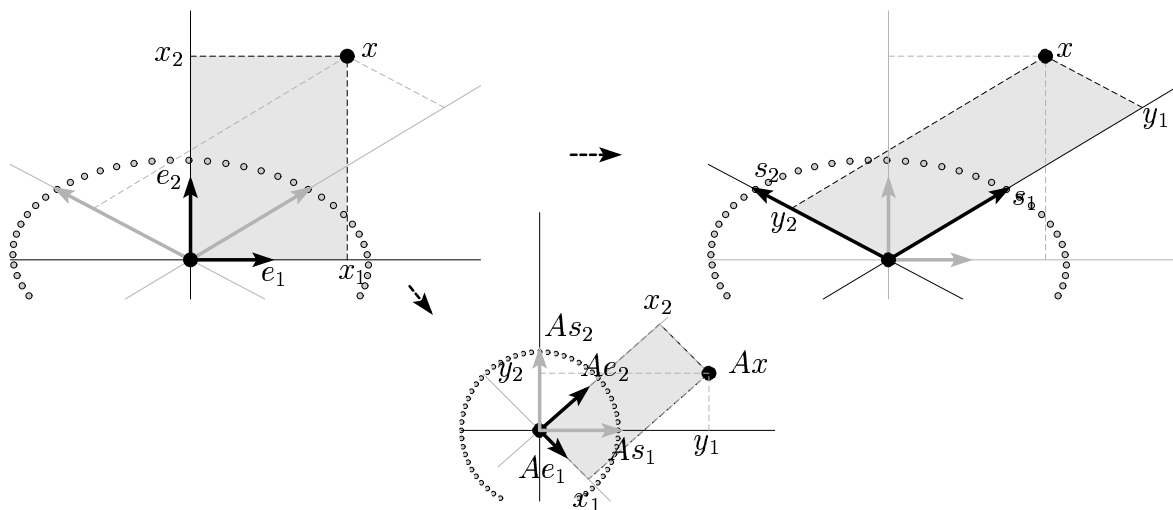


FIG. 4.1 – Changement d’une base (en haut) et application linéaire correspondante (en bas)

Soit <sup>14</sup>

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 \quad \text{avec} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et soient

$$s_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$$

deux vecteurs linéairement indépendants (voir figure 4.1 à gauche). Tentons d'écrire le vecteur  $x$  dans la base des  $s_i$  :  $x = y_1 s_1 + y_2 s_2$  (voir figure 4.1 à droite). Nous voyons que

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_y. \quad (4.1)$$

Ces formules ont marqué le début de l'invention des matrices (voir citation).

**Proposition 1.** *Les nouvelles coordonnées  $y$  d'un point  $x$  satisfont  $x = By$  où les colonnes de la matrice  $B$  sont les coordonnées des vecteurs  $s_i$  dans l'ancienne base.*

## Applications linéaires

Fréchet était très excité par le fait que Banach avait donné plusieurs mois avant Wiener un système d'axiomes de l'espace vectoriel ...  
(H. Steinhaus, *Oeuvres de Banach*, p. 15)

Il existe une *autre* interprétation des formules ci-dessus : au lieu d'examiner les coordonnées du *même* point  $x$  dans une *autre* base, on peut les considérer comme les coordonnées d'un *autre* point, noté  $Ax$  ou  $\alpha(x)$ , dans la *même* base (voir figure 4.1 en bas). Cela définit une application  $x \mapsto Ax = \alpha(x)$  appelée *application linéaire* <sup>15</sup>. Dans cette dernière figure, les  $x$  et les  $y$  changent de rôle et nous avons : soient

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad Ae_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

les images des vecteurs de base, alors

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_y = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_x. \quad (4.2)$$

**Proposition 2.** *Les coordonnées de  $y = \alpha(x)$ , de l'image d'un point  $x$ , satisfont  $y = Ax$  où les colonnes de la matrice  $A$  sont les coordonnées des vecteurs  $\alpha(e_i)$  dans la nouvelle base.*

*Remarque.* En comparant les deux théorèmes, nous voyons que  $B = A^{-1}$ , l'inverse de  $A$ .

**Exemple 1.** Un exemple est dessiné en figure 4.2 (images de gauche et du milieu). On peut observer que  $\alpha(2e_1) = 2\alpha(e_1)$  et  $\alpha(e_1 + e_2) = \alpha(e_1) + \alpha(e_2)$  etc. Ce sont les propriétés typiques des applications linéaires.

**Exemple 2 : la rotation.** Supposons que les coordonnées  $x_1, x_2$  soient remplacées par deux nouvelles coordonnées  $y_1, y_2$ , en effectuant une rotation des axes par un angle  $\alpha$

<sup>14</sup>. en calcul matriciel, il est préférable d'écrire un vecteur comme *vecteur colonne*.

<sup>15</sup>. notion due à S. Banach 1922, *Oeuvres II*, p. 321 ; la même œuvre contient aussi la première liste d'axiomes pour un espace vectoriel (p. 306).

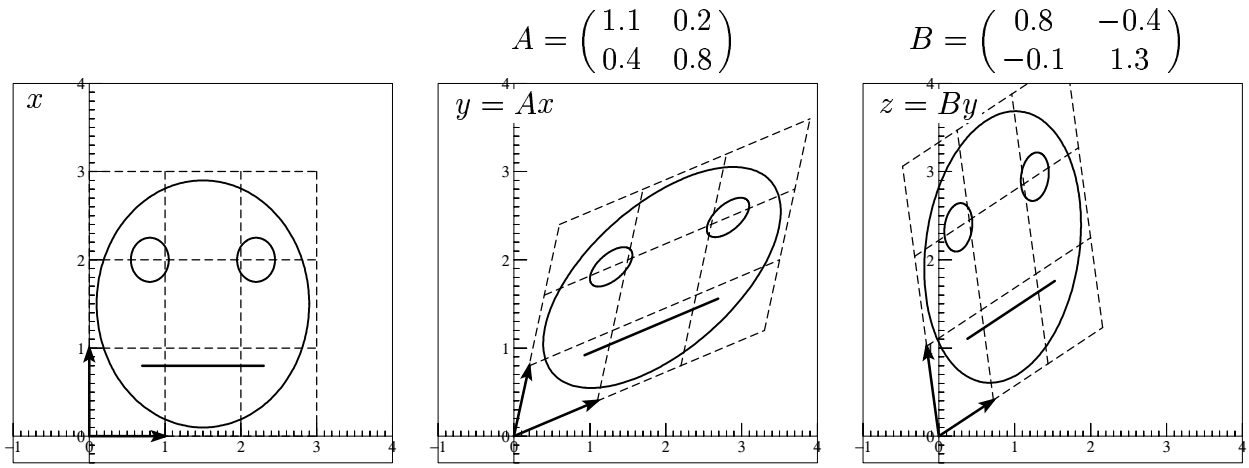


FIG. 4.2 – Une application linéaire et sa composition avec une autre

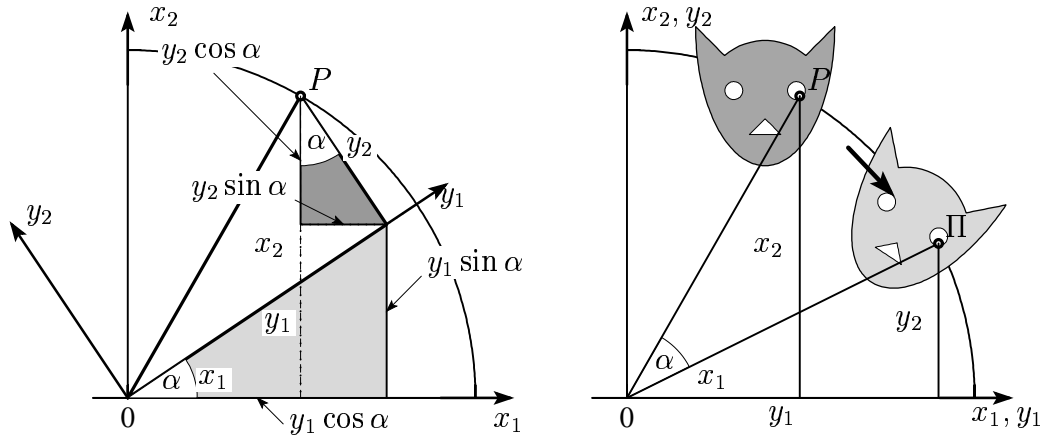


FIG. 4.3 – Rotation du système des coordonnées

(voir figure 4.3 à gauche ; la similitude de ce dessin avec celui de la figure 4.5 (chap. I) est voulue ! Il s'agit en fait du même théorème). On pourrait dire aussi : *on fait tourner l'image par un angle  $\alpha$  dans le sens opposé* (voir la figure à droite) ;

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \alpha y_1 - \sin \alpha y_2 & \text{ou} & & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ x_2 &= \sin \alpha y_1 + \cos \alpha y_2 & & & & & \text{où } c = \cos \alpha, \quad s = \sin \alpha. \end{aligned} \quad (4.3)$$

**Applications affines ; la translation.** On peut aussi examiner des changements de coordonnées où *l'origine change de place*. La translation en est un exemple : supposons que  $(c_1, c_2)$  soit un point fixe et posons

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 + y_1 \\ x_2 &= c_2 + y_2 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Ces formules peuvent être interprétées de deux façons : soit par une translation du système des coordonnées (voir figure 4.4 à gauche), soit par une translation des points du plan dans la *direction opposée* (figure 4.4 à droite). De telles applications (qui ne sont pas “linéaires” dans le sens strict) sont appelées *applications affines*.

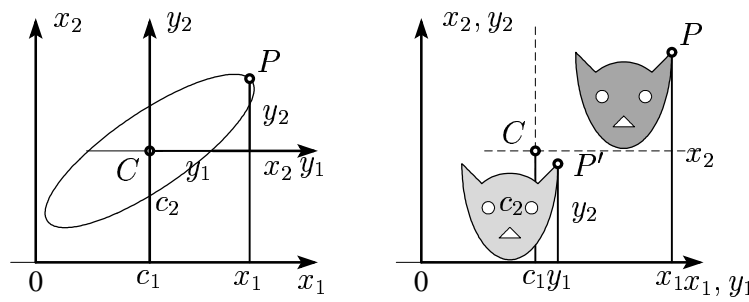


FIG. 4.4 – Translation du système des coordonnées

**Composition de deux applications linéaires.** Considérons deux applications linéaires

$$y_k = \sum_i a_{ki} x_i \quad \text{et} \quad z_\ell = \sum_k b_{\ell k} y_k \quad \Rightarrow \quad z_\ell = \sum_k b_{\ell k} \sum_i a_{ki} x_i = \sum_i \left( \sum_k b_{\ell k} a_{ki} \right) x_i . \quad (4.5)$$

La composition en est à nouveau une application linéaire à matrice

$$y = Ax \quad \text{et} \quad z = By \quad \Rightarrow \quad z = BAx = Cx \quad \text{avec} \quad c_{\ell i} = \sum_k b_{\ell k} a_{ki} , \quad (4.6)$$

la célèbre formule pour le *produit* de deux matrices, symbolisée ainsi

$$\begin{pmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bullet \\ \bigcirc & \bigcirc & \bullet \\ \bigcirc & \bigcirc & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix} .$$

Voyons un **exemple** en figure 4.2 avec

$$A = \begin{pmatrix} 1.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 \\ -0.1 & 1.3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C = BA = \begin{pmatrix} 0.72 & -0.16 \\ 0.41 & 1.02 \end{pmatrix} .$$

**Application réciproque.** Cherchons maintenant à déterminer le  $x$  de l'application  $y = Ax$  pour un  $y$  donné. Il s'agit d'un système linéaire :

$$\begin{aligned} 1.1 x_1 + 0.2 x_2 &= y_1 & \text{El. } \underline{\text{Gauss}} & \quad 1.1 x_1 + 0.2 x_2 &= y_1 \\ 0.4 x_1 + 0.8 x_2 &= y_2 & & \quad +0.727 x_2 &= -0.364 y_1 + y_2 \\ \text{El. } \underline{\text{Gauss}} & \quad 1.1 x_1 &= 1.100 y_1 - 0.275 y_2 \\ & \quad +0.727 x_2 &= -0.364 y_1 + y_2 . \end{aligned} \quad (4.7)$$

Après des divisions, nous arrivons au résultat

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.000 y_1 - 0.25 y_2 \\ x_2 &= -0.5 y_1 + 1.376 y_2 . \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1} y . \quad (4.8)$$

Nous voyons que l'algorithme de Gauss peut servir au calcul de la matrice inverse.

**Aires et volumes.** La *signification géométrique* du procédé ci-dessus est illustrée en figure 4.5 : un parallélépipède engendré par les *colonnes* de la matrice  $A$  est transformé par des *cisaillements* parallèles aux axes. Cela ne change ni les volumes ni les aires. Contrairement à l'argumentation précédente, ce fait ne se voit pas à l'aide d'Euclide

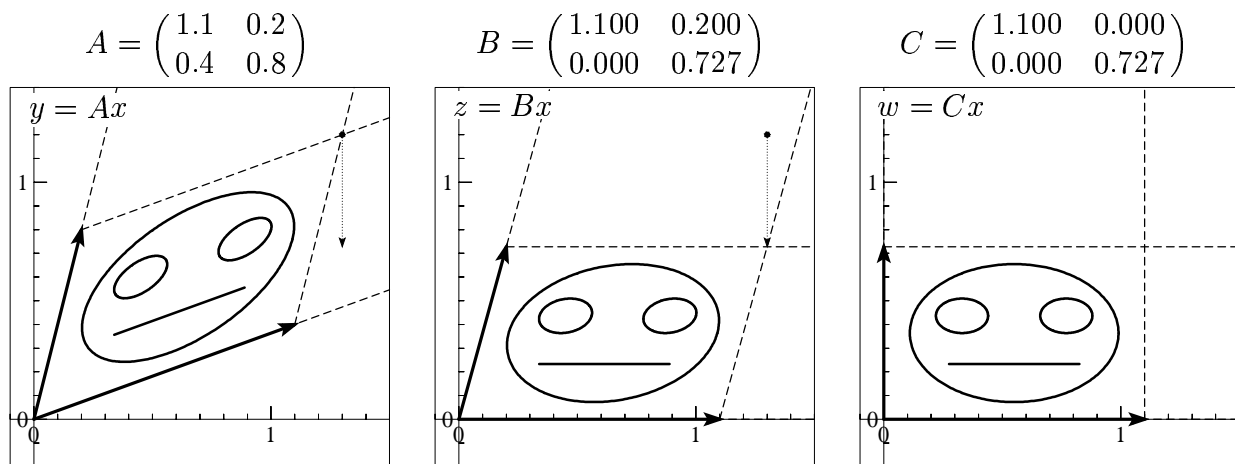


FIG. 4.5 – Une application linéaire sous l'effet de l'élimination de Gauss

XI.29, mais bien grâce aux idées d'Archimède (voir dessin en (I.2.25)). Finalement, le volume est de nouveau égal au produit des pivots, i.e., au déterminant :

**Théorème.** *Le déterminant d'une matrice est égal au volume du parallélépipède engendré par les **colonnes** de la matrice.* Il représente le facteur, par lequel les aires ou les volumes sont augmentés par une application linéaire.

