**QUESTIONS pour un champion ...**

Cours d'Analyse IIA, 2000-2001.

prière de cocher les 6 sujets qui vous semblent les plus difficiles (d+), les moins difficiles (d-), les plus intéressants (i+) et les moins intéressants (i-) et de me remettre le questionnaire. Merci.

☐ d+ ☐ d− ☐ i+ ☐ i− I.1 Expliquer les fonctions complexes comme application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. La formule d'Euler. Exemples $w = cz$, $w = z^2$, $w = e^z$.

☐ d+ ☐ d− ☐ i+ ☐ i− I.1 Expliquer les fonctions complexes comme application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Exemples: Cayley $w = (z+1)/(z-1)$, Joukovski $w = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$.

☐ d+ ☐ d− ☐ i+ ☐ i− I.2 Expliquer la $\mathbb{C}$-différentiabilité, sa relation avec les conditions de Cauchy-Riemann, la préservation des angles (holomorphie) et les fonctions harmoniques.

☐ d+ ☐ d− ☐ i+ ☐ i− I.3 Expliquer la relation entre une intégrale complexe et l'intégrale d'une forme différentielle, existence de primitive, critères d'intégrabilité et Cauchy-Riemann.

☐ d+ ☐ d− ☐ i+ ☐ i− I.3 Définition d'une intégrale complexe le long d'un chemin; propriétés, existence de primitive, estimation.

☐ d+ ☐ d− ☐ i+ ☐ i− I.3 L'énoncé du Théorème fondamental de Cauchy et son application aux intégrales de Fresnel ($\int_\gamma e^{-z^2}\,dz$) et au logarithme complexe (ses propriétés, branches secondaires).

☐ d+ ☐ d− ☐ i+ ☐ i− I.3 Preuve de Goursat-Pringsheim pour le Théorème fondamental de Cauchy pour un domaine étoilé.

☐ d+ ☐ d− ☐ i+ ☐ i− I.4 Preuve de la Formule Intégrale de Cauchy.

☐ d+ ☐ d− ☐ i+ ☐ i− I.4 Formule Intégrale de Cauchy pour dérivées supérieures et Inégalités de Cauchy.

☐ d+ ☐ d− ☐ i+ ☐ i− I.4 Preuve du Théorème de Liouville et du Théorème Fondamental de l'Algèbre.

☐ d+ ☐ d− ☐ i+ ☐ i− I.4 Preuve du Théorème de la Moyenne et du Principe de Maximum.

☐ d+ ☐ d− ☐ i+ ☐ i− I.5 Montrer que chaque fonction holomorphe possède un développement en série entière. Décrire le domaine, dans lequel la série doit converger. Exemples de séries.

☐ d+ ☐ d− ☐ i+ ☐ i− I.5 Montrer que chaque série entière à rayon de convergence positif (formule?) représente à l'intérieur de ce cercle une fonction holomorphe.

☐ d+ ☐ d− ☐ i+ ☐ i− I.5 Application du théorème sur les séries doubles à la justification du calcul du produit de deux séries entières. Exemples $e^{\alpha z} \cdot e^{\beta z} = e^{(\alpha+\beta)z}$; $(1+z)^c \cdot (1+z) = (1+z)^{c+1}$.

☐ d+ ☐ d− ☐ i+ ☐ i− I.5 Calcul du quotient de deux séries entières et substitution de séries; preuve de convergence (majoration).

☐ d+ ☐ d− ☐ i+ ☐ i− I.5 Séries entières pour fonctions inverses et équations différentielles; preuve de convergence (majoration).

d+ d− i+ i− I.5 Séries entières pour $\cot z$ et $\tan z$, Nombres de Bernoulli (rappel: partir de $z/(e^z-1)$).

d+ d− i+ i− I.6 Théorème de l'Unicité et principe du Prolongement Analytique. Exemple d'une fonction sans prolongement.

d+ d− i+ i− I.6 Expliquer le Open Mapping Theorem. Preuve.

d+ d− i+ i− I.7 Montrer l'existence d'un développement de Laurent pour fonctions holomorphes dans un anneau.

d+ d− i+ i− I.7 Discussion des 3 types de singularités isolées.

d+ d− i+ i− I.8 Décomposition en fractions partielles des fonctions méromorphes, l'exemple de $\cot z$. Conséquences intéressantes (Euler).

d+ d− i+ i− I.8 Relation entre l'Indice de Cauchy, et le nombre de zéros et pôles pour fonctions méromorphes (Principe de l'argument). Explication.

d+ d− i+ i− I.9 Théorème des résidus. Démonstration et applications (Th. Cauchy, Principe de l'argument).

d+ d− i+ i− I.9 Application du Théorème des résidus au calcul d'intégrales $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+1}=\frac{2\pi}{3}$, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx=\frac{\pi e^{-a}}{a}\quad(a>0)$ , $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$.