En comparaison avec le théorème de la section précédente, nous trouvons une formule intéressante, connue du cours d'algèbre, mais obtenue de manière purement géométrique ici :

$$\det(A^t) = \det A .$$

Par une *composition* de deux applications linéaires, les volumes sont d'abord agrandis par le facteur  $\det A$ , puis par le facteur  $\det B$ . Nous avons donc

$$\det(BA) = \det B \cdot \det A .$$

### Le déterminant de Gram.

**Problème.** Soient  $a$  et  $b$  deux vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$ . Trouver une formule pour l'aire du parallélogramme engendré par ces deux vecteurs.

*Solution.* Inspirons-nous une fois de plus du déterminant (3.18). Prenons maintenant pour  $c$  un vecteur orthogonal à  $a$  et à  $b$  et de norme 1. Ainsi, l'aire  $\mathcal{A}$  du parallélogramme engendré par  $a$  et  $b$  est

$$\mathcal{A} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} .$$

Multiplions par la matrice transposée et appliquons les formules ci-dessus. On obtient : l'aire d'un parallélogramme engendré par deux vecteurs  $a$  et  $b$  est donnée par

$$\mathcal{A}^2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a \cdot a & a \cdot b & 0 \\ b \cdot a & b \cdot b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a \cdot a & a \cdot b \\ b \cdot a & b \cdot b \end{pmatrix} . \quad (4.9)$$

L'importance de cette dernière expression, qui tire ses origines de la méthode des moindres carrés<sup>16</sup>, réside dans le fait qu'elle est *indépendante de la dimension* et facilement généralisable à un nombre arbitraire de vecteurs. La seule chose à savoir : connaître l'existence des vecteurs  $c, d, \dots$  orthonormés et orthogonaux ; le célèbre procédé de “Gram-Schmidt” (voir *Algèbre* VI.1.13) est le bon outil pour cela.

## Valeurs et vecteurs propres.

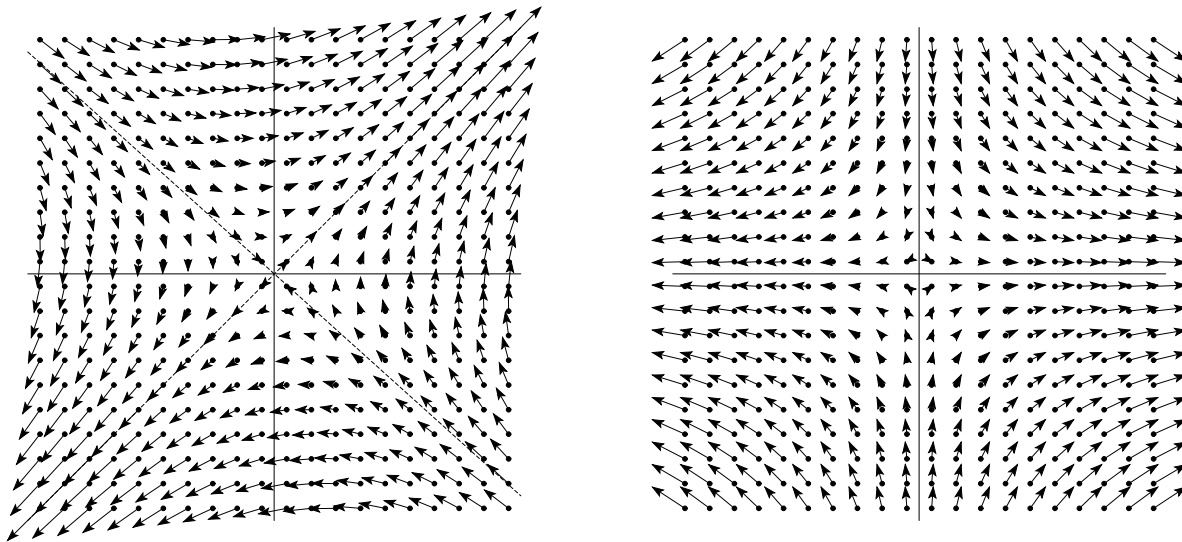


FIG. 4.6 – Une application linéaire comme champ de vecteurs (à gauche) ; transformée sur la base des vecteurs propres (à droite).

Observons en figure 4.6 (à gauche) une application linéaire

$$y = Ax \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0.3 & 2 \\ 1.8 & 0.5 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

représentée en forme de *champ de vecteurs*, i.e., à chaque point  $x$  est attaché le vecteur  $y = Ax$  en forme d'une petite flèche<sup>17</sup>. Deux directions sautent aux yeux : ce sont les directions où le vecteur  $Av$  prend la même direction que le vecteur  $v$ , i.e., où

$$Av = \lambda v \quad \text{ou} \quad (\lambda I - A)v = 0 \quad v \neq 0. \quad (4.11)$$

Un tel vecteur s'appelle *vecteur propre* et  $\lambda$  la *valeur propre* correspondante. On voit que  $\lambda$  doit être racine du *polynôme caractéristique*

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n - (a_{11} + \dots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A = 0. \quad (4.12)$$

Au cas où ce polynôme possède  $n$  racines réelles distinctes, nous avons  $n$  vecteurs propres indépendants, que nous pouvons choisir pour nouvelle base<sup>18</sup>. Dans cette base, l'application ne fait rien d'autre que de multiplier les coordonnées par  $\lambda_i$ , i.e., la matrice est transformée sur *forme diagonale* (voir figure 4.6 à droite).

16. J. P. Gram, *Om Rækkeudviklinger, bestemte ved Hjælp af de mindste Kvadraters Methode*, København 1879 ; voir J.d.Math. vol. 94, p. 41-73.

17. pas étonnant que les premiers vecteurs et valeurs propres viennent des équations différentielles (Lagrange 1759, *théorie du son* ; Lagrange 1781, des matrices  $6 \times 6$  dans le but de calculer les perturbations séculaires des orbites des 6 planètes connues à l'époque, *Oeuvres* V, p. 125-490).

18. sinon, il peut y avoir des complications (blocs de Jordan, bases complexes..), voir Poly d'Algèbre I, Chap. V.

En formules : d'un côté nous avons par (4.1)

$$x = T\tilde{x} \quad y = T\tilde{y} \quad \Rightarrow \quad T\tilde{y} = AT\tilde{x} \quad \Rightarrow \quad \tilde{y} = T^{-1}AT\tilde{x}$$

où  $\tilde{x}$  sont les nouvelles coordonnées et les colonnes de la matrice  $T$  sont les vecteurs  $v_i$  ; de l'autre côté nous avons

$$Av_i = \lambda_i v_i \quad \Rightarrow \quad A(v_1, v_2) = (v_1 \lambda_1, v_2 \lambda_2) \quad \Rightarrow \quad AT = T\Lambda \quad \Rightarrow \quad T^{-1}AT = \Lambda \quad (4.13)$$

où  $\Lambda$  est la matrice diagonale contenant les  $\lambda_i$ .

**Exemple.** Pour la matrice (4.10), nous avons le polynôme caractéristique

$$\lambda^2 - 0.8\lambda - 3.45 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2.3, \quad \lambda_2 = -1.5, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1.8 \end{pmatrix}.$$

## Applications orthogonales et isométries.

... the problem of the linear transformation of a quadratic function into itself has an elegant solution ...

(Cayley 1880, *Papers* vol. 11, p. 140)

**Problème.** Caractériser les applications linéaires  $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec  $y = Qx$ , qui préservent les distances et les angles.

*Solution.* Nous écrivons le carré de la norme de  $x$  comme  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = x^t x$  où  $x$  est pris comme vecteur colonne. Ainsi la norme de l'image devient

$$y^t y = x^t Q^t Q x \quad \text{que nous voulons} \quad = x^t x.$$

Cela nous amène à la condition

$$Q^t Q = I. \quad (4.14)$$

Une telle matrice  $Q$  s'appelle une *matrice orthogonale*. Elle préserve aussi le produit scalaire, car  $\langle Qx | Qy \rangle = (Qx)^t Qy = x^t Q^t Qy = x^t y = \langle x | y \rangle$ .

**Théorème.** Pour une matrice carrée  $Q$ , les énoncés suivants sont équivalents :

1. Les colonnes de  $Q$  forment une base orthonormale ;
2. Les lignes de  $Q$  forment une base orthonormale ;
3.  $Q^t Q = I$ , i.e.,  $Q$  est orthogonale ;
4.  $Q Q^t = I$  ;
5.  $Q$  est inversible et  $Q^{-1} = Q^t$ .

*Preuve.* Pour mieux comprendre, écrivons la condition  $Q^t Q = I$  pour une matrice  $3 \times 3$  en détail :

$$Q^t Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Les éléments de ce produit sont les produits scalaires des colonnes de  $Q$  entre elles. Ainsi, les conditions (1) et (3) sont équivalentes. Similairement, (2) et (4) sont équivalentes. Car le volume d'un parallélépipède orthonormé est 1, (1) et (2) impliquent  $\det Q = \det Q^t = \pm 1$  et  $Q$  est inversible. Ainsi, les autres équivalences se voient en multipliant les formules par  $Q$  et  $Q^{-1}$ . QED.

**Exemples.** Les rotations dans  $\mathbb{R}^2$  (figure 4.3) sont orthogonales. Pour  $n = 3$ , Les identités  $2^2 + 2^2 + 1^2 = 3^2$  et  $2 \cdot 2 - 2 - 2 = 0$  permettent de fabriquer des matrices orthogonales, dont une est

$$Q = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'étude des matrices orthogonales est facilitée par la découverte suivante :

**Théorème** (Cayley 1858, *Math. Papers* vol. 2, p. 497-505). *Si  $A$  est une matrice antisymétrique ( $A^t = -A$ ) quelconque, alors*

$$Q = (I + A)(I - A)^{-1} \quad (4.15)$$

*est une matrice orthogonale. Inversement, si  $Q$  est orthogonale et si  $\det(Q + I) \neq 0$ , on peut résoudre*

$$(I - A)Q = I + A \quad \Rightarrow \quad Q - I = A(Q + I) \quad \Rightarrow \quad A = (Q - I)(Q + I)^{-1}$$

*et  $A$  doit être antisymétrique.*

*Preuve.* En utilisant  $(B^{-1})^t = (B^t)^{-1}$ , on calcule

$$Q^t Q = (I - A^t)^{-1} (I + A^t) (I + A) (I - A)^{-1} = (I + A)^{-1} (I - A) (I + A) (I - A)^{-1}.$$

Ce produit est clairement égal à  $I$ , car  $(I - A)(I + A) = I - A^2$  permutent. QED.

**Exemple 1.** Prenons  $n = 2$ . Toute matrice antisymétrique est de la forme

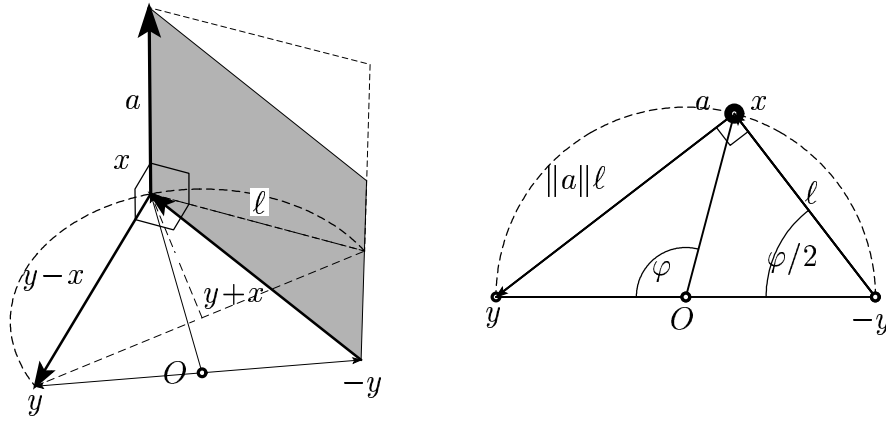
$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} & \Rightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{1 + a^2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + a^2} \begin{pmatrix} 1 - a^2 & 2a \\ -2a & 1 - a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.16)$$

avec  $\tan(\alpha/2) = a$  (comme dans le “coordonnées pythagoriciennes”), encore et toujours la rotation (4.3).

**Exemple 2.** Prenons maintenant  $n = 3$ . Ici, une petite observation concernant le produit vectoriel est utile : par (3.17), nous avons

$$a \times x = \begin{pmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

i.e., le produit vectoriel, où le premier facteur  $a$  est considéré fixé, correspond à une application linéaire  $x \mapsto a \times x$  où la matrice  $A$  est antisymétrique, et vice versa.

FIG. 4.7 – Transformation orthogonale de  $\mathbb{R}^3$ 

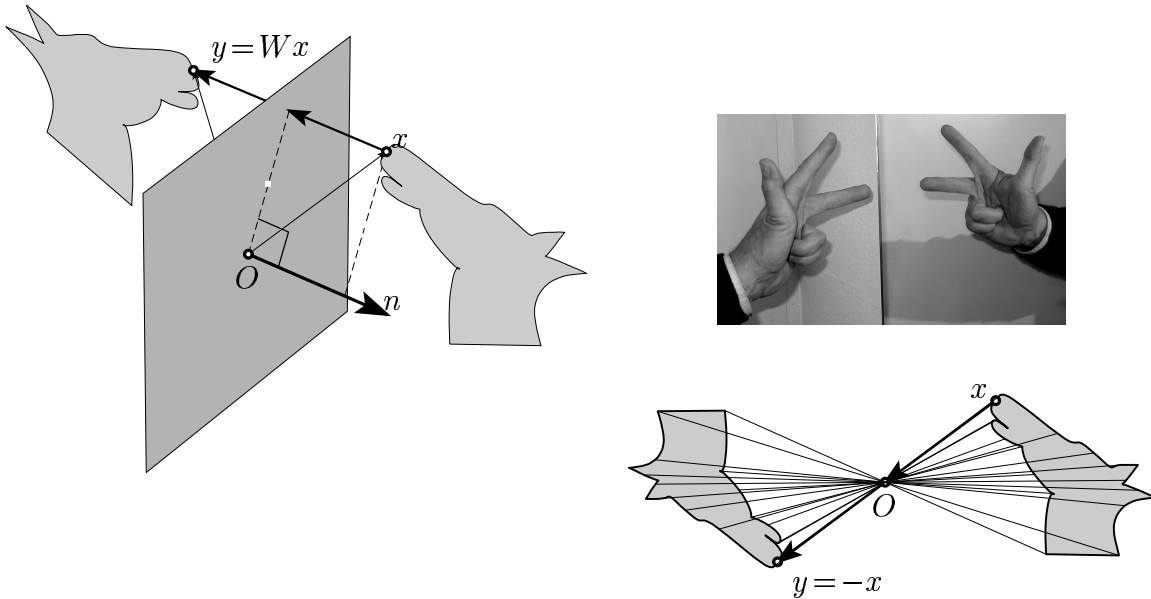
Étudions alors l'application  $x \mapsto y = Qx$  de (4.15) : nous avons

$$(I - A)y = (I + A)x \quad \Rightarrow \quad y - x = A(y + x) \quad \stackrel{(4.17)}{\Rightarrow} \quad y - x = a \times (y + x) .$$

Le vecteur  $y - x$  reliant  $x$  à son image  $y$  est donc orthogonal à  $a$  et à  $y + x = -(-y - x)$ , le vecteur qui relie  $x$  à l'opposé  $-y$  (voir figure 4.7 à gauche). Comme l'aire du parallélogramme hachuré est  $\|a\|\ell$ , on peut donc voir (figure 4.7 à droite):

**Théorème.** (Euler, dans ses recherches sur le mouvement d'un corps solide ; voir Cayley, *Papers* vol. 4, p. 588). *Chaque application orthogonale préservant l'orientation ( $\det Q = 1$ ) correspond à une rotation autour d'un vecteur  $a$  et d'un angle  $\varphi$ , pour lequel on a avec (4.15)  $\tan(\varphi/2) = \|a\|$ .*

*Preuve.* La preuve ci-dessus ne marche pas si  $-1$  est une (double) valeur propre de  $Q$ . Dans ce cas, nous avons un “switch”, une rotation par l'angle  $\pi$ . QED.

FIG. 4.8 – Réflexion par un plan dans  $\mathbb{R}^3$  (en haut), par rapport à un point (en bas)

**Réflexions.** Soit donné un vecteur normalisé  $n = (n_1, n_2, n_3)$  ; considérons le plan orthogonal à  $n$  passant par l'origine. Pour un  $x$  quelconque, le produit scalaire  $\langle n|x \rangle$  est la

distance du plan, donc  $x - n\langle n|x \rangle$  est la projection orthogonale de  $x$  sur le plan. Si nous allons *deux fois* plus loin (voir figure 4.8 à gauche)

$$y = x - 2n\langle n|x \rangle \quad \text{en détail} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2n_1n_1 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 \\ -2n_2n_1 & 1 - 2n_2n_2 & -2n_2n_3 \\ -2n_3n_1 & -2n_3n_2 & 1 - 2n_3n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

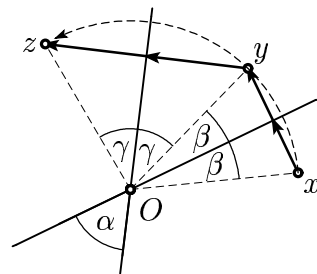
nous obtenons une *réflexion du point  $x$  par rapport au plan*. Cette transformation orthogonale *change* l'orientation, également en dimension 2.

Par contre, la réflexion par rapport à l'origine

$$y = -x \quad (4.19)$$

change l'orientation en dimension 3 (voir figure 4.8 en bas), mais préserve l'orientation en dimension 2.

**Composition.** Les transformations orthogonales forment un groupe  $O(3)$ , les transformations orthogonales à  $\det Q = 1$  le groupe  $SO(3)$ . Par contre, les transformations orthogonales à  $\det Q = -1$  ne forment pas un groupe : la composition de deux réflexions, dont les miroirs forment un angle  $\alpha$  entre eux, *est une rotation par un angle  $2\alpha$*  (car  $\alpha = \beta + \gamma$ , voir le petit dessin).



## Formes quadratiques.

En conclusion du chapitre II, revenons à ses débuts, au problème de Pappus et à son traitement par Descartes, i.e., à savoir la nature des courbes définies par une équation du type

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1 + 2ex_2 + g = 0. \quad (4.20)$$

Par exemple, l'équation

$$x_1^2 + 2bx_1x_2 + x_2^2 - 5x_1 - 4x_2 + g = 0 \quad (4.21)$$

de la figure 4.9<sup>19</sup> semble donner des coniques. Comment vérifier cette affirmation ?

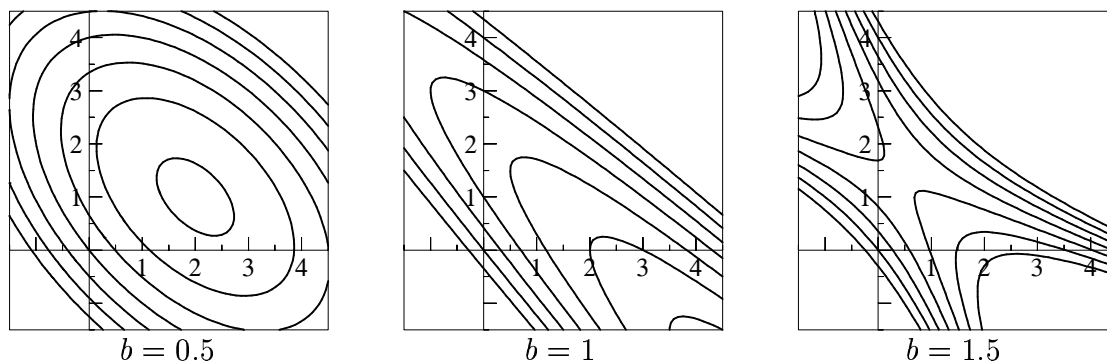


FIG. 4.9 – Les coniques correspondantes à l'équation (4.21) avec la valeur de  $b$  précisée et avec plusieurs valeurs de  $g$ .

19. recopiée, avec les belles figures suivantes, du polycopié *Math pour Info* de E. Hairer.

Nous écrivons l'équation (4.20) sous forme matricielle<sup>20</sup>

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.22)$$

et commençons par faire disparaître les termes linéaires  $2dx_1 + 2ex_2$ , à l'aide d'une translation. Pour cela, écrivons les équations (4.4) sous la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

et nous obtenons pour (4.22), grâce à la symétrie de la matrice,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Pour annuler le produit du milieu, il faut que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d \\ -e \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

équation linéaire qui détermine  $c_1, c_2$ , les coordonnées du centre (sauf si  $ac - b^2 = 0$ , le cas des paraboles). Nous récrivons les variables  $y_1, y_2$  par  $x_1, x_2$  et notons le troisième terme dans (4.24), qui est une constante, par  $-g$ . Nous arrivons ainsi à

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = g. \quad (4.26)$$

*Deuxième étape :* calculons les vecteurs propres de la matrice dans (4.26). Le polynôme caractéristique est

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{a + c}{2} \pm \sqrt{\frac{(a - c)^2}{4} + b^2}.$$

On voit déjà que les valeurs propres sont toujours réelles. En posant

$$d = \frac{c - a}{2} \quad \text{et} \quad R = \sqrt{d^2 + b^2}$$

nous avons

$$\lambda_{1,2}I - A = \begin{pmatrix} d \pm R & -b \\ -b & -d \pm R \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} b \\ d + R \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} d + R \\ -b \end{pmatrix}.$$

Les deux vecteurs sont visiblement orthogonaux et, après normalisation, la matrice  $T$  de (4.13) l'est aussi. Cette dernière formule devient donc

$$T^{-1}AT = T^tAT = \Lambda$$

---

20. la beauté deviendra parfaite avec les "coordonnées homogènes" au chapitre suivant.

et dans les nouvelles variables  $x = Ty$  et  $x^t = y^t T^t$  l'équation (4.26) sera finalement

$$x^t Ax = y^t T^t ATy = y^t \Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = g . \quad (4.27)$$

Nous sommes enfin arrivés à l'équation d'une conique, dont le type dépend des signes des  $\lambda$  et de  $g$ . Si un des deux  $\lambda = 0$ , nous avons une parabole, dont la simplification de l'équation se fait par complétion d'un carré.

**Exemple.** L'équation

$$36x_1^2 - 24x_1x_2 + 29x_2^2 + 120x_1 - 290x_2 + 545 = 0 \quad (4.28)$$

possède pour centre  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 5$ . Après la translation, cela donne

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36 & -12 \\ -12 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 180 . \quad (4.29)$$

Les valeurs propres satisfont

$$\lambda^2 - 65\lambda + 900 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 20, \quad \lambda_2 = 45 . \quad (4.30)$$

Ainsi l'équation finale est

$$20x^2 + 45y^2 = 180 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 . \quad (4.31)$$

Il s'agit donc d'une ellipse avec demi-axes  $a = 3$ ,  $b = 2$ . La direction du grand demi-axe est donnée par le vecteur propre de la *plus petite* valeur propre  $\lambda_1 = 20$ :

$$\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c &= \frac{3}{5} \\ s &= \frac{4}{5} . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Notre ellipse est donc inclinée suivant un angle valant  $\arctan \frac{4}{3}$  (voir figure 4.10 à gauche).

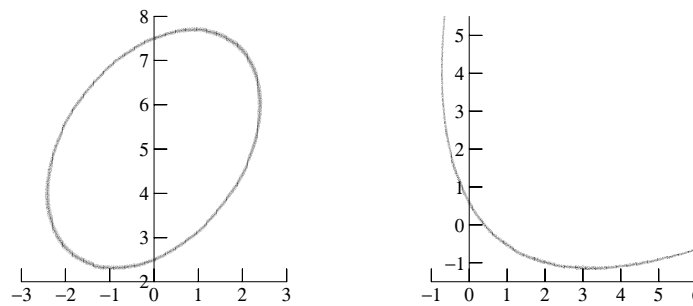


FIG. 4.10 – Les deux exemples de coniques transformées sur forme diagonale

**Le cas d'une parabole.**

$$16x_1^2 - 24x_1x_2 + 9x_2^2 - 130x_1 - 90x_2 + 50 = 0 . \quad (4.33)$$

Nous voyons que les premiers trois termes forment un carré complet

$$(4x_1 - 3x_2)^2 - 130x_1 - 90x_2 + 50 = 0 . \quad (4.34)$$

Nous allons donc poser  $4x_1 - 3x_2 = 5y_1$ , compléter à une base orthonormale et faire une rotation. Cela donne

$$25x_1^2 - 50x_1 - 150x_2 + 50 = 0. \quad (4.35)$$

On divise par 25, on complète facilement le carré et on trouve finalement après une translation

$$x_1^2 = 6x_2.$$

Nous avons une parabole (voir figure 4.10 à droite).

**Plusieurs variables.** Ici les résultats sont les mêmes, car une matrice *symétrique* a toujours des valeurs propres réelles et des vecteurs propres orthogonaux (voir *Algèbre linéaire* ou *Math pour Info*, Corollaire 2.6). Par exemple, pour  $n = 3$ , en négligeant les cas dégénérés, on a les surfaces suivantes (nous écrivons  $x, y, z$  au lieu de  $x_1, x_2, x_3$ ):

(A)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$  (ellipsoïde)

(B)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$  (hyperboloïde à deux nappes)

(C)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$  (hyperboloïde à une nappe)

(D)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$  (cône)

(E)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$  (paraboloïde elliptique)

(F)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$  (paraboloïde hyperbolique)

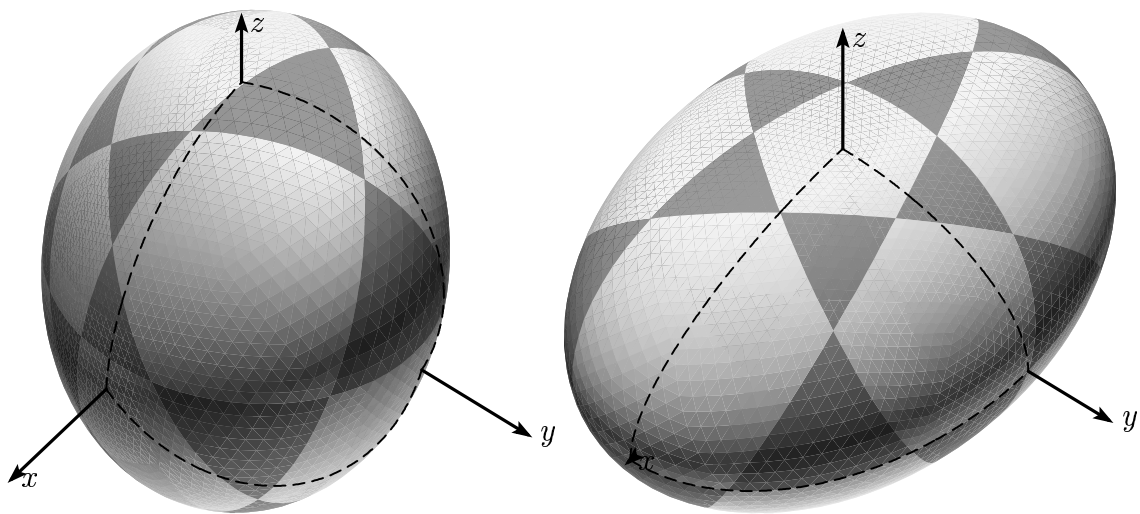
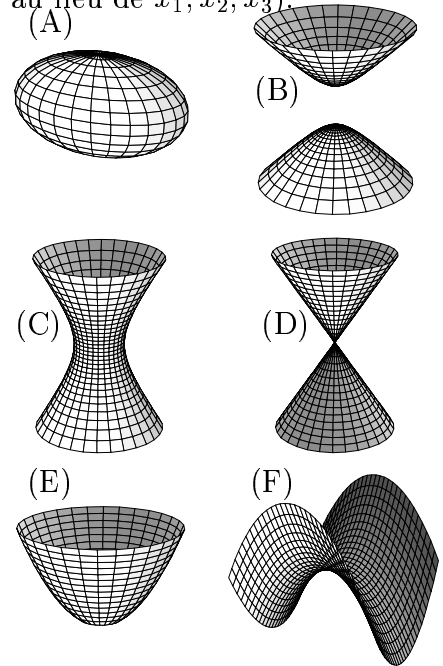


FIG. 4.11 – L'ellipsoïde (4.36), axes 1,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\frac{1}{2}$ ; en position quelconque (à gauche), transformée sur axes principales (à droite)

Tout lecteur intéressé pourrait calculer avec plaisir les valeurs et vecteurs propres de la matrice pour

$$25x_1^2 - 20x_1x_2 + 4x_1x_3 + 22x_2^2 - 16x_2x_3 + 16x_3^2 = 9 \quad (4.36)$$

et vérifier leur orthogonalité (voir figure 4.11).