d+ d− i+ i− I.9 Application du Théorème des résidus au calcul d'intégrales $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2p\cos\varphi+p^2}=\frac{2\pi}{1-p^2}$ si $|p|<1$ , $\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}\,dx}{1+x^b}=\frac{\pi}{b}\,\frac{1}{\sin\frac{a\pi}{b}}\quad 0<a<b$.

d+ d− i+ i− II.1 Relation entre séries de Fourier sur $[0,2\pi]$, séries en sinus, séries en cosinus, et séries en notation exponentielle complexe. Premiers exemples de séries à partir du Théorème Binomial et de séries entières (Euler).

d+ d− i+ i− II.1 Formules Intégrales (d'Euler-Fourier) pour coefficients de Fourier, exemples ($y=|\sin x|$); séries intégrées, Polynômes de Bernoulli.

d+ d− i+ i− II.2 Dérivation et solution de l'équation de la corde. Conditions initiales, conditions aux bords. Méthode de la séparation des variables.

d+ d− i+ i− II.2 Dérivation et solution de l'équation de la chaleur. Condition initiale, conditions aux bords. Méthode de la séparation des variables.

d+ d− i+ i− II.2 Solution du Problème de Dirichlet pour le rectangle et pour le cercle. Conditions aux bords. Méthode de la séparation des variables. Formule de Poisson.

d+ d− i+ i− II.3 Convergence élémentaire des séries de Fourier. Ligne générale de la démonstration. Estimation pour les coefficients et Lemme de Riemann en détail.

d+ d− i+ i− II.3 Convergence élémentaire des séries de Fourier. Ligne générale de la démonstration. Convergence vers la fonction $f$ en détail (Preuve de Chernoff).

d+ d– i+ i– II.3 Convergence élémentaire des séries de Fourier. Ligne générale de la démonstration. Convergence uniforme sous certaines conditions en détail.

d+ d– i+ i– II.4 Ligne générale de la démonstration de convergence de Dirichlet. Dérivation du Noyau de Dirichlet en détail.

d+ d– i+ i– II.4 Ligne générale de la démonstration de convergence de Dirichlet. Théorème de convergence pour fonctions monotones en détail.

d+ d– i+ i– II.4 Ligne générale de la démonstration de convergence de Dirichlet. Phénomène de Gibbs en détail.

d+ d– i+ i– II.5 Explication de l'idée des suites de Dirac et démonstration de convergence (Fejér) des sommes de Cesàro pour fonctions continues.

d+ d– i+ i– II.5 Contre-exemple de Fejér d'une fonction continue avec série de Fourier divergente en un point.

d+ d– i+ i– II.6 Relation entre séries de Fourier et problème des moindres carrés. Inégalité de Bessel. Application: convergence uniforme pour Primitives.

d+ d– i+ i– II.6 Développements en systèmes orthonormaux. Identités de Parseval. Espaces complexes.

d+ d– i+ i– II.6 Montrer la motivation pour l'espace de Hilbert $\ell^2$ à partir des identités de Parseval. Montrer qu'il s'agit d'un espace (complet) de Hilbert.

d+ d– i+ i– II.7 Montrer que l'intégrale de Riemann est insuffisante pour construire un espace complet basé sur la norme $\|f\| = \int_a^b |f(x)|\,dx$. Donner la preuve pour l'intégrale de Lebesgue (Fischer-Riesz).

d+ d– i+ i– II.7 Mesure de Borel-Lebesgue. Mesure extérieure, $\sigma$-subadditivité, ensembles de mesure nulle.

d+ d– i+ i– II.7 Définition de l'intégrale de Lebesgue à l'aide de suites de fonctions en escalier. Indépendance de la définition.

d+ d– i+ i– II.7 Intégrale de Lebesgue. Théorèmes de convergence (Levi, Fatou, Lebesgue).

d+ d– i+ i– II.8 Obtenir la transformation de Fourier "sinus" par un passage à la limite $L \to \infty$ à l'équation de la chaleur. Formule d'inversion. Identité de Parseval.

d+ d– i+ i– II.8 Obtenir la transformation de Fourier complexe par un passage à la limite $L \to \infty$. Formule de Poisson pour la solution de l'équation de la chaleur dans un domaine infini des deux côtés.

d+ d– i+ i– II.8 Transformée de Fourier d'une convolution. Application à l'équation intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} y(x-u) \cdot y(u)\,du = e^{-x^2}$. Rappel: $f(x) = e^{-a^2x^2} \;\Rightarrow\; \widehat{f}(q) = \frac{1}{a\sqrt{2}}\, e^{\frac{-q^2}{4a^2}}$.

d+ d– i+ i– II.8 Transformée de Fourier des dérivées d'une fonction. Application à l'équation de la chaleur. Rappel: $f(x) = e^{-a^2x^2} \;\Rightarrow\; \widehat{f}(q) = \frac{1}{a\sqrt{2}}\, e^{\frac{-q^2}{4a^2}}$.