**Solution du problème de la parabole et du cercle** (voir Section II.1, formule (1.29)).

Votre Didascalos a recherché pendant 45 ans une preuve simple de ce résultat. Seulement trois jours après sa conférence à Lausanne le 26 mai 2004, Sylvie Conod (Gymnase de La Tour-de-Peilz) et Christoph Soland (Gymnase du Bugnon) ont indépendamment trouvé la preuve ci-dessous, si élégante et simple, qu'il est honteux de ne pas y avoir pensé plus tôt. Comme souvent en mathématiques, un problème devient plus simple, si on le rend plus "compliqué", i.e., si au lieu de regarder les deux courbes

$$y - a - bx - cx^2 = 0 \quad (\text{la parabole}) \quad x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (\text{le cercle})$$

on étudie *toute la famille de courbes* (i.e., le "faisceau")

$$(y - a - bx - cx^2) + \mu \cdot (x^2 + y^2 - 1) = 0 \quad (\mu \text{ quelconque}).$$

Toutes ces coniques passent par les 4 points  $A_1, \dots, A_4$ . Selon la valeur de  $\mu$ , elles consistent en ellipses, paraboles ou hyperboles. Pour un cas spécial, cette conique dégénère et devient une paire de droites  $(A_1A_2) \cup (A_3A_4)$  (voir figure 4.12 à gauche). Maintenant, toutes ces

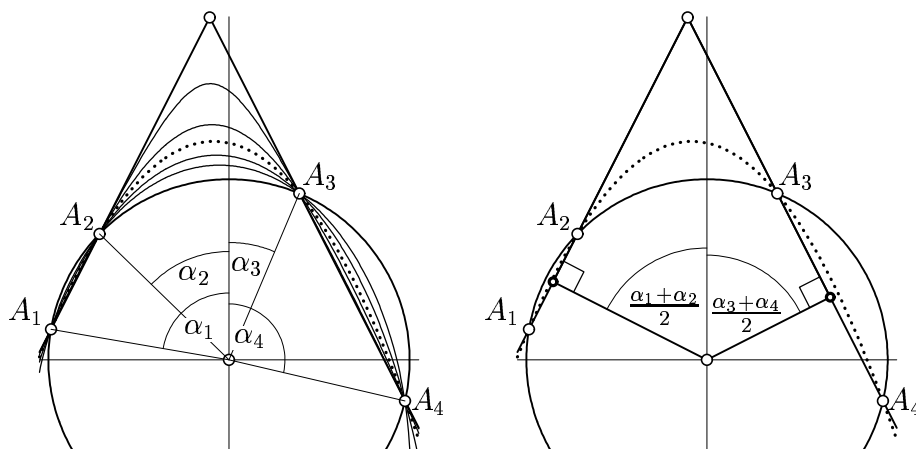


FIG. 4.12 – Le faisceau des coniques engendré par la parabole et le cercle

coniques ont la même direction d'axes. Car

- le terme  $xy$  est absent pour chaque  $\mu$ , i.e., les axes sont horizontaux et verticaux;
- les matrices  $\begin{pmatrix} a + \mu & b \\ c & d + \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \mu I$  ont pour chaque  $\mu$  les mêmes vecteurs propres.

Mais pour le cas de l'hyperbole dégénérée, le théorème est trivial (voir figure 4.12 à droite). QED.

# Chapitre III

## Géométrie non euclidienne

Besondere Bedeutung für die Entwicklung [der nicht-euklidischen Geometrie] besitzt der Göttinger Mathematiker *Kaestner* (1719–1800). Unter seiner Beihilfe entstand die noch heute wertvolle Dissertation seines Schülers *Klügel* (1739–1812): *Conatum praecipuorum theoriarum parallelarum demonstrandi recensio* etc., in welcher etwa 30 Beweisversuche des Parallelenaxioms als Trugschlüsse nachgewiesen werden.

(F. Klein 1927, *Vorl. nicht-euklidische Geometrie*, p. 274)

La Géométrie non euclidienne est la géométrie qui n'inclut *pas* le célèbre "Postulat 5" des parallèles (voir section I.2). Après 2000 ans de tentatives infructueuses pour démontrer ce postulat (voir citation), on commence à comprendre que d'autres "géométries" sont possibles si ce postulat est mis de côté. La *géométrie hyperbolique* (Gauss, J. Bolyai, Lobatchevsky) est la plus connue. Pour éviter le "Urwaldgestrüpp der Lobatschefskijschen Rechnungen" (dixit F. Klein), il est utile de débiter par la *géométrie projective*.

### III.1 Géométrie projective

Cet ouvrage est le résultat des recherches que j'ai entreprises, dès le printemps de 1813, dans les prisons de la Russie: privé de toute espèce de livre et de secours, surtout distrait par les malheurs de ma patrie et les miens propres, je n'avais pu d'abord leur donner toute perfection désirable.

(J. V. Poncelet, début du *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris 1822)

Après avoir été l'élève de Monge à l'École polytechnique, Poncelet commença une carrière militaire. Lieutenant du génie, il prit part à la campagne de Russie où il fut fait prisonnier et relégué à Saratov sur la Volga. Durant son emprisonnement, privé de tout ouvrage scientifique et réduit à ses souvenirs des cours et des lectures de Monge et de Carnot, il commença ses recherches sur la géométrie projective ...

(*Encyclopædia Universalis*, Thesaurus Index p. 2375)

Unter den Leistungen der letzten fünfzig Jahre auf dem Gebiete der Geometrie nimmt die Ausbildung der *projektivischen Geometrie* die erste Stelle ein.

(F. Klein 1872, début du *Erlanger Programm*, Werke I, p. 460)

La vie scientifique française bascule en 1794 avec la fondation de l'*École Normale* et de

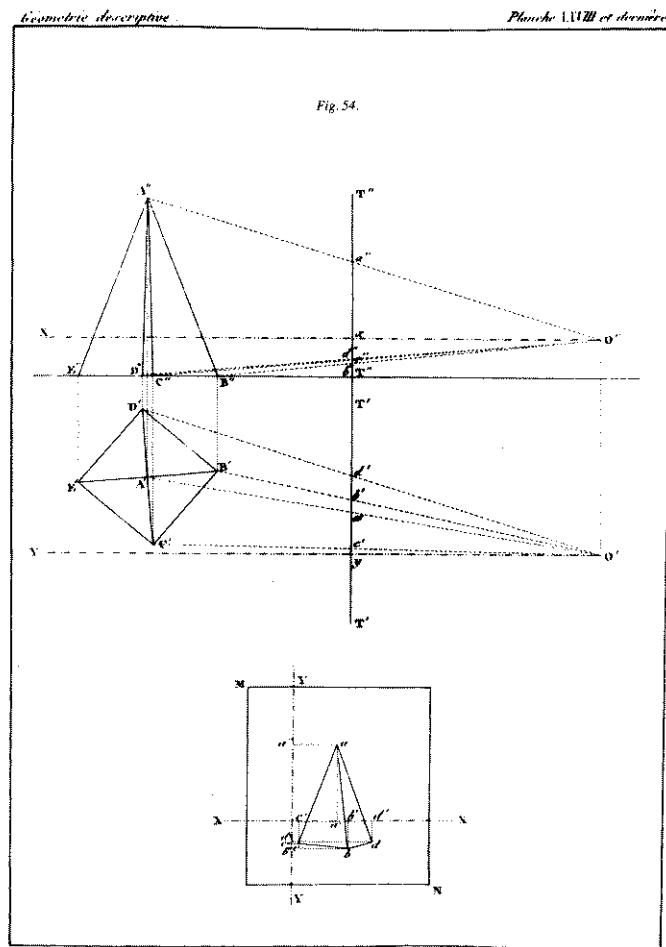


FIG. 1.1 – *Fac-similé du cours de Monge (1795) Géométrie descriptive, Douzième Leçon, Théorie de la perspective, 21 floréal, an III (copié de : Jean Dhombres, L'école normale de l'an III, p. 448, Dunod 1992)*

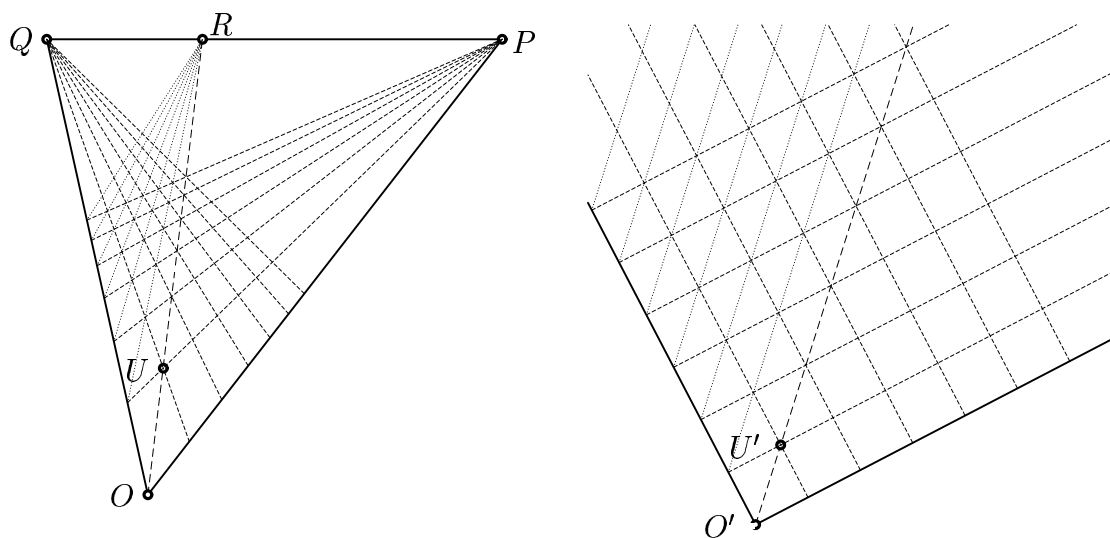


FIG. 1.2 – *On cherche à transformer un triangle en un repère orthogonal*

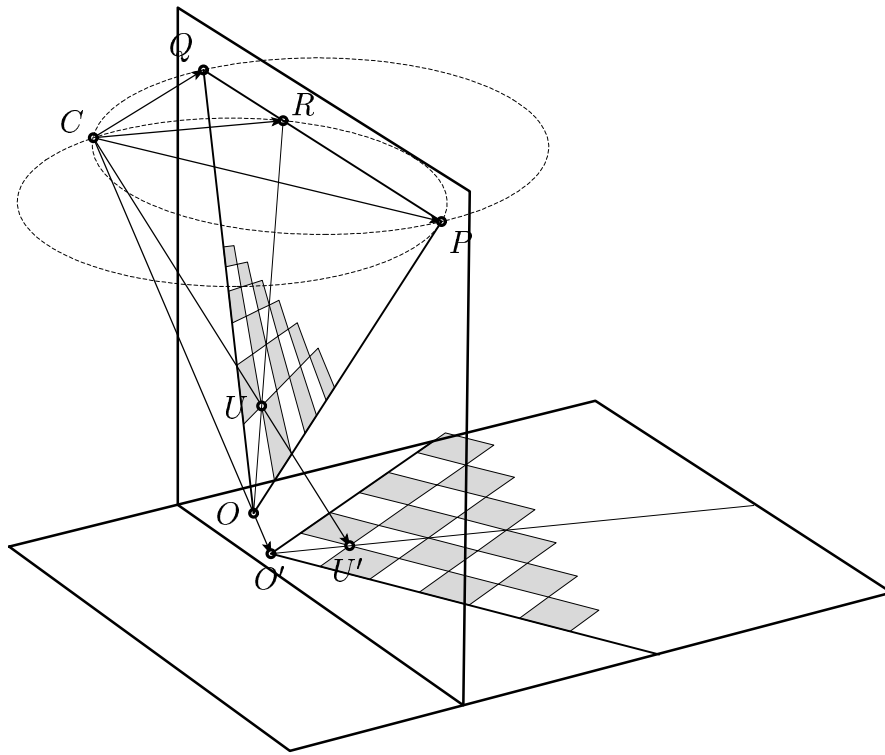


FIG. 1.3 – Solution du problème de la figure précédente

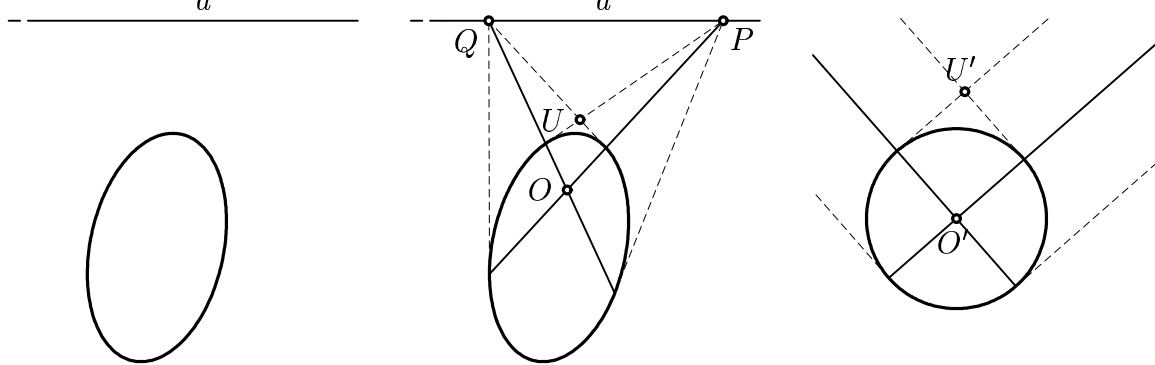


FIG. 1.4 – Projection perspective transformant une ellipse en un cercle

l'École Polytechnique, “pour tirer la Nation Française de la dépendance où elle a été jusqu'à présent de l'industrie étrangère...”, où les “admirables leçons” de Lagrange, Laplace et Monge ont forgé toute une génération de mathématiciens de tout premier ordre (Fourier, Poisson, Cauchy, Liouville, Poncelet, Gergonne...). L'extraordinaire destin de Poncelet le conduisit, après ses études, au service militaire et à la campagne de Napoléon contre la Russie, “sur le champ de bataille de Krasnoï, d'où il n'est sorti vivant que par une faveur spéciale de Dieu, au milieu de ses chefs, de ses camarades tués ou atteints de blessures, toutes mortelles dans ce pernicieux climat”. Dans sept “cahiers” écrits lors de deux années d'emprisonnement en Russie 1813/14 (voir citations), il esquisse les bases de la *géométrie projective*, qui amènent au *Traité des propriétés projectives des figures* (1822). Les cahiers originaux ont été publiés en 1862 (*Applications d'analyse et de géométrie*).

**Lemme PP** (sur la projection perspective). Soit  $OPQ$  un triangle quelconque et  $U$  un “point unité” quelconque à l'intérieur de  $OPQ$  (voir figure 1.2 à gauche). Alors il existe

une projection perspective qui renvoie la droite  $PQ$  à l'infini et pour laquelle les points  $P$  et  $Q$  sont les “points de fuite” d'un repère orthogonal centré en  $O'$ , l'image de  $O$ , et l'image  $U'$  de  $U$  est un point d'unité (voir figure 1.2 à droite).

*Preuve.* Nous prolongeons  $(OU)$  pour trouver le point  $R$  sur  $(PQ)$ . Ce sera le point de fuite des diagonales. Nous plaçons le triangle dans un “tableau” vertical avec la ligne  $(PQ)$  en position horizontale ; nous supposons le deuxième plan de projection en position horizontale (voir figure 1.3). Le point de projection  $C$  doit donc être à la même hauteur que  $P$  et  $Q$ . Ainsi les angles  $\widehat{PCQ}$  et  $\widehat{PCR}$  doivent être de  $90^\circ$  et  $45^\circ$  respectivement. Donc le point  $C$  est à positionner sur l'intersection de deux cercles de Thalès. QED.

**Lemme PP'** (Poncelet 1814, IIIe Cahier, Princ. IV). *Soit une courbe du deuxième degré donnée et une droite  $d$ , les deux situées dans un même plan (voir figure 1.4 à gauche). Alors il existe une projection centrale, telle que la projection de la courbe soit un cercle, et, en même temps, la droite  $d$  passe à l'infini (voir figure 1.4 à droite).*

*Preuve.* On choisit un point  $P$  quelconque sur  $d$  (voir figure 1.4 au milieu). La polaire de  $P$  coupera  $d$  en un deuxième point  $Q$ , les deux polaires se croisent en un point  $O$  et les tangentes en  $U$ . Il suffit alors d'appliquer le Lemme PP. L'image de la courbe aura des tangentes orthogonales aux axes dans les points  $x = \pm 1$ ,  $y = 0$  et  $y = \pm 1$ ,  $x = 0$ . Il s'agit donc d'un cercle. QED.

### “Principe de la projection centrale” de Poncelet.

La doctrine est neuve, piquante et d'une vérité incontestable.

(M. Brianchon 1819, cité dans Poncelet 1862, vol. 2, p. 541)

On appelle ainsi l'idée de Poncelet, qui consiste à transformer la figure d'un théorème par une projection centrale bien choisie en une forme presque triviale. Grâce à ce principe, Poncelet a démontré de façon surprenante et élégante de nombreux théorèmes anciens et nouveaux. Voici quatre exemples, chacun démontré en quatre lignes<sup>1</sup> ; nous découvrons aussi les précurseurs de la géométrie projective :

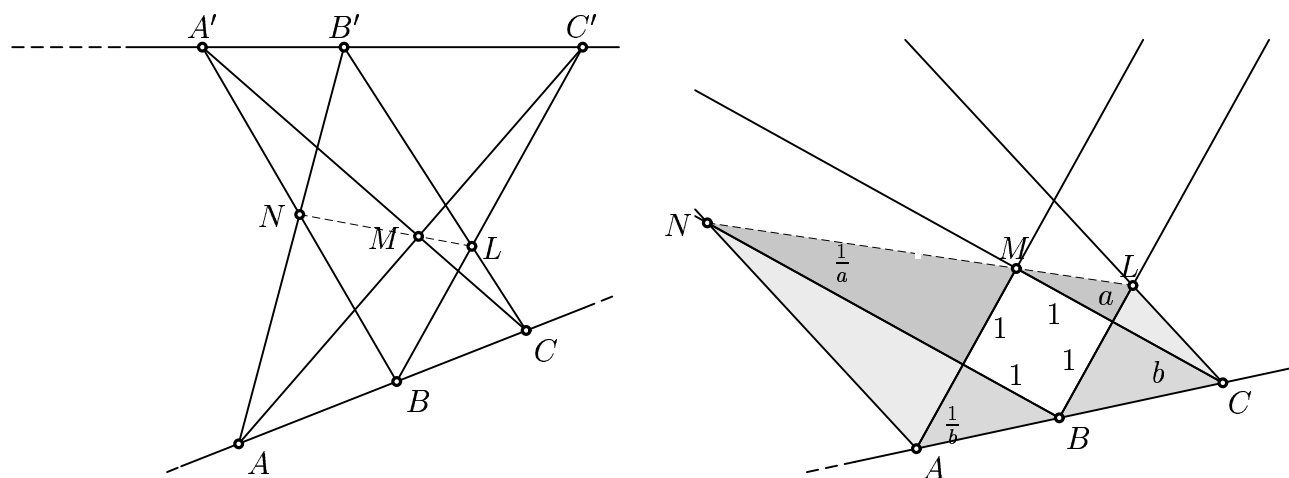


FIG. 1.5 – Théorème de Pappus et sa preuve par le “principe de la projection centrale”

**Théorème de Pappus.** *Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points sur une droite et  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  trois autres points sur une autre droite (voir figure 1.5 à gauche). Alors les points  $N$ ,  $M$  et  $L$ ,*

1. C'est pour cela que tout le monde est fanatique des  $4 \times 4$ !...

les intersections “en  $X$ ” des paires  $AB$ ,  $AC$  et  $BC$ , se trouvent également sur une droite.

*Preuve*<sup>2</sup>. Nous appliquons le Lemme PP au triangle  $BC'A'$  avec point d'unité  $M$ . Ainsi est créé un carré  $BM$  (voir figure 1.5 à droite); les lignes joignant les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  deviennent des parallèles. Le théorème se réduit alors à celui de Thalès, car les six triangles remplissant le quadrilatère  $NACL$  sont semblables deux à deux. QED.

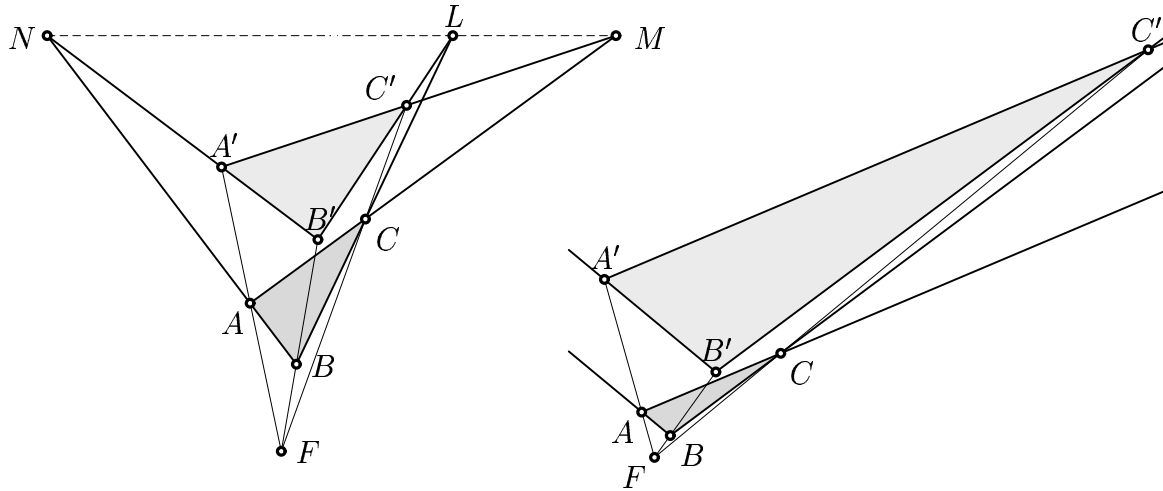


FIG. 1.6 – Théorème de Desargues et sa preuve

**Théorème de Desargues** (Desargues 1636). Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points et  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  trois autres points tels que les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$ ,  $(CC')$  sont concurrentes (voir figure 1.6 à gauche). Alors les points  $N$ ,  $M$  et  $L$ , les intersections des paires  $(AB) \cap (A'B')$ ,  $(AC) \cap (A'C')$ , et  $(BC) \cap (B'C')$ , sont alignés.

*Preuve*. Par une projection, envoyons deux de ces points, disons  $N$  et  $L$ , à l'infini (voir figure 1.6 à droite). Ainsi, les droites  $(AB)$ ,  $(A'B')$  et  $(BC)$ ,  $(B'C')$  deviennent parallèles. Par Thalès et Euclide I.4, les triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont semblables. Donc  $(AC)$  et  $(A'C')$  sont parallèles, i.e., et le point  $M$  est aligné avec  $N$  et  $L$ . QED.

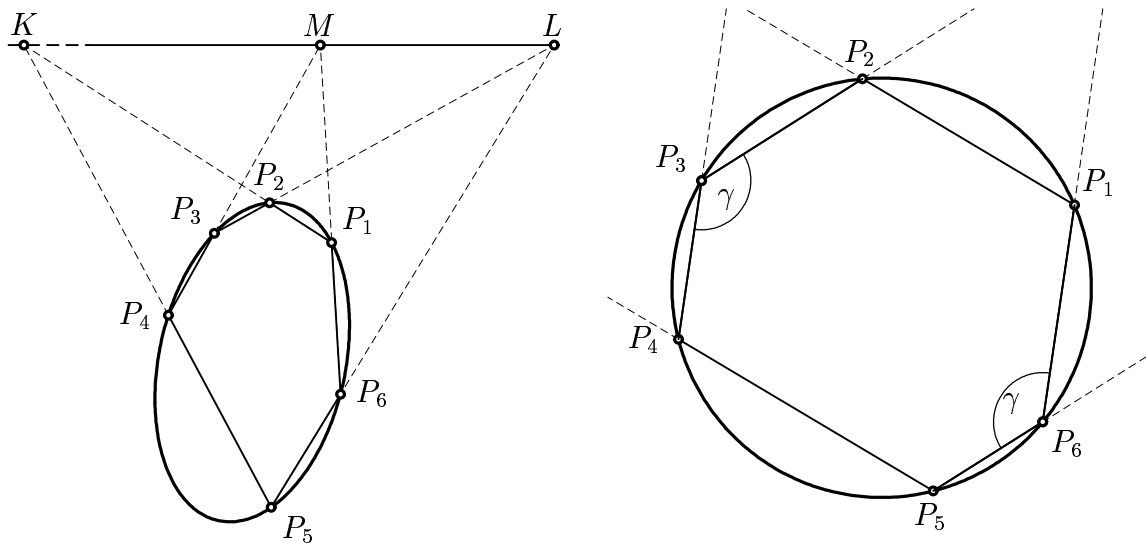
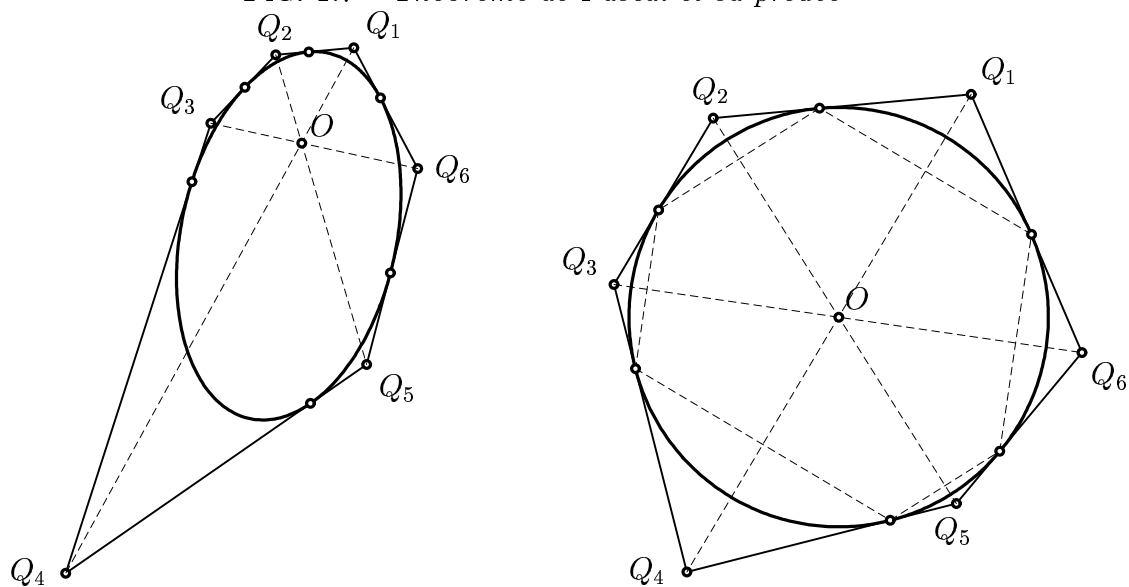
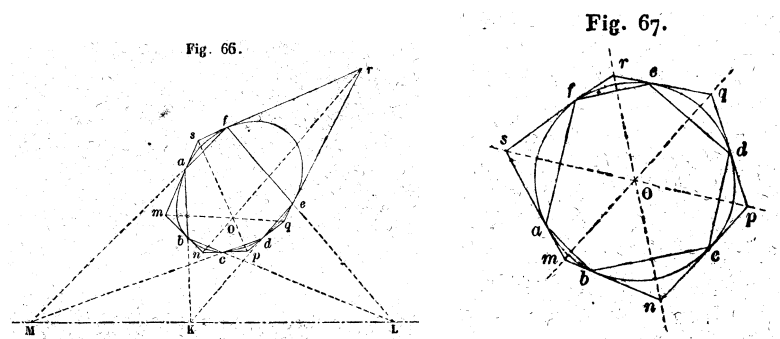
**Théorème de Pascal** (Pascal 1640, à l'âge de 16 ans; “C'est là le célèbre théorème de l'hexagramme mystique attribué à Pascal...” (Poncelet)). Soit  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5$ ,  $P_6$  un hexagramme inscrit dans une section conique (voir figure 1.7 à gauche; voir aussi la figure 1.9). Alors les points  $K = (P_1P_2) \cap (P_4P_5)$ ,  $L = (P_2P_3) \cap (P_5P_6)$ , et  $M = (P_3P_4) \cap (P_6P_1)$ , les intersections des côtés opposés, sont alignés.

*Preuve*. Nous appliquons le Lemme PP' en envoyant deux de ces points, disons  $K$  et  $L$ , à l'infini (voir figure 1.7 à droite). Ainsi, après projection, deux paires de côtés opposés deviennent parallèles. Par Eucl. III.20, les deux angles notés  $\gamma$  sont égaux et, par conséquent, la troisième paire de côtés opposés doit être parallèle aussi. QED.

**Théorème de Brianchon** (Brianchon 1806; “C'est le beau théorème découvert par M. Brianchon.” (Poncelet p. 137)). Soit  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ ,  $Q_4$ ,  $Q_5$ ,  $Q_6$  un hexagramme circonscrit à une section conique (voir figure 1.8 à gauche). Alors les trois diagonales joignant les sommets opposés sont concurrentes.

*Preuve*. Les points  $P_1, \dots, P_6$ , où l'hexagone touche la conique, forment un hexagone inscrit, sur lequel nous appliquons la même projection que pour la preuve précédente. Les triangles

2. Poncelet 1814, Cahier VII, 2e Partie, art. V.

FIG. 1.7 – *Théorème de Pascal et sa preuve*FIG. 1.8 – *Théorème de Brianchon et sa preuve*FIG. 1.9 – *Dessins de Poncelet (1814, publ. 1862) concernant Pascal et Brianchon*

$P_i Q_i P_{i+1}$  deviennent des triangles isocèles, dont les bases opposées sont parallèles. Ainsi, leurs hauteurs se confondent, et passent toutes par le centre du cercle QED.

## Le “Grand Théorème” de Poncelet.

Une des visions des plus spectaculaires de Poncelet fut son “Grand Théorème”, baptisé de manière un peu plus British “Poncelet’s Porism”. Sa preuve rigoureuse a tenu en haleine pendant un siècle des grands mathématiciens (Jacobi, Cayley, Lebesgue,...). Pour des preuves modernes (mais pas élémentaires) voir Griffiths–Harris (*L’Enseign. Math.* 24, 1978) et Tabachnikov (*L’Enseign. Math.* 39, 1993).

**Grand Théorème de Poncelet** (Poncelet 1813 (VI<sup>e</sup> Cahier, Sect. III et 1822, Pl. XII, Fig. 97) Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux coniques, l’une dans l’autre, et soit  $P_0$  un point sur  $\mathcal{C}$ . Commençons alors par construire un polygone  $P_0, P_1, P_2, \dots$  inscrit à  $\mathcal{C}$  et circonscrit à  $\mathcal{C}'$  (voir figure 1.10 (a)). Supposons que pour un certain entier  $n$  le polygone se ferme avec  $P_n = P_0$ . Alors la même propriété reste vraie quel que soit le point de départ  $Q_0$  sur  $\mathcal{C}$  (voir figure 1.10 (b)).

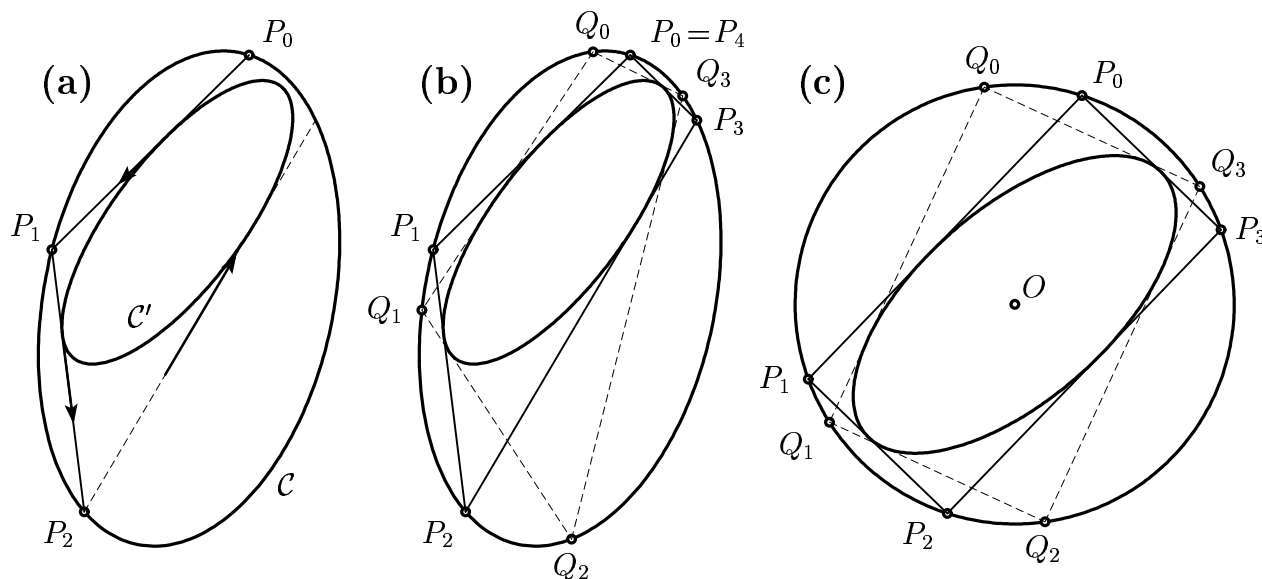
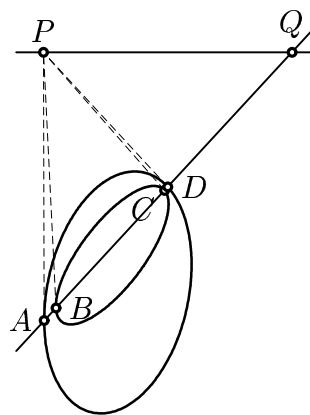


FIG. 1.10 – Théorème de Poncelet et sa preuve

*Preuve.* Peu connue et quasi immédiate est la preuve pour un cas spécial, le cas  $n = 4$ . Commençons, bien sûr, par ramener le résultat à un cas plus simple :

Soit  $P$  un point, pour lequel les deux polaires aux deux coniques coïncident (algébriquement, cela conduit à un problème à vecteurs propres d’une matrice  $3 \times 3$ ). Sur cette polaire, on choisit un point  $Q$  tel qu’une projection  $Q \mapsto \infty$  produise des segments  $AB$  et  $CD$  de la même longueur. Appliquons alors le Lemme PP’ à la droite  $(PQ)$  et à la conique  $\mathcal{C}$ . Après la projection, les 4 tangentes sont toutes parallèles. La polaire devient un diamètre des deux coniques (dont une est un cercle), qui sont donc concentriques (voir figure 1.10 (c)).

Mais ici, pour le cas  $n = 4$ , nous retrouvons la situation du *cercle de Monge* (voir chapitre II, formule (1.28)) : si le rayon du cercle satisfait  $R^2 = a^2 + b^2$ , le polygone de Poncelet devient un rectangle, et tous ces polygones se referment au quatrième point. Si  $R^2$  est plus grand ou plus petit, aucun polygone ne se referme avec  $n = 4$ . QED.



## “Principe de la continuité” de Poncelet.

Certaines preuves, par exemple celle du Théorème de Pascal pour le cas où la droite  $KLM$  passe à travers la conique, ne sont pas toujours valables. Poncelet décrète alors son *Principe de la continuité*, qui dit que la vérité d’un tel théorème demeure, même quand certaines valeurs deviennent imaginaires. Ce principe, sans aucun doute, fut vigoureusement critiqué (surtout par Cauchy) ; le “principe de la prolongation analytique” (voir cours d’Analyse II) nous délivre de tous ces soucis et donne finalement raison à Poncelet.

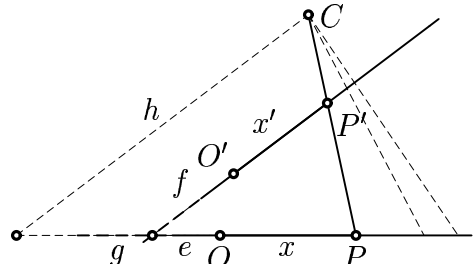
Parfois, même pour un géomètre “synthétique”, l’analyse arrive à point nommé. La voilà :

## La droite projective.

Die durch den Ponceletschen Traité eingeleitete Bewegung pflanzte sich nach Deutschland fort und ward einerseits von den Analytikern *Moebius* (1790–1868) und *Plücker* (1801–1868) und andererseits von den Synthetikern *Steiner* (1796–1863) und *von Staudt* (1798–1867) weitergeführt.

(F. Klein 1927, *Vorl. nicht-euklidische Geometrie*, p. 11)

**Transformations projectives.** La théorie *analytique* de la géométrie projective a été fondée, suite au Traité de Poncelet (voir citation) en Allemagne par Moebius et Plücker. Elle commence par les formules pour une transformation projective en *une* dimension. Nous avons par Thalès :

$$\begin{aligned} \frac{h}{x+g} &= \frac{x'+f}{x+e} \\ x' &= \frac{hx+he}{x+g} - f \\ \Rightarrow x' &= \frac{ax+b}{cx+d} \end{aligned} \quad (1.1)$$


Donc, nous appelons

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow cxx' + dx' = ax + b \Leftrightarrow x = \frac{dx' - b}{-cx' + a} \quad (ad - bc \neq 0) \quad (1.2)$$

*transformation projective* ou *transformation de Moebius*. Nous les avons déjà rencontrées (voir la solution de Carnot du problème de Cramer-Castillon (II.1.7)). Elles forment un *groupe*.

**La droite projective.** Une transformation projective envoie un “point à l’infini” sur un point ordinaire (le point  $x' = \frac{a}{c}$ ), et un point ordinaire (le point  $x = -\frac{d}{c}$ ) à l’infini. Pour nous libérer de toute irrégularité, déclarons

la *droite projective*  $\mathbb{P}$  est la droite  $\mathbb{R}$  plus un point à l’infini.

**Coordonnées homogènes.** Pour “capturer” le point à l’infini de manière “suuber und tipptopp”, et pour simplifier maints autres concepts en géométrie analytique, Plücker (1830, *Crelle J.* vol. 5, p. 1 et vol. 6, p. 107) a l’idée d’introduire des *coordonnées homogènes* : chaque point  $x$  est représenté par une *paire* de nombres  $(x_1, x_2)$  en posant

$$x = \frac{x_1}{x_2} = \frac{\rho x_1}{\rho x_2} . \quad (1.3)$$

Ces coordonnées sont loin d'être uniques, car on peut les multiplier par un facteur  $\rho$  quelconque. Si on pose  $x_2 = 0$ , on obtient le point à l'infini. Les formules (1.2) pour transformations projectives deviennent ici particulièrement élégantes (multiplier numérateur et dénominateur par  $x_2$ ) :

$$\frac{x'_1}{x'_2} = \frac{a\frac{x_1}{x_2} + b}{c\frac{x_1}{x_2} + d} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

(la division usuelle par le déterminant est superflu car il s'agit de coordonnées homogènes).

On peut ainsi interpréter la droite projective  $\mathbb{P}$  par (voir figure 1.11)

- l'ensemble des droites du plan passant par l'origine ;
- le cercle  $S^1$  où les points opposés  $x'$  et  $-x'$  sont identifiés ; ou encore
- le cercle  $S^1$  des points  $\tilde{x}$  projeté par “projection stéréographique” (voir section I.4).

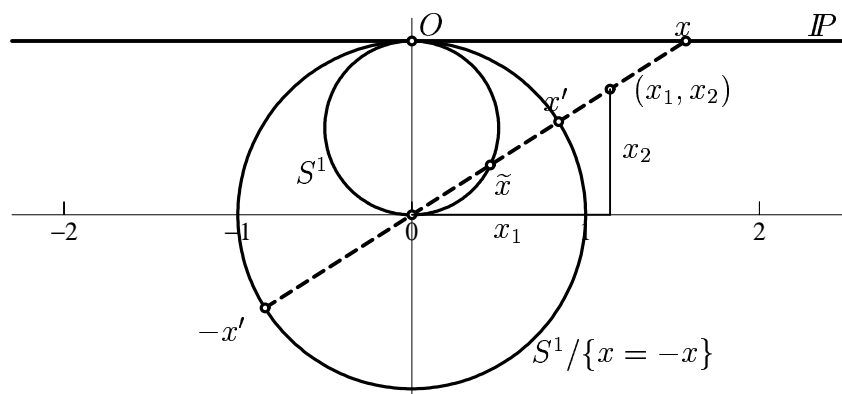


FIG. 1.11 – *Droite projective*

## Le birapport.

Nous avons compris, entre-temps, que le Théorème de Thalès est le pilier central de la géométrie : le *rapport* entre deux longueurs reste préservé par les projections *parallèles*. Malheureusement, cette belle propriété est détruite par les projections *perspectives*. Mais, il y a un remplaçant : le *birapport*.

**Définition.** Soient  $P_1, P_2, P_3, P_4$  quatre points à coordonnées (affines)  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Alors on appelle

$$XR(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{P_1 P_3}{P_2 P_3} : \frac{P_1 P_4}{P_2 P_4} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} \quad (1.5)$$

le *birapport* (angl.: cross ratio ; all.: Doppelverhältnis) des quatre points.

**Théorème** (Pappus). *Le birapport de quatre points est invariant sous une transformation projective, i.e.,  $XR(P'_1, P'_2, P'_3, P'_4) = XR(P_1, P_2, P_3, P_4)$ .*

Nous donnons deux preuves, les deux tirées d'un cours de W. Gröbner (1962).

*Preuve algébrique.* On calcule pour la différence de deux points après la projection (1.2)

$$x'_i - x'_k = \frac{ax_i + b}{cx_i + d} - \frac{ax_k + b}{cx_k + d} = \frac{\Delta \cdot (x_i - x_k)}{(cx_i + d)(cx_k + d)}$$

où  $\Delta = ad - bc$ . Ainsi on voit (insérer et simplifier) que

$$\frac{x'_3 - x'_1}{x'_3 - x'_2} : \frac{x'_4 - x'_1}{x'_4 - x'_2} = \dots = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} \quad \text{QED.}$$

*Preuve géométrique.* Nous avons par le “théorème du sinus” (voir Sect. I.4) appliqué aux triangles  $P_1P_3C$  et  $P_2P_3C$  (voir figure 1.12)

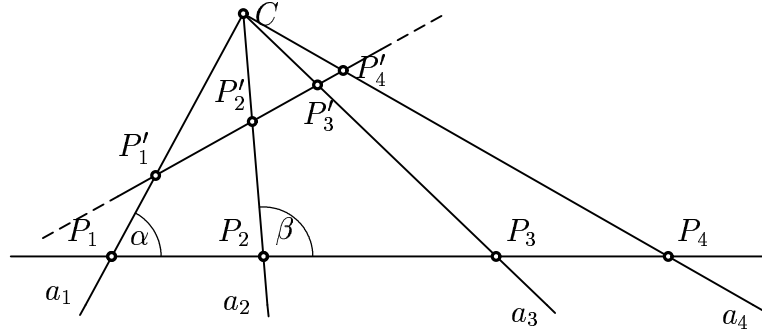


FIG. 1.12 – *Préservation du birapport par une transformation projective.*

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_1P_3}{CP_3} &= \frac{\sin \widehat{a_1a_3}}{\sin \alpha} \\ \frac{P_2P_3}{CP_3} &= \frac{\sin \widehat{a_2a_3}}{\sin \beta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{P_1P_3}{P_2P_3} = \frac{\sin \widehat{a_1a_3}}{\sin \widehat{a_2a_3}} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Similairement, pour les triangles  $P_1P_4C$  et  $P_2P_4C$  on obtient

$$\frac{P_1P_4}{P_2P_4} = \frac{\sin \widehat{a_1a_4}}{\sin \widehat{a_2a_4}} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Si on prend le rapport des deux expressions, le facteur  $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$  disparaît et le birapport devient

$$XR(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\sin \widehat{a_1a_3}}{\sin \widehat{a_2a_3}} : \frac{\sin \widehat{a_1a_4}}{\sin \widehat{a_2a_4}}. \quad (1.6)$$

Cette expression est uniquement dépendante des 4 droites concurrentes  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , et est donc la même pour les intersections avec chaque droite. On l'appelle le *birapport des quatre droites*. QED.

**Points harmoniques.** On appelle quatre points  $P_1, P_2, P_3, P_4$  des *points harmoniques*, si

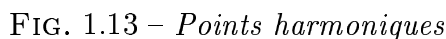
$$XR(P_1, P_2, P_3, P_4) = -1. \quad (1.7)$$

Si nous plaçons  $P_1$  et  $P_2$  aux coordonnées  $\pm 1$  (voir figure 1.13), cette condition devient

$$XR = \frac{x_3 + 1}{x_3 - 1} : \frac{x_4 + 1}{x_4 - 1} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad (x_3 + 1)(x_4 - 1) = (1 - x_3)(x_4 + 1) \quad \Leftrightarrow \quad x_3x_4 = 1, \quad (1.8)$$

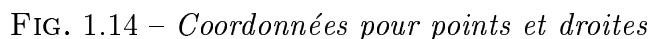
une relation particulièrement simple. Elle exprime le fait que (voir figure 1.13)

- $P_3$  est sur la polaire du point  $P_4$  ;



- $$\frac{1}{P_1 P_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{P_1 P_3} + \frac{1}{P_1 P_4} \right) \quad \text{car} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+x_3} + \frac{1}{1+x_4} \right).$$

**Coordonnées de Plücker.** Rappelons l'équation d'une droite dans  $\mathbb{R}^2$  :  $y = px + q$  (voir figure II.1.11). Ici, les valeurs de  $p$  et  $q$  sont censées fixes, et quand  $x$  et  $y$  bougent, on obtient *l'ensemble des points placés sur la droite* (voir figure 1.14 à gauche).


$$p = -\frac{u_1}{u_2}, \quad q = -\frac{u_3}{u_2} \quad \Rightarrow \quad \text{équation de la droite: } u_1x + u_2y + u_3 = 0.$$

3. d'où le nom ; cette expression vient de la musique, car les longueurs d'onde  $\frac{\lambda}{2}$ ,  $\frac{\lambda}{3}$ ,  $\frac{\lambda}{4}$ , ..., les "harmoniques" du ton principal  $\lambda$ , sont les "moyennes harmoniques" de leurs voisins.

Elle devient *encore* plus jolie si on introduit les *coordonnées homogènes*

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3} \quad \Rightarrow \quad \text{équation de la droite : } \boxed{u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0}, \quad (1.9)$$

une formule parfaitement symétrique.

**Le plan projectif.** Une “droite” est spéciale parmi les droites de (1.9), la droite

$$x_3 = 0 \quad \text{i.e., les coordonnées } u_1 \text{ et } u_2 \text{ sont nulles,} \quad (1.10)$$

car elle représente *les points à l’infini*. Donc on peut dire

le *plan projectif*  $\mathbb{P}^2$  est le plan  $\mathbb{R}^2$  plus *une droite projective*  $\mathbb{P}^1$  à l’infini.

On peut interpréter le plan projectif  $\mathbb{P}^2$  par (voir figure 1.15 à gauche)

- l’ensemble des droites de l’espace  $\mathbb{R}^3$  passant par l’origine ;
- la sphère  $S^2$  où les points opposés  $x'$  et  $-x'$  sont identifiés ; ou encore
- la demi-sphère bordée par un cercle représentant  $\mathbb{P}^1$ , la droite à l’infini.

Par contre, l’interprétation par “projection stéréographique” ne marche plus, car dans ce cas l’infini est *un point* et non une droite.

**Théorème** (F. Klein, *Math. Ann.* vol. 7, 1874, p. 550, et L. Schläfli<sup>4</sup>) *Le plan projectif  $\mathbb{P}^2$  est une variété non orientable.*

*Preuve.* Prenons un petit cercle (voir figure 1.15 à droite) en position “1” traversant la droite à l’infini. Si on le déplace en position “2”, “3”, et finalement “4”, on voit que son sens de rotation a tourné. QED.

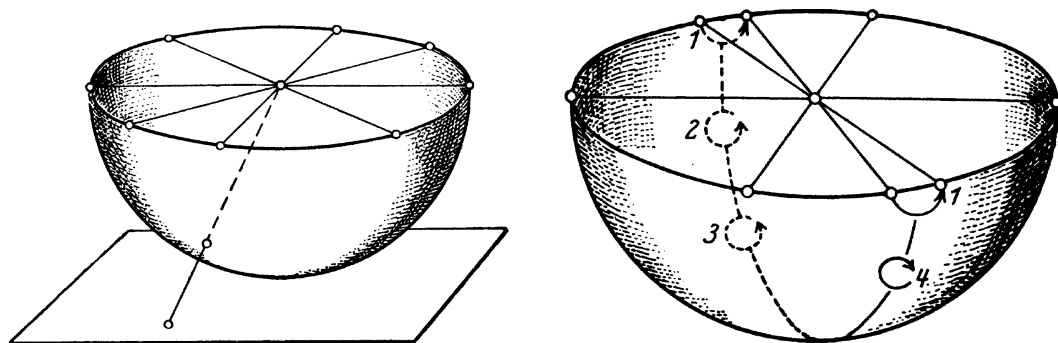


FIG. 1.15 – *Plan projectif* (dessin de F. Klein, *Nicht-eukl. Geo.*, 1928, p. 15)

## Principe de la dualité.

The principle of duality may properly be ascribed to Gergonne (1771–1859). Poncelet protested that it was nothing but his method of reciprocation with respect to a conic (polarity), and Gergonne replied

4. Ludwig Schläfli (1812-1895) enseigna les mathématiques dans une école de Thun, s’intruisant lui-même en mathématiques supérieures, quand, en 1843, Steiner allant à Rome avec Jacobi, Dirichlet et Borchardt, choisit Schläfli comme interprète. Dirichlet lui donna des leçons quotidiennes (Dieudonné, *Abrégé Hist. des math.* II, p. 453).

that the conic is irrelevant... It is sad that such a beautiful discovery was marred by bitter controversy over the question of priority.

(H.S.M. Coxeter, *The real projective plane* (1949), p. 13-14)

Die Auffindung des Dualitätsprinzips, das von unserem heutigen Standpunkt aus nicht allzu tiefliedend erscheint, stellte eine wesentliche wissenschaftliche Leistung dar. Man erkennt dies am besten daran, dass rund 150 Jahre nach der Auffindung des Pascalschen Satzes vergangen sind, ehe der Satz des Brianchon gefunden wurde ...

(F. Klein, *Nicht-euklidische Geom.* 1928, p. 38)

**Théorie des polaires réciproques (1817) de Poncelet.** Comparons les figures 1.7 et 1.8 : nous constatons que les côtés  $P_i P_{i+1}$  sont les *polaires* des points  $Q_i$ . Par la propriété des polaires, les intersections  $K$ ,  $M$  et  $L$  sont les pôles des diagonales  $Q_i Q_{i+3}$ . Et le fait que  $K$ ,  $M$  et  $L$  sont situées sur une droite (Th. de Pascal) est équivalent au fait que les polaires passent par un point, le pôle correspondant. Ainsi, le Th. de Brianchon n'est rien d'autre qu'une sorte de "dual" du Th. de Pascal. Cette "trivialité" a mis 150 ans pour être découverte (voir citation) !...

**Dualité axiomatique (Gergonne 1824/27) ;** Gergonne a découvert que cette dualité découle directement des axiomes concernant lignes et points, sur lesquels il base sa géométrie projective, et que la conique n'est pas nécessaire. Pour détails voir le livre de Coxeter (de la citation ci-dessus).

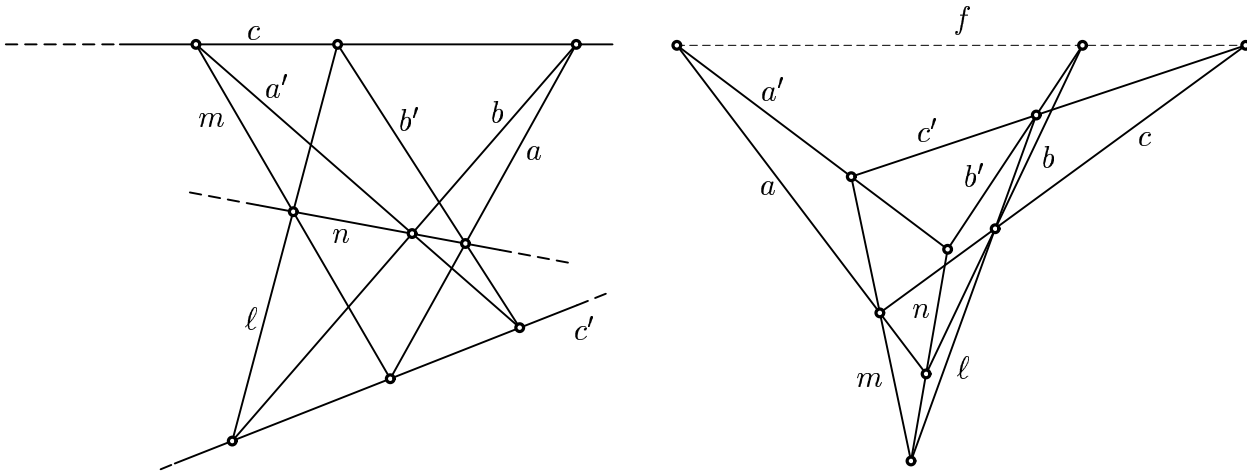


FIG. 1.16 – Les deux des Théorèmes de Pappus et Desargues sont “Pappus” et “Desargues” eux mêmes !...

**Dualité des coordonnées (Plücker 1830).** Un troisième accès à la dualité est la parfaite symétrie de la formule (1.9), très justement placée dans une boîte. En fait, il y a symétrie entre les deux questions

Un point  $x$  est l'intersection  
de deux droites  $u$  et  $v$

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0$$

Une droite  $u$  relie  
deux points  $x$  et  $y$

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$$

$$y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3 = 0$$

La réponse est chaque fois le produit vectoriel (3.17), une fois  $x = u \times v$ , l'autre fois  $u = x \times y$ . Contrairement à la géométrie euclidienne, deux droites se rencontrent *toujours*, simplement le point d'intersection est parfois à l'infini. Nous résumons :

**Principe de dualité.** À chaque théorème en géométrie projective correspond un “théorème dual”, dans lequel

<i>droites</i>	$\leftrightarrow$	<i>points</i>
<i>point intersection de 2 droites</i>	$\leftrightarrow$	<i>droite reliant 2 points</i>
<i>droites concurrentes</i>	$\leftrightarrow$	<i>points alignés</i>

sont interchangés.

*Mettons un petit bémol.* L'espoir de trouver gratuitement beaucoup de nouveaux théorèmes est trompeur : par exemple, les théorèmes de Pappus et de Desargues, que nous connaissons déjà, se reproduisent tout simplement eux-mêmes (voir figure 1.16).

**Transformations projectives du plan.** L'analogue de la transformation (1.4) pour le plan devient en coordonnées homogènes (Chasles 1837, von Staudt 1847)

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{ou simplement} \quad x' = Ax . \quad (1.11)$$

*Transformation contragrédiente.* Question : comment se transforment les coordonnées des droites sous une transformation projective (1.11) des points ? Solution : posons  $u' = Bu$ . La condition  $u^t x = 0$  (le point  $x$  est sur la droite  $u$ ) doit être équivalente à  $(u')^t x' = 0$ . Car

$$(u')^t x' = u^t B^t Ax$$

cela veut dire

$$x' = Ax \quad \Leftrightarrow \quad u' = (A^t)^{-1} u . \quad (1.12)$$

Cette transformation s'appelle *contragrédiente* à la première. Puisque un facteur constant (la division par le déterminant) ne change pas les coordonnées homogènes, nous pouvons aussi dire (voir la formule de Cramer, *Algèbre* IV.4, Prop. en page 15) que

la matrice  $B$  est la matrice des mineurs d'ordre  $n - 1$  (multipliés par  $(-1)^{i+j}$ ) de  $A$ .

## Théorie projective des coniques.

Ici, encore, les coordonnées homogènes font miracle : prenons la formule générale (II.1.17). En introduisant les coordonnées (1.9), et en multipliant par  $x_3^2$ , on obtient

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1x_3 + 2ex_2x_3 + fx_3^2 = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

que nous écrivons

$$x^t Ax = 0 \quad (1.13)$$

où  $A$  est une matrice  $3 \times 3$  symétrique. Une transformation projective (1.11)  $x = Tx'$  transforme cette équation en

$$(x')^t A' x' = 0 \quad \text{où} \quad A' = T^t A T . \quad (1.14)$$

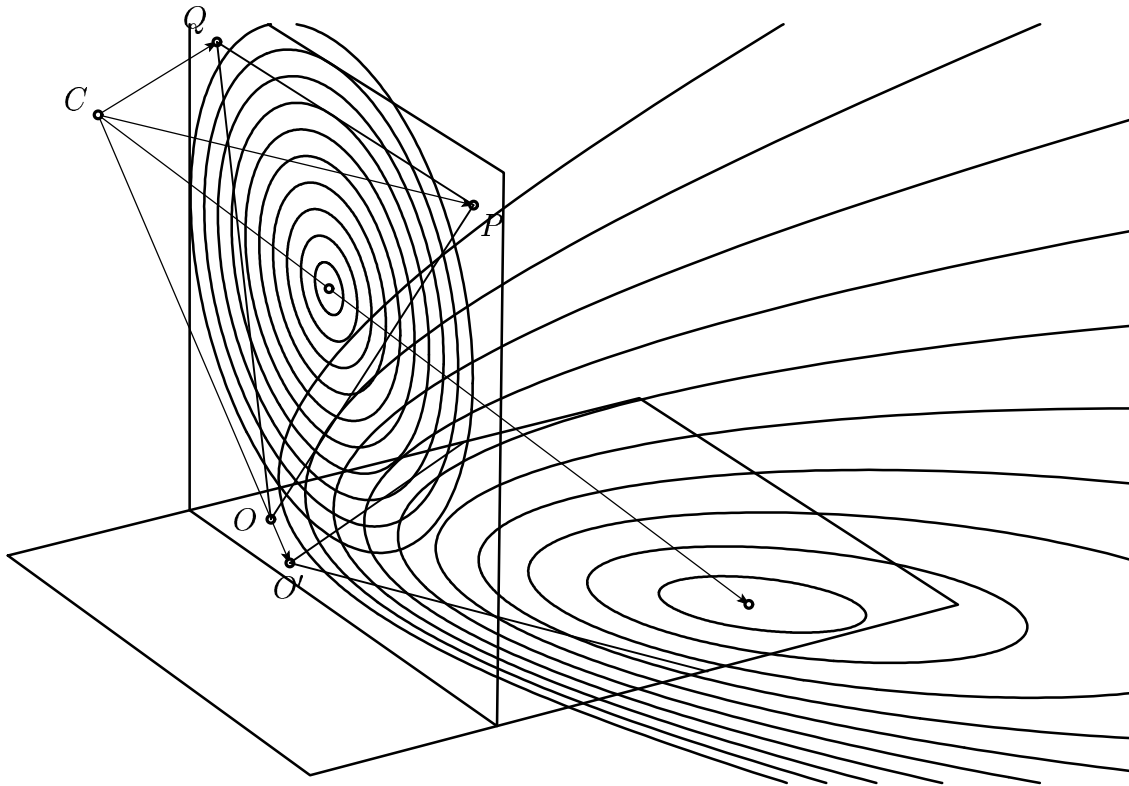


FIG. 1.17 – 10 cercles concentriques, 6 ellipses, 1 parabole, et 3 hyperboles

Une telle transformation ne respecte plus les ellipses, paraboles et hyperboles (voir figure 1.17). Ces courbes se distinguent par leur position vis-à-vis de la droite à l'infini  $x_3 = 0$  : une parabole possède cette droite comme tangente (voir le septième cercle dans la figure 1.17) ; les hyperboles la croisent en deux points, et les ellipses ne la touchent pas du tout.

**La polaire.** Soit  $x_0$  un point sur la conique avec  $x_0^t A x_0 = 0$ . Soit  $x$  un deuxième point avec

$$x_0^t A x = 0 \quad \text{et donc aussi} \quad x^t A x_0 = 0. \quad (1.15)$$

En reprenant les mêmes arguments qu'en Section II.1, si  $x$  était aussi sur la conique  $x^t A x = 0$ , on aurait, pour chaque  $\lambda$  réel,

$$(x_0 + \lambda(x - x_0))^t A (x_0 + \lambda(x - x_0)) = 0,$$

i.e., toute la droite reliant  $x_0$  à  $x$  est dans la conique. Si la conique n'est pas dégénérée, cela est une contradiction et nous avons

*Si  $x_0^t A x_0 = 0$ , la formule (1.15) est l'équation la tangente en  $x_0$ .*

Pour un  $x_0$  quelconque, comme en Section II.1,

$$u_0^t x = 0 \quad \text{avec} \quad u_0^t = x_0^t A \quad (1.16)$$

est l'équation de la polaire de  $x_0$ . Toutes les belles propriétés que nous connaissons restent les mêmes. En particulier :

– Nous avons pour une polaire dans (1.16)

$$x_0^t A x_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_0^t A^{-1} u_0 = 0,$$

la condition pour une droite de coordonnées  $u_0$  d'être tangente ;

- le centre est le pôle de la droite à l’infini ;
- un diamètre est une polaire d’un pôle à l’infini ;
- deux diamètres sont conjugués, si les pôles respectifs se trouvent sur la polaire de l’autre ;
- si  $P_4$  est un pôle et un point  $P_3$  se trouve sur la polaire de  $P_4$ , et si la droite reliant  $P_4$  à  $P_3$  coupe la conique en deux points  $P_2$  et  $P_1$ , alors les points  $P_1, P_2, P_3, P_4$  sont harmoniques (voir la figure 1.13).

## III.2 Géométrie hyperbolique

In der Geometrie fand ich einige Unvollkommenheiten, welche ich für den Grund halte, warum diese Wissenschaft, solange sie nicht in die Analysis übergeht, bis jetzt keinen Schritt vorwärts thun konnte aus demjenigen Zustande, in welchem sie uns von Eucklid überkommen ist.

(N.I. Lobatschewsky, *Th. Parallellinien*, Kasan 1836, trad. all. 1840, 2e éd. 1887)

JOHANN BOLYAI DE BOLYA (en hongrois *Bolyai János*) ... était un profond mathématicien, et de plus un violoniste distingué, et un tireur d’armes de première force. Se trouvant en garnison avec des officiers de cavalerie, Bolyai fut provoqué par treize d’entre eux, et il accepta tous les cartels, à condition qu’on lui permettrait après chaque duel de jouer un morceau de violon. Il sortit vainqueur de ses treize duels, laissant ses treize adversaires sur le carreau.

(Fr. Schmidt, *Notice sur la vie et les travaux de W. et de J. Bolyai*, Temesvár 1867, publ. Paris 1912)

Metrical geometry is thus a part of descriptive geometry, and descriptive geometry is *all* geometry, and reciprocally ;...

(A. Cayley, *Sixth Memoir upon Quantics*, 1859, *Math. Papers* vol. II, p. 592)

**Lobachevsky et Bolyai.** Découvrent indépendamment dans les années 1820-1830 l’existence d’une nouvelle géométrie, basée sur d’interminables suites d’axiomes et d’interminables calculs analytiques pour métriques et angles (voir citations). Leurs publications chez d’obscurs éditeurs du fond de la Russie (Kasan) ou de la Hongrie (Temesvár) furent vite oubliées.

**Gauss.** Après la mort de Gauss (en 1855), on publie sa correspondance avec Schumacher, où des idées semblables sont esquissées. Grâce à la renommée du nom “Gauss”, tout le monde se jette sur ce sujet : les travaux de Lobachevsky et Bolyai sont finalement redécouverts et traduits en allemand et en français.

**Cayley, Riemann.** Cayley (1859) simplifie les calculs de métriques à l’aide de matrices et place *toute* géométrie dans le cadre de la géométrie projective et du birapport (voir citation). Il fallait encore l’audace de Riemann (*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*, Leçon d’Habilitation 1854) pour s’imaginer un “espace” borné, dans lequel les “distances” peuvent tendre vers l’infini.

**Beltrami, Klein et Poincaré.** Vers 1870 “pleuvent” alors les “modèles” pour le plan “hyperbolique” (nom donné par Klein). On s’imagine le “plan” comme un disque de rayon

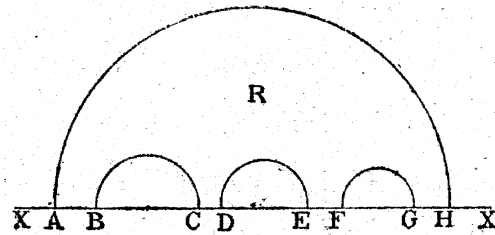
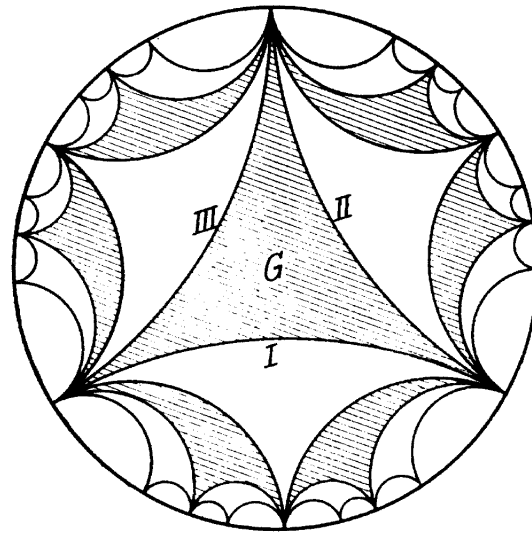


FIG. 2.1 – À gauche : Deux mathématiciens genevois (M. Baillif et D. Cimasoni) sur un lieu de pèlerinage de la géométrie hyperbolique ; ne manquent-ils pas d'un peu de respect ? à droite : Plan hyperbolique ; Modèle de Beltrami (dessin de F. Klein, *Nicht-eukl. Geo.*, 1928, p. 312), en bas : Plan hyperbolique ; Modèle de Poincaré (dessin Poincaré, *Acta Math.* vol. 1, 1882)

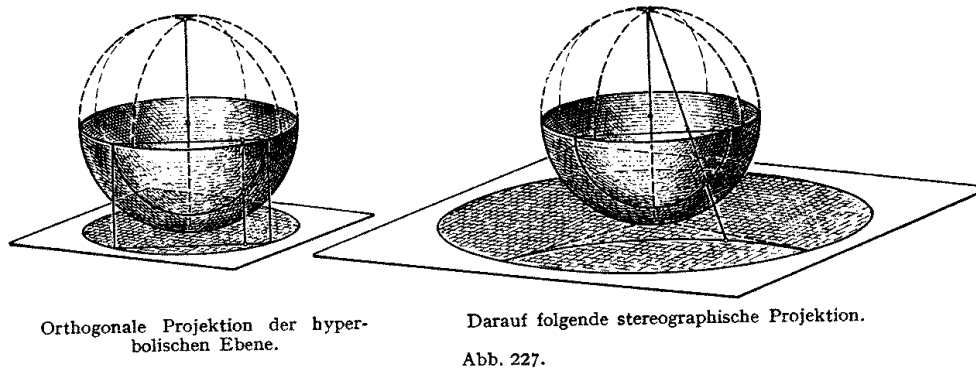


FIG. 2.2 – Modèle de Klein du plan hyperbolique (à gauche) et modèle de Beltrami (à droite) ; (dessins de F. Klein, *Nicht-eukl. Geo.*, 1928, p. 296)

1, les “droites” sont les droites véritables qui, en s’approchant du bord du cercle, “vont à l’infini”. Ainsi il est facile de voir que, par un point donné, passe une infinité de droites qui ne coupent pas une droite donnée. Les “angles” sont calculés en projetant le disque sur une sphère de même rayon par une projection parallèle (voir figure 2.2 à gauche). Les droites deviennent alors des cercles. Ainsi, nous avons le *modèle de Klein* (F. Klein, *Math. Ann.* vol. 4 (1871), p. 573).

Si le tout est ensuite projeté sur un disque (que nous prenons à nouveau de rayon 1) par une projection stéréographique (voir Section I.4), nous obtenons le *modèle de Beltrami* (E. Beltrami, *Giorn. mat. Napoli*, 1868). Ici, les “droites” sont les cercles qui croisent le bord de manière orthogonale, et les “angles” sont mesurés normalement (voir figure 2.2 à droite et figure 2.1 en haut). On voit que des “triangles” sont possibles avec  $\alpha + \beta + \gamma$  aussi petit qu’on veut. Une claire contradiction à Euclide I.32.

Si, finalement, le disque de Beltrami, considéré comme disque unitaire dans  $\mathcal{C}$ , est projeté par une fonction “modulaire” (ou transf. de Cayley ; voir (II.4.15))

$$w = \frac{z + i}{iz + 1}$$

(qui préserve, encore et toujours, angles et cercles ; voir Analyse II) sur le demi-plan complexe supérieur, nous obtenons le *modèle de Poincaré* (H. Poincaré, *Acta Math.* vol. 1 (1882) ; voir figure 2.1 en bas).

**Conclusion.** Un long chemin ... nécessitant beaucoup d’ingéniosité, pour arriver finalement ... à des trivialisés .... Cela nous amène, pour conclure ce cours, à une citation de Dirichlet (concernant un sujet différent) : “*Es ist eigentlich eine einfache Idee ...*” en rajoutant en souriant : “... *aber man muss sie haben!*”

## Sources.

- Les sources originales pour Euclide, Apollonios, Archimède, Descartes, Euler (Opera Omnia vol. 26), Lagrange, Gauss, Cayley, Sylvester se trouvent dans la salle “Classiques” de la Bibmath ;
- les sources pour Clairaut, Cramer, Biot, Carnot, Poncelet, Bolyai et Lobatschewsky et d’autres trésors sont à la BPU ;
- les journaux mentionnés (*Crelle J.* = Journal für die reine und angewandte Mathematik, *Mathematische Annalen* et *Acta Mathematica*) se trouvent sur les rayons “Journaux” de la Bibmath ;
- pour la littérature dite “secondaire”, le didascalos a souvent puisé dans les merveilleux livres de F. Klein, de Coxeter et de M. Berger ;
- une source *importissima* pour les références à la littérature est l’*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* dans la salle “Classiques” de la Bibmath.
- le didascalos remercie son collègue J.-Cl. Hausmann pour les notes de son cours antérieur de Géométrie I ;
- et *last but not least* il a conservé ses cahiers de collège (Prof. H. Huber) et les cours universitaires passionnants de W. Gröbner (1962) à Innsbruck.